Numerische Simulation

Heinrich Voss
TU Hamburg-Harburg
Arbeitsbereich Mathematik
voss@tu-harburg.de

Grundlagen

Wir stellen in diesem Abschnitt Aussagen über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen zusammen, die wir in den folgenden Abschnitten über numerische Methoden benötigen.

Verweise mit dem Zusatz MI (z.B. Satz 28.1 MI) beziehen sich dabei auf die Skripten "Mathematik für Studierende der Ingenieurwissenschaften I - IV", z.B. Satz 28.1 MI.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = f(x, \boldsymbol{y}), \;\; \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0. \tag{1}$$

Dabei ist $\boldsymbol{y}$ die gesuchte Funktion und $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0 \in \mathrm{IR}^n$ der vorgegebene Anfangswert.

Für die Herleitung von Existenz- und Eindeutigkeitsresultaten wurde in Satz 28.1 MI die Anfangswertaufgabe (1) in eine Integralgleichung umgeformt.

Wir werden diese Integralgleichung in Kapitel 3 verwenden, um numerische Verfahren zu begründen.

Satz 1.1: Sei

$$f : Q := \{(x, \boldsymbol{y}) : |x - x_0| \le a, \ \ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^0\| \le b\} \to \mathrm{I\!R}^n$$

stetig und $\boldsymbol{y} : I := [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathrm{I\!R}^n$ mit $(x, \boldsymbol{y}(x)) \in Q$ für alle $x \in I$. Dann sind äquivalent

(i) $\boldsymbol{y}$ ist in I stetig differenzierbar und löst die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}'(x) = f(x, \boldsymbol{y}(x)) \quad \text{für alle } x \in I, \ \ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0$$

(ii) $\boldsymbol{y}$ ist in I stetig und erfüllt die Integralgleichung

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \boldsymbol{y}(t))\, dt, \ \ x \in I. \tag{2}$$

Satz1.2 [Satz von Picard und Lindelöf]

Es sei $Q := \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathrm{I\!R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^0\| \leq b\}$, sei $f : Q \to \mathrm{I\!R}^n$ stetig auf Q mit $\|f(x, \boldsymbol{y})\| \leq M$ für alle $(x, \boldsymbol{y}) \in Q$, und es erfülle f eine Lipschitz Bedingung bzgl. $\boldsymbol{y}$ auf Q, d.h.

$$\|f(x, \boldsymbol{y}) - f(x, \boldsymbol{z})\| \leq L\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|$$

für alle $(x, \boldsymbol{y}), (x, \boldsymbol{z}) \in Q$.

Dann besitzt die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = f(x, \boldsymbol{y}), \;\; \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0$$

eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{y}(x)$, die (wenigstens) auf dem Intervall $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ mit $\alpha := \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ definiert ist.

Mit dem Fixpunktsatz von Schauder erhält man

Satz 1.3 [Existenzsatz von Peano]

Es sei $Q := \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathrm{IR}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, \ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^0\| \leq b\}$, sei $f : Q \to \mathrm{IR}^n$ stetig auf Q mit $\|f(x, \boldsymbol{y})\| \leq M$ für alle $(x, \boldsymbol{y}) \in Q$ und sei $\alpha = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$.

Dann besitzt die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = f(x, \boldsymbol{y}), \ \ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0$$

eine Lösung, die in $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ definiert ist.

Bemerkung: Die Eindeutigkeit kann nicht mehr garantiert werden, denn die Funktion $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ ist stetig, aber $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$, ist nicht eindeutig lösbar. $\square$

Um die Abhängigkeit der Lösung der Anfangswertaufgabe (1) von den Anfangswerten und von Parametern zu diskutieren, wurde das Lemma von Gronwall benutzt.

Satz 1.5 [Lemma von Gronwall]

Es sei $\phi : I := [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ stetig, und es gelte mit $\alpha, \beta \geq 0$

$$0 \leq \phi(x) \leq \alpha + \beta \left| \int_{x_0}^{x} \phi(t)\, dt \right| \quad \text{für alle } x \in I.$$

Dann gilt

$$\phi(x) \leq \alpha \exp(\beta |x - x_0|) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Satz 1.6

Es seien die Voraussetzungen des Satzes von Picard und Lindelöf erfüllt, und es sei L die Lipschitz Konstante von f in Q. Dann gilt

$$\|\boldsymbol{y}(x; x_0, \boldsymbol{y}^0) - \boldsymbol{y}(x; x_0, \boldsymbol{z}^0)\| \leq e^{L|x-x_0|}\|\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{z}^0\|$$

für alle $\boldsymbol{z}^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{y}^0\| \leq b$ und alle $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, für die

$$\|\boldsymbol{y}(x; x_0, \boldsymbol{z}^0) - \boldsymbol{y}^0\| \leq b$$

gilt.

Wir betrachten nun Anfangswertaufgaben, bei denen die rechte Seite von einem Parameter $\boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{IR}^m$ abhängt:

$$\boldsymbol{y}' = f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}), \;\; \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0. \tag{3}$$

Hierfür gilt (vgl. Satz 28.9 MI)

Satz 1.7: Die Funktion f besitze auf der Menge

$$\tilde{Q} := \{(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}) : |x - x_0| \leq \alpha, \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^0\| \leq b, \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^0\| \leq c\}$$

stetige partielle Ableitungen erster Ordnung bzgl. der Komponenten von $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{\lambda}$.

Dann ist $\boldsymbol{y}(x; \boldsymbol{\lambda})$ stetig differenzierbar auf M. Darüberhinaus existieren alle gemischten zweiten partiellen Ableitungen bzgl. x und der Komponenten von $\boldsymbol{\lambda}$, und diese sind stetig.

Die Matrixfunktion $\boldsymbol{Z}(x; \boldsymbol{\lambda}) := \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{y}(x; \boldsymbol{\lambda})$ ist Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}'(x; \boldsymbol{\lambda}) &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} f(x, \boldsymbol{y}(x; \boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{Z}(x; \boldsymbol{\lambda}) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} f(x, \boldsymbol{y}(x; \boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda}), \quad (4) \\ \boldsymbol{Z}(x_0; \boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Korollar 1.8: Ist die Funktion $f : Q \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so hängt die Lösung $\boldsymbol{y}(x; x_0, \boldsymbol{y}^0)$ der Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = f(x, \boldsymbol{y}), \;\; \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0$$

stetig differenzierbar von x_0 und $\boldsymbol{y}^0$ ab.

Die Matrixfunktion $\boldsymbol{Z}(x) := \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}^0} \boldsymbol{y}(x; x_0, \boldsymbol{y}^0)$ ist Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{Z}'(x) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} f(x, \boldsymbol{y}(x; x_0, \boldsymbol{y}^0))\, \boldsymbol{Z}(x), \;\; \boldsymbol{Z}(x_0) = \boldsymbol{E}, \tag{5}$$

wobei $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Die Funktion $\boldsymbol{w}(x) := \dfrac{\partial}{\partial x_0} \boldsymbol{y}(x; x_0, \boldsymbol{y}^0)$ ist Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{w}'(x) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} f(x, \boldsymbol{y}(x; x_0, \boldsymbol{y}^0))\, \boldsymbol{w}(x), \;\; \boldsymbol{w}(x_0) = -f(x_0, \boldsymbol{y}^0). \tag{6}$$

Bemerkung

Satz 1.7 und Korollar 1.8 gelten entsprechend für höhere Ableitungen.

Ist z.B. $f : Q \to \mathbb{R}^n$ eine C^m-Funktion, so ist auch $\boldsymbol{y}(x; x_0, \boldsymbol{y}^0)$ eine C^m-Funktion aller Variablen. $\square$

Wir betrachten nun lineare Systeme

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x) \tag{7}$$

Hierfür existiert die Lösung einer Anfangswertaufgabe auf dem ganzen Intervall, auf dem $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ stetig sind. Es gilt

Satz 1.10
Die lineare Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x), \;\; \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0$$

mit stetigen Funktionen $\boldsymbol{A} : [a,b] \longrightarrow \mathrm{IR}^{(n,n)}$, $\boldsymbol{b} : [a,b] \longrightarrow \mathrm{IR}^n$ bzw. $\boldsymbol{A} : \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}^{(n,n)}$, $\boldsymbol{b} : \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}^n$ besitzt eine eindeutige Lösung, die auf ganz $[a,b]$ bzw. IR definiert ist.

Wie für lineare Gleichungssysteme gilt

Satz 1.11
Die allgemeine Lösung von (7) lautet

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_s(x) + \boldsymbol{y}_h(x).$$

Dabei ist $\boldsymbol{y}_s$ eine spezielle Lösung von (7) und $\boldsymbol{y}_h(x)$ die allgemeine Lösung des zu (7) gehörenden homogenen Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}. \tag{8}$$

Die Lösungen des homogenen Systems $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}$ bilden offenbar einen Vektorraum. Eine Basis dieses Vektorraums kann man auf folgende Weise bestimmen:

Wir wählen ein $x_0 \in$ IR und eine Basis $\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^n$ des IR^n. Dann besitzt jede der Anfangswertaufgaben

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}, \;\; \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{v}^j, \;\; j = 1, \ldots, n,$$

eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{y}^j(x)$.

Definition

Ist $\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^n$ eine beliebige Basis des Lösungsraums von (8), so heißt $\boldsymbol{Y}(x) := (\boldsymbol{y}^1(x), \ldots, \boldsymbol{y}^n(x))$ ein Fundamentalsystem oder eine Fundamentallösung von (2).

Satz 1.13: Es seien $\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^n$ n Lösungen des homogenen Systems $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{Y}(x) := (\boldsymbol{y}^1(x), \ldots, \boldsymbol{y}^n(x))$. Dann gilt

(i) Ist $\boldsymbol{Y}$ ein Fundamentalsystem von (8), so ist die allgemeine Lösung von (8) gegeben durch $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\boldsymbol{Y}$ ist genau dann ein Fundamentalsystem von (8), wenn für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ die Matrix $\boldsymbol{Y}(x_0)$ regulär ist.

(iii) Ist $\boldsymbol{Y}(x_0)$ regulär für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so ist $\boldsymbol{Y}(x)$ regulär für alle $x \in \mathbb{R}$.

Ist eine Fundamentallösung $\boldsymbol{Y}$ des homogenen Systems bekannt, so kann man die Lösung des inhomogenen Problems durch Variation der Konstanten ermitteln.

Satz 1.14

Es sei $\boldsymbol{Y}(x)$ ein beliebiges Fundamentalsystem des homogenen Problems $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}$.

Dann ist

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\Big(\boldsymbol{Y}^{-1}(x_0)\,\boldsymbol{y}^0 + \int\limits_{x_0}^{x} \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,dt\Big) \tag{9}$$

die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x),\;\; \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0.$$

Ist (7) ein lineares System mit konstanten Koeffizienten:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{A} \in \mathrm{I\!R}^{(n,n)}, \tag{10}$$

so kann man ein Fundamentalsystem mit Methoden der linearen Algebra bestimmten.

Besitzt $\boldsymbol{A}$ die Jordansche Normalform

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{J}\boldsymbol{V}^{-1}$$

mit

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{J}_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

und sind $\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ die zu dem Jordan Kästchen $\boldsymbol{J}_j$ gehörenden Spalten von $\boldsymbol{V}$, so sind

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{v}^1 \exp(\lambda x), \\
(x\boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{v}^2) \exp(\lambda x), \\
\Big(\frac{1}{2} x^2 \boldsymbol{v}^1 + x\boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{v}^3\Big) \exp(\lambda x), \\
\vdots \\
\Big(\frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} \boldsymbol{v}^1 + \cdots + x\boldsymbol{v}^{k-1} + \boldsymbol{v}^k\Big) \exp(\lambda x)
\end{gathered}$$

linear unabhängige Lösungen von (8).

Fasst man diese Lösungen zu den verschiedenen Kästchen zusammen, so erhält man insgesamt ein Fundamentalsystem von (8).

Wir geben noch eine andere Gestalt einer Fundamentallösung an.

Dazu definieren wir zunächst für $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$

$$e^{\boldsymbol{A}} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \boldsymbol{A}^j.$$

Dann ist

$$\boldsymbol{Y}(x) := e^{x\boldsymbol{A}}$$

die durch $\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{E}$ normierte Fundamentalmatrix und

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}\left\{\boldsymbol{y}^0 + \int\limits_0^x e^{-\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{b}(t)\,dt\right\} \tag{11}$$

ist die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b},\;\; \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0.$$

Man beachte, dass diese Gestalt der Fundamentallösung und der Lösungsformel niemals zur praktischen Berechnung, sondern nur für qualitative Überlegungen verwendet werden.

Wir betrachten nun die lineare (2-Punkt) Randwertaufgabe

$$\left.\begin{aligned} L\boldsymbol{y}(x) :=&\ \ \boldsymbol{y}'(x) - \boldsymbol{C}(x)\,\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{r}(x) \\ R\boldsymbol{y} :=&\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(a) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{c} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wobei $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{IR}^{(n,n)}$, $\boldsymbol{c} \in \mathrm{IR}^n$ und stetige Funktionen $\boldsymbol{C} : [a,b] \to \mathrm{IR}^{(n,n)}$ und $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathrm{IR}^n$ gegeben sind.

Satz 1.15

Gegeben sei die lineare Randwertaufgabe (12). Es sei $\boldsymbol{Y}(x)$ ein Fundamentalsystem von $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{C}(x)\,\boldsymbol{y}$. Dann sind äquivalent:

(i) Die Randwertaufgabe hat für jede stetige rechte Seite $\boldsymbol{r}(x)$ und jeden Vektor $\boldsymbol{c} \in \mathrm{IR}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung.

(ii) Die homogene Randwertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{C}(x)\,\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(a) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(b) = \mathbf{0}$$

hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{y}(x) \equiv \mathbf{0}$.

(iii) Die Matrix $\boldsymbol{D} := \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(a) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}(b)$ ist regulär.

Für die Randwertaufgabe (12) kann man eine geschlossene Lösungsformel angeben, die aber (ähnlich wie die Lösungsformel (11) für Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Fundamentalmatrix $e^{x\boldsymbol{A}}$) nur für theoretische Zwecke verwendet wird.

Die homogene Randwertaufgabe

$$L\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{0}, \quad R\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},$$

besitze nur die triviale Lösung $\boldsymbol{y}(x) \equiv \boldsymbol{0}$, und es sei $\boldsymbol{Y}(x)$ die Fundamentallösung von

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{C}(x)\,\boldsymbol{y}$$

mit $\boldsymbol{Y}(a) = \boldsymbol{E}$.

Nach Satz 1.15 ist die Matrix $\boldsymbol{D} := \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Y}(b)$ regulär, und daher ist die Matrix

$$\boldsymbol{G}(x,t) = -\boldsymbol{Y}(x) \left\{ \begin{array}{l} (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Y}(b))^{-1}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Y}(b) - \boldsymbol{E} \\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Y}(b))^{-1}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Y}(b) \end{array} \right\} \boldsymbol{Y}(t)^{-1} \begin{array}{l} ,\ t < x \\ ,\ t > x \end{array} \tag{13}$$

für alle $x \in [a,b]$ und alle $t \in [a,b]$ definiert.

Definition

Die Matrix $\boldsymbol{G}(x,t)$ aus (13) heißt die Greensche Matrix der linearen Randwertaufgabe (12).

Satz 1.17

Es sei die Randwertaufgabe (12) eindeutig lösbar und $\boldsymbol{Y}(x)$ Fundamentallösung von $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{C}(x)\,\boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{Y}(a) = \boldsymbol{E}$.

Dann ist mit der Greenschen Matrix $\boldsymbol{G}(x,t)$ aus (13) die Lösung von (12) darstellbar als

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Y}(b))^{-1}\,\boldsymbol{c} + \int\limits_a^b \boldsymbol{G}(x,t)\,\boldsymbol{r}(t)\,dt.$$

Für eine große Klasse linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung erhält man die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen aus dem folgenden Satz.

Satz 1.18

Es sei

$$Ly := -y'' + p(x)y' + q(x)y, \;\; a < x < b, \tag{14}$$

mit $p, q \in C[a, b]$ und $q(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Dann gilt

$$\begin{gathered} Ly(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a, b], \;\; y(a) \geq 0, \;\; y(b) \geq 0 \\ \Rightarrow \;\; y(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a, b]. \end{gathered} \tag{15}$$

Beweis Angenommen y nimmt in $s \in [a,b]$ ein negatives Minimum an:

$$y(s) = \min_{a \le x \le b} y(x) < 0.$$

Dann gilt wegen $y(a) \ge 0$ und $y(b) \ge 0$ sogar $a < s < b$, und

$$y(s) < 0,\ y'(s) = 0,\ y''(s) \ge 0.$$

Wegen der Stetigkeit von y gibt es eine Umgebung $U \subset [a,b]$ von s mit $y(x) < 0$ für alle $x \in U$. Es gilt

$$-y''(x) + p(x)y'(x) \ge -q(x)y(x) \ge 0 \quad \text{für alle } x \in U.$$

Durch Multiplikation dieser Ungleichung mit

$$\rho(x) := \exp\Big(- \int_s^x p(t)\, dt \Big)$$

erhält man

$$-(\rho(x)y'(x))' \geq 0 \quad \text{für alle } x \in U,$$

und hieraus durch Integration unter Berücksichtigung von $y'(s) = 0$

$$y'(x) \leq 0 \text{ für } x \in U,\ x \geq s \quad \text{und} \quad y'(x) \geq 0 \text{ für } x \in U,\ x \leq s.$$

Da die Funktion y in s ihr Minimum annimmt, muss y in U – und mit demselben Schluss in ganz $[a, b]$ – konstant gleich $y(s) < 0$ sein im Widerspruch zu $y(a) \geq 0$.

∎

Ein Randwertproblem mit der Eigenschaft (15) heißt invers monoton.

Aus der Inversmonotonie folgt insbesondere, dass die Randwertaufgabe

$$Ly(x) = f(x),\ a < x < b, \quad y(a) = \gamma_1,\ y(b) = \gamma_2, \tag{16}$$

für jede stetige rechte Seite f und für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung besitzt, denn das homogene Problem ist nur trivial lösbar.

Gilt nämlich $Ly(x) \equiv 0$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, so folgt aus Satz 1.18 $y(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$, und da zugleich $L(-y) \geq 0$, $(-y)(a) \geq 0$, $(-y)(b) \geq 0$ gilt, ist auch $-y(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$. Zusammen folgt also $y(x) \equiv 0$, und wegen Satz 1.15 die eindeutige Lösbarkeit von (16).

Aus Satz 1.17 folgt, dass die Greensche Funktion von L mit Dirichletschen Randbedingungen nichtnegativ ist, denn existiert ein $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in (a, b) \times (a, b)$ mit $g(x, t) < 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit von g ein $\varepsilon > 0$ mit $g(x, t) < 0$ für alle $(x, t) \in (\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon) \times (\tilde{t} - \varepsilon, \tilde{t} + \varepsilon)$. Es sei $f \in C[a, b]$ mit $f(x) = 0$ für $|x - \tilde{t}| \geq \varepsilon$ und $f(x) > 0$ für $|x - \tilde{t}| < \varepsilon$ und y die Lösung von

$$Ly(x) = f(x), \; y(a) = y(b) = 0.$$

Dann gilt

$$y(\tilde{x}) = \int_a^b g(\tilde{x}, t) f(t)\, dt = \int_{\tilde{t}-\varepsilon}^{\tilde{t}+\varepsilon} g(\tilde{x}, t) f(t)\, dt < 0,$$

während aus der Inversmonotonie $y(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ folgt.

Partielle Differentialgleichungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$Lu(\boldsymbol{x}) := \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\boldsymbol{x})\, u_{x_j x_k}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\, u_{x_j}(\boldsymbol{x}) + c(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}). \tag{17}$$

Dabei sind $a_{jk}, b_j, c, f \ : \ \mathrm{I\!R}^n \supset \Omega \to \mathrm{I\!R}$, $j, k = 1, \ldots, n$, gegebene stetige Funktionen und Ω ein Gebiet im $\mathrm{I\!R}^n$. Wir beschränken uns meistens auf den Fall eines ebenen Systems ($n = 2$). Die Matrix $\boldsymbol{A} := (a_{jk})$ nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als symmetrisch an.

Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt eine klassische Lösung der Differentialgleichung (17), wenn die Gleichung (17) in jedem Punkt aus Ω erfüllt ist.

Wir unterscheiden drei Typen, elliptische, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen.

Für verschiedene Typen sind verschiedene Aufgabentypen sachgemäß (d.h. eindeutig lösbar, wobei die Lösung stetig von den Eingangsdaten abhängt) und physikalisch sinnvoll.

Die Theorie und die numerische Behandlung sind bei den verschiedenen Typen sehr unterschiedlich.

Definition Besitzt die Matrix $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ Eigenwerte einheitlichen Vorzeichens, so heißt (17) elliptisch im Punkt $\boldsymbol{x}$, ist $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ regulär und hat ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n-1$ Eigenwerte, so heißt die Gleichung (17) hyperbolisch in $\boldsymbol{x}$, ist schließlich die Matrix $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ singulär, so heißt die Differentialgleichung (17) parabolisch in $\boldsymbol{x}$.

Ist die Gleichung in allen Punkten von Ω elliptisch oder hyperbolisch oder parabolisch, so nennt man sie elliptisch oder hyperbolisch oder parabolisch in Ω.

Für $n \geq 4$ betrachtet man zusätzlich noch ultrahyperbolische Probleme. Dies sind Aufaben, bei denen alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ von Null verschieden sind und es wenigstens zwei positive und zwei negative Eigenwerte gibt. Wir werden hierauf nicht weiter eingehen.

Man kann eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung stets auf eine der folgenden Normalformen transformieren.

Ist die Differentialgleichung elliptisch, so lautet die Normalform

$$\Delta_n u + \boldsymbol{b}^T \nabla u + cu = f \tag{18}$$

mit dem $n-$dimensionalen Laplace Operator

$$\Delta_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

und gewissen Funktionen b_i, c und f.

Speziell für $b_i \equiv 0$, $c \equiv 0$ heißt Gleichung (18) Poisson Gleichung. Gilt zusätzlich $f \equiv 0$, so erhält man die Potentialgleichung.

Die Normalform der hyperbolischen Aufgabe lautet

$$u_{tt} = \Delta_{n-1} u + \boldsymbol{b}^T \nabla_{n-1} u + b_n \frac{\partial u}{\partial t} + cu + f, \tag{19}$$

wobei

$$\Delta_{n-1} := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

und

$$\nabla_{n-1} := \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \Big)^T$$

sich nur auf die (Orts-) Variable $\boldsymbol{x}$ beziehen.

Speziell für $b_i \equiv 0,\ i = 1, \dots, n$, $c \equiv 0$ und $f \equiv 0$ erhält man die Wellengleichung

$$u_{tt} = \Delta_{n-1} u.$$

Die Normalform der parabolischen Aufgabe lautet

$$u_t = \Delta_{n-1} u + \boldsymbol{b}^T \nabla_{n-1} u + cu. \tag{20}$$

Ein typischer Vertreter ist die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta_{n-1} u,$$

wobei $n-1$ wieder die Raumdimension bezeichnet.

Definition Die Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u = f(\boldsymbol{x}, u, \nabla u),$$

in der die Funktion u und ihre ersten Ableitungen auch nichtlinear auftreten können, der Hauptteil aber nur von den unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ abhängt, heißt **halblinear**.

Die Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u = f(\boldsymbol{x}, u, \nabla u),$$

die linear in den zweiten Ableitungen ist, wobei der Hauptteil auch von u und/oder den ersten Ableitungen von u abhängt, heißt **quasilinear**.

Wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man nur dann eine eindeutige Lösung einer Differentialgleichung erwarten, wenn man zusätzlich Anfangsbedingungen oder Randbedingungen vorgibt.

Im linearen (und halblinearen) Fall hängt der Typ der Differentialgleichung nur von dem betrachteten Punkt $\boldsymbol{x} \in \Omega$ ab. Im quasilinearen Fall kann der Typ der Differentialgleichung nicht nur von $\boldsymbol{x}$, sondern auch von der Lösung u (also von den Randwerten oder Anfangswerten) abhängen.

Definition Eine Differentialgleichung

$$Lu = f$$

mit zusätzlichen Anfangs- und/oder Randbedingungen heißt **sachgemäß**, wenn sie eindeutig lösbar ist und die Lösung stetig von den Eingangsdaten abhängt.

Die Forderung der stetigen Abhängigkeit (auch Stabilität) ist bei physikalischen Problemen sinnvoll, da Eingangsdaten häufig aus Messungen gewonnen werden, d.h. nur bis auf eine gewisse Genauigkeit bekannt sind. Werden diese Eingabedaten in gewissen Grenzen variiert, so sollte sich die Lösung des Problems nicht zu dramatisch ändern, da sonst die Lösung wertlos ist.

Durch elliptische Differentialgleichungen werden in der Regel Gleichgewichtszustände beschrieben (z.B. stationäre Temperaturverteilungen in einem Körper), durch hyperbolische oder parabolische Gleichungen zeitabhängige Probleme (z.B. Ausbreitung von Wellen oder die zeitliche Entwicklung einer Temperaturverteilung). Es ist daher anschaulich klar, dass man für elliptische Probleme zusätzlich Randbedingungen vorzugeben hat und für die beiden anderen Typen Anfangs- und Randbedingungen.

Wir betrachten zunächst die elliptische Differentialgleichung

$$Lu(\boldsymbol{x}) := -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\boldsymbol{x})u_{x_j x_k}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{n} b_j(\boldsymbol{x})u_{x_j}(\boldsymbol{x}) + c(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \tag{21}$$

für $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathrm{IR}^n$ und setzen voraus, dass sogar ein $\alpha_0 > 0$ existiert mit

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\boldsymbol{x})\xi_j\xi_k \geq \alpha_0 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \Omega \text{ und alle } \xi_j \in \mathrm{IR}. \tag{22}$$

In diesem Fall sind nach dem Rayleighschen Prinzip sogar alle Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ für jedes $\boldsymbol{x} \in \Omega$ größer oder gleich α_0, also von einem Vorzeichen, und L ist elliptisch. Die Differentialgleichung (21) heißt dann gleichmäßig elliptisch.

Wir stellen uns vor, dass durch die Gleichung (21) die stationäre Temperaturverteilung in einem Körper Ω beschrieben wird.

Dann sind die folgenden Randvorgaben physikalisch sinnvoll:

$$u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{23}$$

mit einer gegebenen Funktion $g : \partial\Omega \to \mathrm{I\!R}$.

Dies bedeutet, dass der Wärmeaustausch zwischen dem Körper und seiner Umgebung so perfekt ist, dass die Oberflächentemperatur des Körpers gleich der gegebenen Umgebungstemperatur $g(\boldsymbol{x})$ ist. Die Randwertaufgabe (21), (23) heißt erste Randwertaufgabe oder Dirichletsche Randwertaufgabe.

Daneben betrachtet man die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \tag{24}$$

mit gegebenem $g : \partial\Omega \to \mathrm{IR}$, wobei $\boldsymbol{n}$ den äußeren Normalenvektor auf $\partial\Omega$ bezeichnet.

Hier wird der Wärmefluss durch die Oberfläche des Körpers vorgegeben. Speziell für $g \equiv 0$ ist also die Oberfläche perfekt isoliert.

Die Randwertaufgabe (21), (24) heißt zweite Randwertaufgabe oder Neumannsche Randwertaufgabe.

Realistisch ist für das stationäre Wärmeleitungsproblem die Randbedingung

$$a(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \tag{25}$$

mit gegebenen Funktionen $a, b, g : \partial\Omega \to \mathrm{IR}$.

Hierdurch wird z.B. beschrieben, dass der Wärmefluss durch die Oberfläche proportional zur Differenz der Umgebungstemperatur u_0 und der Temperatur des Körpers am Rande von Ω ist:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}u(\boldsymbol{x}) = \alpha(u_0(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x})).$$

(21), (25) heißt dritte Randwertaufgabe oder Robinsche Randwertaufgabe.

Eindeutigkeitsresultate und die stetige Abhängigkeit für elliptische Randwertaufgaben erhält man leicht aus der Inversmonotonie des Differentialoperators L. Es gilt

Satz 1.22: Es sei $\Omega \subset \mathrm{IR}^n$ ein beschränktes Gebiet, und es sei L gleichmäßig elliptisch mit $c \geq 0$. Für die Funktionen $v, w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ seien die Ungleichungen

$$Lv(\boldsymbol{x}) \leq Lw(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{26}$$

$$v(\boldsymbol{x}) \leq w(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{27}$$

erfüllt. Dann gilt

$$v(\boldsymbol{x}) \leq w(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{28}$$

Den Beweis findet man in *Protter, Weinberger*.

Als Spezialfall erhält man

Korollar 1.23 [schwaches Maximumprinzip]
Es seien die Voraussetzungen von Satz 1.22 erfüllt, und es gelte

$$c(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Für $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ gelte

$$Lu(\boldsymbol{x}) \geq 0 \text{ (bzw. } Lu(\boldsymbol{x}) \leq 0) \quad \text{für } \boldsymbol{x} \in \Omega$$

Ist das Minimum von u auf $\bar{\Omega}$ negativ (bzw. das Maximum positiv), so wird es auf dem Rand $\partial\Omega$ angenommen.

Beweis:

Es sei $Lu(\boldsymbol{x}) \geq 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in \Omega$,

$$u_0 := \min_{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega} u(\boldsymbol{x}) < 0$$

und $v(\boldsymbol{x}) := u_0$ für alle $\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}$.

Dann gilt

$$Lv(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x})u_0 \leq 0 \leq Lu(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \Omega$$

und

$$v(\boldsymbol{x}) \leq u(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Daher folgt aus Satz 1.22

$$u_0 \leq u(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega},$$

und die Funktion u nimmt ihr Minimum auf $\partial\Omega$ an.

Das positive Maximum behandelt man im Falle $Lu(\boldsymbol{x}) \leq 0$ genauso.
$\blacksquare$

Bemerkung
Der Beweis zeigt, dass man im Falle $c \equiv 0$ auf die Vorzeichenvoraussetzung für das Extremum verzichten kann. Insbesondere nimmt also eine subharmonische Funktion ihr Maximum und eine superharmonische ihr Minimum auf dem Rand $\partial\Omega$ an, und eine harmonische Funktion nimmt Minimum und Maximum auf $\partial\Omega$ an. $\square$

Korollar 1.25

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und es sei $c(\boldsymbol{x}) \geq 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Dann besitzt die Dirichletsche Randwertaufgabe

$$Lu(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$$

höchstens eine Lösung.

Beweis: Sind $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ zwei Lösungen, so erfüllt $v(\boldsymbol{x}) := u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x})$ die homogene Randwertaufgabe

$$Lv(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad v(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Angenommen v besitzt ein negatives Minimum in Ω, so wird dieses wegen Korollar 1.23 auf dem Rand $\partial\Omega$ angenommen im Widerspruch zu $v \equiv 0$ auf $\partial\Omega$. Genauso führt man die Annahme, dass u ein positives Maximum besitzt zum Widerspruch. ∎

Bemerkung:

Die Voraussetzung, dass Ω beschränkt ist, ist wesentlich, denn für $\Omega := \mathrm{IR} \times (0, 2\pi)$ ist $u(x, y) := e^x \sin y$ eine Lösung der homogenen Randwertaufgabe

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y)^T \in \Omega, \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y)^T \in \partial\Omega.$$

Die Randwertaufgabe ist also nicht eindeutig lösbar. $\square$

Wir untersuchen nun die stetige Abhängigkeit von den Randdaten.

Korollar 1.27: Sei $\Omega \subset \mathrm{I\!R}^n$ offen und beschränkt, L gleichmäßig elliptisch, und es sei $c(\boldsymbol{x}) \geq 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Seien $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $i = 1, 2$, Lösungen der Randwertaufgaben

$$Lu(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u(\boldsymbol{x}) = g_i(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Dann gilt

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}} |u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x})| \leq \max_{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega} |g_1(\boldsymbol{x}) - g_2(\boldsymbol{x})|.$$

Beweis: Mit $v(\boldsymbol{x}) := u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x})$ folgt die Behauptung wegen $Lv(\boldsymbol{x}) = 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in \Omega$ und $v(\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x}) - g_2(\boldsymbol{x})$ für $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ aus Korollar 1.23 ∎

Korollar 1.28: Sei $\Omega \subset \mathrm{IR}^n$ offen und beschränkt, und seien $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $i = 1, 2$, Lösungen der Randwertaufgaben

$$Lu(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u_i(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Dann gilt mit einer von den Funktionen f_i und g unabhängigen Konstante C

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}} |u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x})| \leq C \max_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}} |f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x})|. \tag{29}$$

Beweis:

Es sei $R > 0$ so groß gewählt, dass

$$\Omega \subset \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{I\!R}^n \,:\, \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq R\}.$$

Es sei $|a_{jk}(\boldsymbol{x})| \leq K$, $|b_j(\boldsymbol{x})| \leq K$, $c(\boldsymbol{x}) \leq K$ für alle $\boldsymbol{x} \in \Omega$ und alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Schließlich sei $M > 0$ so gewählt, dass

$$M^2 \alpha_0 - K(M+1) \geq 1$$

gilt mit der Elliptizitätskonstante α_0 aus (22).

Hiermit definieren wir die Funktion

$$w(\boldsymbol{x}) := (e^{2MR} - e^{M(x_1+R)}) \max_{\boldsymbol{x}\in\Omega} |f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x})|$$

und vergleichen diese mit der Lösung $v(\boldsymbol{x}) := u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x})$ der Randwertaufgabe

$$Lv(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x}) \text{ in } \Omega, \quad v(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} Lw(\boldsymbol{x}) &= \Big\{ e^{2MR} \underbrace{c(\boldsymbol{x})}_{\geq 0} + \Big(M^2 \underbrace{a_{11}(\boldsymbol{x})}_{\geq \alpha_0} - M \underbrace{b_1(\boldsymbol{x})}_{\leq K} - \underbrace{c(\boldsymbol{x})}_{\leq K}\Big) e^{M(x_1+R)} \Big\} \|f_1 - f \\ &\geq \underbrace{(M^2\alpha_0 - K(M+1))}_{\geq 1} \underbrace{e^{M(x_1+R)}}_{\geq 1} \|f_1 - f_2\|_\infty \\ &\geq \|f_1 - f_2\|_\infty \geq f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x}) = Lv(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Ferner gilt nach Wahl von R

$$w(\boldsymbol{x}) \geq 0 = v(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Daher folgt aus Satz 1.22

$$\begin{aligned} u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x}) &= v(\boldsymbol{x}) \leq w(\boldsymbol{x}) \leq \max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}} |w(\boldsymbol{x})| \\ &\leq e^{2MR} \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} |f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x})|. \end{aligned}$$

Genauso folgt $-w \leq v$, und damit (29). ∎

Die drei Korollare besagen, dass die Randwertaufgabe

$$Lu(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,$$

für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathrm{I\!R}^n$ fast sachgemäß ist : Es existiert höchstens eine Lösung, und diese hängt (bzgl. der Tschebyscheff Norm) stetig von den Funktionen f und g ab. Zu zeigen bleibt "nur noch" die Existenz der Lösung. Die Existenzfrage ist jedoch für diese Vorlesung zu schwierig. Ohne zu präzisieren, was es bedeutet, dass der Rand $\partial\Omega$ genügend glatt ist und dass die Koeffizientenfunktionen und die rechten Seite f und g hinreichend glatt sind, erwähnen wir, dass unter diesen Voraussetzungen die Existenz einer klassischen Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe (21), (23) gesichert werden kann. Die Präzisierungen und einen Beweis findet man in *Hackbusch*.

Für die zweite und dritte Randwertaufgabe schließen wir einige Bemerkungen an. Wir beschränken uns dabei auf den Laplace Operator.

Die zweite Randwertaufgabe

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = g(x), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{30}$$

ist sicher nicht eindeutig lösbar, denn mit $u(\boldsymbol{x})$ ist auch $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x}) + c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

Bis auf eine solche additive Konstante ist die Lösung eindeutig, denn sind u_1, u_2 Lösungen der Randwertaufgabe (30), so löst $v(\boldsymbol{x}) := u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x})$ die homogene Aufgabe

$$\Delta v(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,$$

und aus der ersten Greenschen Formel (vgl. IM III, Satz 25.73) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\partial\Omega} v(\boldsymbol{x}) \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\, do = \int\limits_{\Omega} \left\{ v(\boldsymbol{x}) \Delta v(\boldsymbol{x}) + \|\nabla v(\boldsymbol{x})\|_2^2 \right\} d\boldsymbol{x} \\ &= \int\limits_{\Omega} \|\nabla v(\boldsymbol{x})\|_2^2\, d\boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

d.h. $\nabla v(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ in Ω, und daher $v(\boldsymbol{x}) \equiv$ const.

Ferner ist die zweite Randwertaufgabe nicht für alle rechten Seiten f und alle Randvorgaben g lösbar.

Wir betrachten zunächst

$$\Delta w(\boldsymbol{x}) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Ist $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ eine Lösung, so gilt nach der ersten Greenschen Formel (mit der Funktion $\phi(\boldsymbol{x}) \equiv 1$)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \phi(\boldsymbol{x}) \Delta w(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \langle \nabla\phi(\boldsymbol{x}), \nabla w(\boldsymbol{x})\rangle\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{x}) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\, do \\ &= \int_{\partial\Omega} h(\boldsymbol{x})\, do. \end{aligned}$$

Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ eine Lösung von

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{31}$$

so wählen wir eine Funktion $v(\boldsymbol{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ mit $\Delta v(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, und hiermit $w(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x}) - v(\boldsymbol{x})$.

Dann gilt $\Delta w(\boldsymbol{x}) = 0$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, und nach dem ersten Teil folgt mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\, do = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\, do - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\, do \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\, do - \int\limits_{\Omega} \Delta v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\, do - \int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Notwendig für die Lösbarkeit von (30) ist also die Bedingung

$$\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\, do.$$

Bemerkung: Die Lösbarkeitsbedingung ist auch physikalisch einsichtig. Beschreibt nämlich die Lösung u von

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,$$

die stationäre Temperaturverteilung in einem Körper Ω, so ist $\int\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ die Wärmeentwicklung in dem Körper und $\int\limits_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\, do$ der Wärmefluss durch den Rand (jeweils pro Zeiteinheit). Eine stationäre Temperaturverteilung kann sich sicher nur dann einstellen, wenn diese beiden Größen übereinstimmen. $\square$

Ähnlich wie für die Neumannsche Randbedingung erhält man Eindeutigkeitsaussagen für die dritte Randwertaufgabe.

Wir betrachten den Fall $b(\boldsymbol{x}) \equiv 1$, $a(\boldsymbol{x}) \geq 0$, $a(\boldsymbol{x}) \not\equiv 0$.

Dann löst die Differenz $v(\boldsymbol{x})$ zweier Lösungen wieder die homogene Aufgabe

$$\Delta v(\boldsymbol{x}) = 0, \quad x \in \Omega, \quad a(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Aus der Greenschen Formel folgt wie eben

$$
\begin{aligned}
0 \;&\leq\; \int_{\Omega} \|\nabla v(\boldsymbol{x})\|_2^2 \, d\boldsymbol{x} \;=\; \int_{\Omega} \left\{ v(\boldsymbol{x}) \Delta v(\boldsymbol{x}) + \|\nabla v(\boldsymbol{x})\|_2^2 \right\} d\boldsymbol{x} \\
&=\; \int_{\partial\Omega} v(\boldsymbol{x}) \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \, do \;=\; -\int_{\partial\Omega} a(\boldsymbol{x}) v^2(\boldsymbol{x}) \, do \leq 0,
\end{aligned}
$$

d.h. $\nabla v(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ in Ω, also $v(\boldsymbol{x}) \equiv$ const, und die Randbedingung

$$
\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) + a(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x}) \cdot \text{const} = 0
$$

liefert wegen $a(\boldsymbol{x}) \not\equiv 0$ schließlich $v(\boldsymbol{x}) \equiv 0$.

Parabolische Pobleme

Für parabolische Differentialgleichungen erhält man Eindeutigkeitsaussagen und die stetige Abhängigkeit der Lösung von Anfangs- und Randwerten wieder aus der Inversmonotonie bzw. einem Maximumprinzip.

Anschaulich besagt das Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung: Bleibt die Temperatur am Rande eines Körpers zu jeder Zeit und im Inneren zum Anfangszeitpunkt unter einem Wert M und sind keine Wärmequellen sondern nur Senken vorhanden, so kann im Inneren des Körpers die Temperatur niemals den Wert M übersteigen.

Satz 1.30

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und L (wie in (21)) ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator mit $c(\boldsymbol{x}) \geq 0$.

Die Funktionen $v, w : \bar{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ seien stetig und in $\Omega \times (0,T)$ zweimal stetig partiell differenzierbar nach den Komponenten von $\boldsymbol{x}$ und einmal stetig partiell differenzierbar nach t. Es gelte

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} v + Lv \leq \frac{\partial}{\partial t} w + Lw \quad & \text{in} \quad \Omega \times (0,T) \\
v \leq w \quad & \text{auf} \quad (\partial\Omega \times (0,T)) \cup (\Omega \times \{0\}).
\end{aligned}
$$

Dann folgt

$$
v(\boldsymbol{x}, t) \leq w(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{für alle } (\boldsymbol{x}, t) \in \bar{\Omega} \times [0,T].
$$

Fast wörtlich wie im elliptischen Fall erhält man als Folgerung ein Maximumprinzip, wobei man wiederum im Falle $c(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ auf die Vorzeichenvoraussetzung für das Maximum verzichten kann:

Korollar 1.31 [Maximumprinzip]

Es seien die Voraussetzungen von Satz 1.30 erfüllt, und es gelte für die Funktion $u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0,T])$ die Ungleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\boldsymbol{x},t) + Lu(\boldsymbol{x},t) \leq 0, \quad \text{für alle } (\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,T).$$

Gilt dann

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}} u(\boldsymbol{x}) > 0,$$

so wird dieses Maximum von u auf der Menge $(\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$ angenommen.

Mit dem Maximumprinzip erhält man (ähnlich wie im elliptischen Fall) die Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösung (wenn sie existiert) von den Anfangs- und Randdaten und der Inhomogenität. Wir formulieren diese Ergebnisse in den folgenden drei Korollaren. Auf die Beweise verzichten wir wegen ihrer sehr großen Ähnlichkeit mit den entsprechenden Aussagen für elliptische Probleme.

Korollar 1.32 [Eindeutigkeit]

Die erste Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(\boldsymbol{x},t) + Lu(\boldsymbol{x},t) &= f(\boldsymbol{x},t) \quad , \quad (\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(\boldsymbol{x},0) &= \phi(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u(\boldsymbol{x},t) &= \psi(\boldsymbol{x},t) \quad , \quad (\boldsymbol{x},t) \in \partial\Omega \times [0,T], \end{aligned}$$

besitzt höchstens eine Lösung.

Korollar 1.33 [Stetige Abhängigkeit von Anfangs- und Randdaten]

Lösen die Funktionen u_i, $i = 1, 2$, die Anfangsrandwertaufgaben

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u_i(\boldsymbol{x}, t) + L u_i(\boldsymbol{x}, t) &= f(\boldsymbol{x}, t) \quad , \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \\
u_i(\boldsymbol{x}, 0) &= \phi_i(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\
u_i(\boldsymbol{x}, t) &= \psi_i(\boldsymbol{x}, t) \quad , \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T],
\end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned}
&\max\{|u_1(\boldsymbol{x}, t) - u_2(\boldsymbol{x}, t)| \,:\, \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega},\, t \in [0, T]\} \\
&\quad \leq \max \left\{ \begin{array}{l} \max\{|\phi_1(\boldsymbol{x}) - \phi_2(\boldsymbol{x})| \,:\, \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}\}, \\ \max\{|\psi_1(\boldsymbol{x}, t) - \psi_2(\boldsymbol{x}, t)| \,:\, (\boldsymbol{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T]\} \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Korollar 1.34 [Stetige Abhängigkeit vom Quellterm]

Es seien u_i, $i = 1, 2$, Lösungen der Anfangsrandwertaufgaben

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u_i(\boldsymbol{x}, t) + L u_i(\boldsymbol{x}, t) &= f_i(\boldsymbol{x}, t) \quad , \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \\
u_i(\boldsymbol{x}, 0) &= \phi(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\
u_i(\boldsymbol{x}, t) &= \psi(\boldsymbol{x}, t) \quad , \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T].
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \max\{|u_1(\boldsymbol{x}, t) - u_2(\boldsymbol{x}, t)| \,:\, \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega},\ t \in [0, T]\} \\
\leq \ & T \cdot \max\{|f_1(\boldsymbol{x}, t) - f_2(\boldsymbol{x}, t)| \,:\, \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega},\ t \in [0, T]\}.
\end{aligned}$$