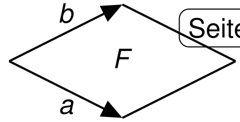
Vorlesung 12
22. bzw. 23. Januar 2014

Determinanten 1

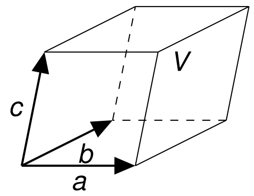
Seite 170

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = F$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V$$

$$V =< a, b \times c >$$



Lineares Gleichungssystem

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b = 0$$

$$< a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b, a^2 \times a^3 >= 0$$

$$< a^1, a^2 \times a^3 > x_1 =< b, a^2 \times a^3 >$$

$$det(a^1, a^2, a^3)x_1 = det < b, a^2, a^3 >$$

Seite 171

Cramersche Regel

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 = b$$

mit

$$det(a^1, a^2, a^3) \neq 0 \Leftrightarrow a^1, a^2, a^3 \text{ l. u.}$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{det \quad (b, a^2, a^3)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

$$x_2 = \frac{det \quad (a^1, b, a^3)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

$$x_3 = \frac{det \quad (a^1, a^2, b)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

Wenn Determinante verallgemeinert $\Rightarrow$ Cramersche Regel verallgemeinert.

Aber!!!

Wende Cramer nur für kleine Dimension und bei dringender Notwendigkeit (Die gibt es so gut wie nie) an.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_i = x_i(a).$$

Überhaupt

Man schätze die Bedeutung der Determinanten in der linearen Algebra nicht zu hoch ein.

Sie sind nur später wichtiges Hilfsmittel in der Analysis.

Seite 171

Vereinbarung

Zu $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $i,j \in \{1,\cdots,n\}$
Sei

$$A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1,n-1)}$$

die Matrix, die durch Streichen der $i-ten$ Zeile und $j-ten$ Spalte aus A entsteht.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Definition 5.2 (Rekursiv)

$$n = 1 : A = (a_{11}) \Rightarrow det\ A = a_{11}$$

$$n > 1 : \ det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, det\ A_{1j}$$

$det\ A :=$ Determinante

Andere Schreibweise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Seite 172

$$n = 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$n = 3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$+a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Seite 172

Für $n = 2, 3$ spezielle Merkregel (Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right] \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

blaue Produkte addieren, rote Produkte subtrahieren.

Achtung!
Für $n \geq 4$ FALSCH.

Aber wie komme ich an die Determinante für $n \geq 4$?

Effiziente Berechnung von Determinanten mit dem Gaussalgorithmus.

Dafür müssen wir aber noch einige Eigenschaften der Determinanten näher kennenlernen
(auch für später, in der Analysis, nützlich).

Seite 173

Satz 5.4

$n \geq 2$; $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$
$B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ergibt sich aus A durch Vertauschung zweier Zeilen

$$\Rightarrow \; det\, B = -\, det\, A$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann $det\, B = -\, det\, A$

Beweis zu Satz 1 ist etwas länglich. Deshalb:

Beweisskizze

- Beweis ist induktiv
- 2 Fälle unterscheiden

1. Vertausche benachbarte Zeilen
   a) Nicht die ersten beiden Zeilen tauschen
   b) Vertausche Zeile 1 mit Zeile 2
2. Vertausche beliebige Zeilen.

Beweis zu Satz 5.4

„*det*“ ist induktiv definiert. Beweis muss induktiv sein: Induktion über $n \geq 2$.

Induktionsverankerung: $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$det\ A = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21};\ det\ B = a_{21}\,a_{12} - a_{22}\,a_{11}$$

$$\Rightarrow det\ B = \ -det\ A \qquad (n = 2).$$

Sei Behauptung bewiesen für *det* von $(n-1, n-1)-$ Matrizen $(n \geq 3)$

Induktionsschluß: $n - 1 \longrightarrow n$

Wir betrachten nacheinander 2 Fälle
- Vertauschung benachbarter Zeilen $i \leftrightarrow i + 1$
- Vertauschung beliebiger Zeilen $i \leftrightarrow j$

Fall 1: Vertauschung benachbarter Zeilen $i \leftrightarrow i + 1$

Definiton von „*det*“ hängt an der ersten Zeile

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j}\ det\ A_{1j}$$

$\Rightarrow$ noch unterscheiden

$$i \geq 2 \text{ und } i = 1$$

zu $i \geq 2$:
„Zeile 1“ von A = „Zeile 1“ von B
d.h. $a_{1j} = b_{1j} \quad \forall_j = 1, 2, \cdots, n$

Induktionsannahme sagt

$$det\ B_{1j} = \ -\ det\ A_{1j} \quad \forall_j = 1, 2, \cdots, n$$

$(n-1, n-1)-$ Matrix mit zwei vertauschten Zeilen

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\ B &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, b_{1j}\ det\ B_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}(-det\ A_{1j}) = \ -det\ A \end{aligned}$$

zu $\underline{i=1}$: (etwas schwieriger)
Vertauschen der ersten und zweiten Zeile

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \Rightarrow A_{1j}=\begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n}\\ a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \Rightarrow B_{1k}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{31} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$A_{1j} \widehat{=}$ Streiche in A Zeile 1 und Spalte j

$B_{1k} \widehat{=}$ Streiche in A Zeile 2 und Spalte $k \widehat{=} A_{2k}$

Nun zur „*det*“ -Berechnung

$$det\ A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\,a_{1j}\,det\ A_{1j}$$

mit

$$det\ A_{1j}=\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{1+k}\,a_{2k}\,det\ A_{1j,2k}+\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{k}\,a_{2k}\,det\ A_{1j,2k}$$

$$det\ B=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}\,a_{2k}\,det\ B_{1k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}\,a_{2k}\,det\ A_{2k}$$

mit

$$det\ A_{2k}=\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{1+j}\,a_{1j}\,det\ A_{2k,1j}+\sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{j}\,a_{1j}\,det\ A_{2k,1j}$$

$A_{1j,2k} \widehat{=}$ Streiche in A Zeile 1 und Spalte j und streiche Zeile 2 und Spalte $k \widehat{=} A_{2k,1j}$

$$\Rightarrow\ det\ A_{1j,2k}=det\ A_{2k,1j}$$

det A besteht aus den Summanden

$$(-1)^{1+j}\,(-1)^{1+k}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\ A_{1j,2k};\ 1\le k<j\le n$$

$$(-1)^{1+j}\,(-1)^{k}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\ A_{1j,2k};\ 1\le j<k\le n$$

det B besteht aus den Summanden

$$(-1)^{1+k}\,(-1)^{1+j}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\ A_{1j,2k};\ 1\le j<k\le n$$

$$(-1)^{1+k}\,(-1)^{j}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\ A_{1j,2k};\ 1\le k<j\le n$$

$$\Rightarrow det\ B=\ -\ det\ A$$

<u>Zwischenbilanz:</u> Bisher bewiesen Vertauschen <u>benachbarter</u> Zeilen ändert Vorzeichen der „*det*“.

<u>Fall 2:</u> Vertauschung beliebiger Zahlen $i \leftrightarrow j$

$$A=\begin{pmatrix} 1-\text{te Zeile}\\ \vdots\\ i-\text{te Zeile}\\ \vdots\\ j-\text{te Zeile}\\ \vdots\\ n-\text{te Zeile}\end{pmatrix}\ (i<j)$$

$j-i-1$ mal tausche $i-te$ Zeile mit unterem Nachbar
$\Rightarrow i-te$ Zeile steht an Position $j-1$

1 weiterer Tausch
$\Rightarrow i-te$ Zeile steht an Position j
$j-te$ Zeile steht an Position $j-1$
$j-i-1$ mal tausche $j-te$ Zeile mit oberem Nachbar.

Insgesamt
mit $(j-i-1)+1+(j-i-1) = 2\cdot(j-i-1)+1$ Vertauschungen

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathit{det}\, B &= (-1)^{2\cdot(j-i-1)+1}\, \mathit{det}\, A \\ &= -\,\mathit{det}\, A \quad \square\end{aligned}$$

Zusammenfassend

Vertauschen zweier beliebiger Zeilen ändert das Vorzeichen der „*det*“.

Seite 174

Satz 5.5 von Laplace

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

$$\forall\, i \in \{1,\cdots,n\}: \; \mathit{det}\, A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, \mathit{det}\, A_{ij}$$

Seite 174

Definition 5.6 „Entwicklung von *det A* nach *i − ter* Zeile „

$\mathit{det}\, A_{ij}$	„Minor zu a_{ij}“
$(-1)^{i+j}\, \mathit{det}\, A_{ij}$	„Kofaktor zu a_{ij}“ oder „algebraisches Komplement“ oder „Adjunkte“

$$A_{ij} = \left(\begin{array}{cc|c|cc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \leftarrow i-te \text{ Zeile in } A$$

$\uparrow j - te$ Spalte in A.

Beweis zu Satz 5.5

Durch mehrfaches Anwenden von Satz 5.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ vertauschen}$$

Nach $i-1$ Vertauschungen der $i-ten$ Zeile mit der jeweils darüberliegenden Zeile

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Satz 1} \Rightarrow \; \det B = (-1)^{i-1} \det A$$

oder

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{i-1} \cdot \det B \\ &= (-1)^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, b_{1j} \det B_{1j} \\ &= (-1)^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{ij} \det A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij} \quad \square \end{aligned}$$

Was soll das nun?

Definition von $\det A \,\hat{=}$ „Entwicklung nach $1-$ *ter* Zeile“

Entwicklungssatz von Laplace (Satz 2) $\hat{=}$ „Es ist egal, nach welcher Zeile man $\det A$ entwickelt.“

„Egal“ bedeutet für uns dann natürlich, eine möglichst „einfache“ Zeile zu wählen.

„Einfach“ $\hat{=}$ viele 0-en in der Zeile

Gilt für Rechnungen zu Fuß

Computer: Gauss-Algorithmus.

Beispiel

Berechne $\det A$ von

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Entwickel nach letzter Zeile

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot \det A_{41} + 0 \cdot \det A_{42} + 0 \cdot \det A_{43} + 11 \cdot \det A_{44} \\ &= 11 \cdot \det \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \text{ die ist „einfach“} \\ &= 11 \cdot \left[0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \right] \\ &= 11 \cdot 9 \cdot (1 \cdot 6 - 2 \cdot 5) = 99 \cdot (-4) = -396 \end{aligned}$$

Entwickeln nach $1.-$ *ter* Zeile = viel mehr Arbeit = mehr Möglichkeiten, sich zu verrechnen.

Seite 176

Leichte Folgerung aus Satz 5.4 und Satz 5.5

Satz 5.9

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ besitzt zwei identische Zeilen

$$\Rightarrow \det A = 0$$

Beweis

$$\text{a) Zeile } i = \text{ Zeile } j \quad (i \neq j)$$

Vertausche $i-$ *te* Zeile mit $j-$ *ter* Zeile; nenne die neue Matrix B.

$$\begin{aligned} \text{Satz 1} \quad &\Rightarrow \quad \det B = -\det A \\ \text{aus a)} \quad &\Rightarrow \quad B = A \Rightarrow \det B = \det A \end{aligned}$$

Also

$$\det A = -\det A$$

$$\Rightarrow \det A = 0 \quad \square$$

Satz 5.8

(i) $det(\cdot)$ ist linear in jeder Zeile

$$det \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ \lambda a_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} = \lambda\, det \begin{pmatrix} a_2^T \\ \vdots \\ a_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix},$$

$$det \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ b_i^T + c_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ b_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ c_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$$

(ii) $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann
$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n\, det(A)$

Beweis durch Entwickeln.

Satz 5.10

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \lambda \in \mathbb{R}$;
$B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ergebe sich aus A durch Addition von $\lambda\cdot$ Zeile k auf Zeile i (mit $i \neq k$)

$$\Rightarrow det\, B = det\, A$$

Beweis

$$A = (a_{ij})ij = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} + \lambda a_{k1} & \cdots & a_{ij} + \lambda a_{kj} & \cdots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \swarrow$$

Nach dieser Zeile entwickeln!

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\, B &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot (a_{ij} + \lambda a_{kj}) det\, A_{ij} \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\, A_{ij}}_{det\, A} + \lambda \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{kj} \cdot det\, A_{ij}}_{\lambda \cdot det\, C} \end{aligned}$$

Worin

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Zwei gleiche Zeilen $\Rightarrow det\, C = 0$

$$\Rightarrow det\, B = det\, A \quad \square$$

Satz 5.10 erinnert schon an Gauss-Algorithmus für Determinantenberechnung:

- Eliminationsschritt ändert *det* nicht!
- Zeilenvertauschung (Pivotsuche) ändert Vorzeichen der *det*!

Gauss-Algorithmus
$\longrightarrow$ Dreiecksmatrix

det dafür einfach:

Seite 177

Satz 5.12

$$(a_{ij})ij = 1, \cdots, n = A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

untere oder obere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow det\ A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Beweis

A obere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow A = \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} det\ A &= a_{nn} \cdot det \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{array}\right) \\ &= a_{nn} \cdot a_{n-1,n-1} \cdot det \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1,n-2} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{n-2,n-2} \end{array}\right) \\ &\ \vdots \\ &= a_{nn} \cdot a_{n-1,n-1} \cdot a_{n-2,n-2} \cdot \cdots \cdot a_{22} \cdot det(a_{11}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned}$$

A untere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Jeweils nach oberster Zeile entwickeln

$$\Rightarrow \quad det\ A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad \square$$

Einfaches Beispiel

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dann

$$det\ E_n = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Seite 177

Alles bereit für “*det*“-Berechnung mit Gauss-Algorithmus:

- Führe Eliminationsschritte durch
- Merke die Zeilenvertauschungen (bei Pivotsuche) in einem Zähler „i“.

Bricht Elimination vorzeitig ab (d.h. kein Pivotelement $\neq 0$ in Spalte; es entsteht eine Nullzeile).

$$\Rightarrow det\ A = 0$$

Sonst (d.h. $A \longrightarrow R$)

$$\begin{aligned} det\ A &= (-1)^i \cdot det\ R \\ &= (-1)^i \cdot \prod_{j=1}^{n} r_{jj} \end{aligned}$$

$i \hat{=}$Anzahl Zeilenvertauschungen

Beispiel

Berechne $det\ A$ von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{array} \quad \text{(Eliminationsschritt)} \quad \text{Zähler } i = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen} \quad \text{Zähler } i = 1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = R$$

$$det\ R = 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (-4) = -24$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\ A &= (-1)^{i=1} det\ R \\ &= -(-24) = 24 \end{aligned}$$

Jetzt kennengelernt „*det*“-Berechnung über
Gauss-Algorithmus
oder
Entwicklungs-Satz.

Wie denn nun?

Grob überschlagen, wieviel man jeweils rechnen muss:
Multiplikationen/Divisionen

Seite 178

Rechenaufwand für Entwicklungssatz

Behauptung:

$$RA_E(n) \geq n! \text{ Für } n \geq 2$$

$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n)$

Beweis: Induktion

$n = 2:$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \Rightarrow RA_E(2) = 2 \geq 2!$$

$n - 1 \rightarrow n:$

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \underbrace{detA_{ij}}_{RA_E(n-1) \geq (n-1)!} \Rightarrow RA_E(n) \geq n \cdot (n-1)! + n = n! + n \geq n!$$

Rechenaufwand für Gauss-Algorithmus

Elimination unterhalb $i-ter$ Zeile:

Für jede Zeile darunter:

a) Berechne Eliminationsfaktor $\Rightarrow$ 1 Mult./Div.
b) Multipliziere damit die $i-te$ Zeile $\Rightarrow$ $n-i$ Mult.
c) Eliminiere (keine Mult./Div.)
zusammen: $n-i+1$ Mult./Div.

Aufwand für Elimination unterhalb $i-ter$ Zeile

$$(n-i)\cdot(n-i+1) = (n-i)^2 + (n-i) \text{ Multipikationen}$$

Gesamtaufwand für Eliminationsprozeß:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left\{(n-i)^2+(n-i)\right\} \qquad \text{„rückwärts zählen“}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\{i^2+i\} \qquad \text{„vorwärts zählen „}$$

$$= \cdots = \frac{1}{3}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n+1) \approx \frac{n^3}{3} \text{ Multipikationen}$$

$$det\ R = \prod_{i=1}^{n} r_{ii} \Rightarrow n-1 \text{ Multipikationen}$$

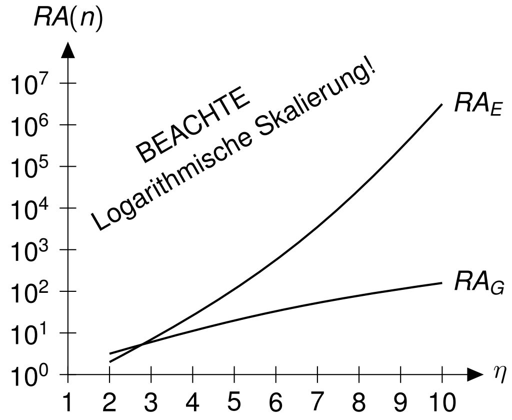
Also

Gauss-Algorithmus für det:

$$RA_G(n) = \frac{1}{3}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n+1)+(n-1)$$

Entwicklungssatz für det:

$$RA_E(n) \geq n!$$



n	$RA_E(n)$	$RA_G(n)$
2	2	3
3	6	10
4	24	23
5	120	44
6	720	75
7	5040	118
8	40320	175
9	362880	248
10	3628800	339

Sätzchen

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ besitzt eine Nullzeile

$$\Rightarrow det\ A = 0$$

Beweischen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{entwickeln (sei i-te Zeile)}$$

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot 0 \cdot det\ A_{ij} = 0 \quad \square$$

Nochmal Gauss-Algorithmus

A singuläre Matrix

$\Rightarrow$ Eliminationsprozeß produziert eine Nullzeile

$$\Rightarrow det\ A = 0$$

A reguläre Matrix

$\Rightarrow$ Eliminationsprozeß bildet R mit $r_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$

$$\Rightarrow det\ A \neq 0$$

$(det\ A = (-1)^i \prod_{i=1}^{n} r_{ii} \neq 0)$

Seite 178

Satz 5.14

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

$$A \text{ regulär} \Leftrightarrow det\ A \neq 0$$

Seite 179

Kleine Anwendung 5.16

$a = (a_1, a_2, a_3)^T,\ b = (b_1, b_2, b_3)^T,\ c = (c_1, c_2, c_3)^T$
Ortsvektoren von Punkten
$\rightarrow a, b, c$ nicht kollinear $\rightarrow a, b, c$ legen Ebene fest.

<u>Ebenengleichung einfach:</u>

$$det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Entwicklung nach 1. Zeile zeigt

$$det() = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot |\cdot| + x_2 \cdot |\cdot| + x_3 \cdot |\cdot| + 1 \cdot |\cdot| = 0$$

ACHTUNG!
Wenn a, b, c auf einer Geraden liegen

$$det() = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 0$$

Ende der Vorlesung 12

Vorlesung 13
39. bzw. 30. Januar 2014

Determinanten 2

Seite 180

Satz 5.18

$A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$$\Rightarrow det(A \cdot B) = det\, A \cdot det\, B$$

Beweis

Einige Vorüberlegungen

1.

$$det \left[\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & -l_{n+1,i} & & & & \\ & & \vdots & 1 & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ & & -l_{n,i} & & & & 1 \end{pmatrix} A \right] = det\, A$$

2. $A \to R = M_{n-1} \cdots M_1 \; P \; A$

$$det(A) = (-1)^v det\ R$$

$$det(A \cdot B) = (-1)^v det\ RB$$

3.

$$det\left(\begin{pmatrix} 1 & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & f_{n-2,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} B\right) = det\ B$$

weil
1. Zeile $= B^1 + \sum_{j=2}^{n} f_{1j}\, B^j$
2. Zeile $= B^2 + \sum_{j=0}^{n} f_{2j}\, B^j$

4.

$$det(diag(d_1, \cdots, d_n) \cdot B) = \prod_{i=1}^{n} d_i\ det\ B$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & B^1 \\ d_2 & B^2 \\ d_n & B^n \end{pmatrix}$$

Und damit ist der Beweis zack-zack erledigt:

$$det(AB) \overset{2}{=} (-1)^v det(RB) =$$

$$= (-1)^v det\left(diag(r_{11} \cdots r_{nn}) \begin{pmatrix} 1 & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & f_{n-2,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} B \right)$$

$$\overset{4}{=} \underbrace{(-1)^v \prod_{i=1}^{n} r_{ii}}_{=(-1)^v det\ R}\ \underbrace{det\left(\begin{pmatrix} 1 & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & f_{n-2,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} B\right)}_{\overset{3}{det(B)}} = det(A)det(B)\square$$

Seite 181

Leichte Folgerung

Korollar 5.19
$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär

$$\Rightarrow det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A} = (det\ A)^{-1}$$

Beweis (einfach)

$$det\ E_n = det \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= det\ E_n = det(A^{-1} \cdot A) \\ &= detA^{-1} \cdot det\ A \end{aligned}$$

$$A \text{ regulär } \Rightarrow det\ A \neq 0$$

Also

$$det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \quad \square$$

Seite 181

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad det\ A = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad det\ B = -2$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad det(A \cdot B) = -10 = 5 \cdot (-2) = det\ A \cdot det\ B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad detA^{-1} = (\frac{1}{5})^2 \cdot 5 = \frac{1}{5} = \frac{1}{det\ A}$$

Seite 182

Noch ein Beispiel: Permutationsmatrizen

$P \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ Permutationsmatrix

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} e_{i1}^T \\ e_{i2}^T \\ \vdots \\ e_{in}^T \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} (i_1, i_2, \cdots, i_n) \\ \text{Permutation von} \\ (1, 2, \cdots, n) \end{array} \right\}$$

P entsteht aus $E_n = \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix}$

durch $k-$faches Vertauschen von Zeilen

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\ P &= (-1)^k \overbrace{det\ E_n}^{=1} \\ &= (-1)^k = \begin{cases} +1 \\ oder \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

P ist orthogonale Matrix: $P \cdot P^T = E_n$

$$\Rightarrow 1 = det\ E_n = det(P \cdot P^T) = det\ P \cdot det\ P^T$$

Also

$$1 = (-1)^k \cdot det\ P^T$$

$$\Rightarrow det\ P^T = (-1)^k = det\ P$$

Merken für später!!!

Seite 181

Bisher nur ZEILEN manipuliert und daraus Regeln für „*det*“ hergeleitet.

Alles bleibt auch gültig für SPALTEN-Manipulationen, denn

Satz 5.21

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$$\Rightarrow det\ A = det\ A^T$$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$A^T = ((A^1)^T, \cdots, (A^n)^T) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

Beweis zu Satz 5.20

1. Fall:

A singulär $\Rightarrow A^T$ singulär

Dann

$$det\ A = 0 = det\ A^T$$

2. Fall:

A regulär $\Rightarrow \exists\ P \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ Permutationsmatrix

$$P \cdot A = L \cdot R$$

L, R Dreiecksmatrizen

$$\Rightarrow det\ L = det\ L^T, \quad det\ R = det\ R^T$$

Jetzt rechnen

$$\begin{aligned} det\ P \cdot det\ A &= det(P \cdot A) = det(L \cdot R) \\ &= det\ L \cdot det\ R = det\ L^T \cdot det\ R^T \\ &= det\ R^T \cdot det\ L^T = det(R^T\ L^T) \\ &= det((L \cdot R)^T) = det((P \cdot A)^T) \\ &= det\ A^T \cdot det\ P^T \end{aligned}$$

Wir haben

$$det\ P \cdot det\ A = det\ A^T \cdot det\ P^T$$

Wir wissen aber schon

$$det\ P = det\ P^T$$

$$\Rightarrow det\ A = det\ A^T \quad \square$$

Alle Aussagen über “*det*“, die sich auf ZEILEN beziehen, gelten auch für SPALTEN.

Und das bedeutet ...

$$A = (a_{ij})_{ij=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Vertauschungen

Vertauschen zweier $\begin{Bmatrix} \text{SPALTEN} \\ \text{ZEILEN} \end{Bmatrix}$

Ändert das Vorzeichen von *det A*.

Entwicklungssatz von Laplace

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\ A_{ij}$$

Entwicklung nach $j - ter$ Spalte.

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\ A_{ij}$$

Entwicklung nach $i - ter$ Zeile.

Additionen

Addition des Vielfachen einer $\begin{Bmatrix} \text{SPALTEN} \\ \text{ZEILEN} \end{Bmatrix}$

zu einer Anderen $\begin{Bmatrix} \text{SPALTEN} \\ \text{ZEILEN} \end{Bmatrix}$ ändert die *det A* nicht.

Multiplikationen

Multiplizieren einer $\begin{Bmatrix} \text{SPALTEN} \\ \text{ZEILEN} \end{Bmatrix}$ mit dem Faktor

$\lambda \in \mathbb{R}$ liefert $B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit $det\ B = \lambda \cdot det\ A$

Bemerkung

Nimmt man noch folgende Eigenschaften dazu

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \tilde{a}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_n^T \end{pmatrix}$$

$$det(a_1, \cdots, a_i + b, \cdots, a_n) = det(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + det(a_1, \cdots, b, \cdots, a_n)$$

$$det \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_i^T + \tilde{b}^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_n^T \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_i^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_n^T \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{b}^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_n^T \end{pmatrix}$$

so sieht man, dass $det : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R}$ multilineare Abbildung ist.

$$det\ E_n = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

und der Vorzeichenwechsel bei Zeilentausch legen det als alternierende, normierte, multilineare Abbildung fest.

Kurze Wiederholung

$$det : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R}$$

Definition: Rekursiv

$$det(a_{11}) = a_{11}$$

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, n \geq 2$$

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\ det\ A_{1j}$$

Berechnung:

$n = 2, 3$: Sarrusche Regel.

$n \geq 2$ allgemein

- Entwicklung nach beliebiger Zeile
- Entwicklung nach beliebiger Spalte
- Gauss-Algorithmus

  $A \xrightarrow{\text{singulär}} \mathit{det}\ A = 0$

  $\downarrow$ regulär

  $PA = L \cdot R$

  $\underbrace{\mathit{det}\ P}_{(-1)^{\text{Anzahl Zeilentausche}}} \cdot \mathit{det}\ A = \mathit{det}\ L \cdot \mathit{det}\ R \cdot \mathit{det}\ A = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$

$$\Rightarrow \mathit{det}\ A = (-1)^{\text{Anzahl Zeilentausche}} \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$$

Rechenregeln

- Vertauschen zweier $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILEN}\\ \text{SPALTEN}\end{matrix}\right\}$ ändert das Vorzeichen . (um -1)
- Addition eines Vielfachen einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ zu einer anderen $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ ändert *det A* nicht.
- Multiplikation einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert *det A* mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\mathit{det}(A \cdot B) = \mathit{det}(A) \cdot \mathit{det}(B)$
- $\mathit{det}(A^{-1}) = (\mathit{det}(A))^{-1}$
- $\mathit{det}\ A^T = \mathit{det}\ A$

Hiermit kann man noch eine Menge von Rechenregeln herleiten.
(Zur Anwendung in den nächsten Übungen) nur einige Beispiele:

Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ Blockdreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{kk} \end{pmatrix}$$

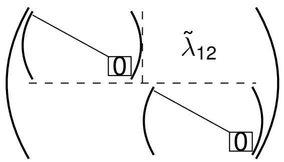
mit $A_{ii} \in \mathbb{R}^{(n_i,n_i)}$, so ist

$$\mathit{det}\ A = \prod_{i=1}^{k} \mathit{det}\ A_{ii}$$

Beweis: Nur für $k = 2$ notwendig. (Warum?)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauss 2. Zeilen}]{\text{Gauss 1. Zeilen}} \begin{pmatrix} R_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix} \text{ wenn } A_{11}, A_{22} \text{ regulär}$$

wenn A_{11} singulär $\searrow$



wenn A_{22} singulär $\nearrow$

Determinante bleibt erhalten

$$\Rightarrow \mathit{det}\ A = \mathit{det}\ R_{11} \cdot \mathit{det}\ R_{22} = \mathit{det}\ A_{11} \cdot \mathit{det}\ A_{22} \quad \square$$

Seite 183

Definition 5.22

Seien $t_1, \cdots, t_{n+1} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ Dann heißt

$$B := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

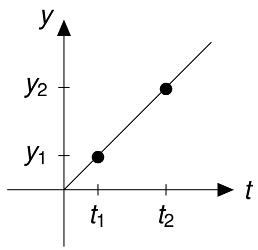
Vandermondesche Matrix und *det B* Vandermondesche Determinante (zu $t_1, \cdots, t_{n+1}$)

Wozu die gut ist ?
z.B. zum Interpolieren!

Was das ist ? $\rightarrow$

Durch zwei Datenpunkte geht genau eine Gerade.

Ansatz:
$y(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1$
$y(t_1) = a_0 t_1^0 + a_1 t_1 \stackrel{!}{=} y_1$
$y(t_2) = a_0 t_2^0 + a_1 t_2 \stackrel{!}{=} y_2$



Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Vandermonde (t_1, t_2)

Ansatz:
$y(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n$
$(n+1)$ Unbekannte $\underset{\text{legen fest}}{\longleftarrow}$ $(n+1)$ Bedingungen $y(t_i) = y_i$

$$\begin{pmatrix} t_1^0 & t_1^1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ t_{n+1}^0 & t_{n+1}^1 & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ Vandermonde System

Seite 183

Lemma 5.23

$$det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i)$$

Lesehilfe

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} (t_2 - t_1) & (t_3 - t_1) & (t_4 - t_1) \\ \uparrow & (t_3 - t_2) & (t_4 - t_2) \\ | & \uparrow & (t_4 - t_3) \\ | & | & \uparrow \\ i = 1 & i = 2 & i = 3 \end{matrix}$$

Folgerung

$$det \text{ Vandermonde } (t_1, \cdots, t_{n+1}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$t_i \neq t_j,\ i \neq j$$

Beweis von Lemma 5.23 (Induktion)

$$n = 1 : \quad det \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} = (t_2 - t_1)$$

Sei Aussage für n-reihige Determinanten richtig. Dann:

$$det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & t_2^2 - t_2 t_1 & \cdots & t_2^{n-1} - t_1 t_2^{n-2} & t_2^n - t_1 t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} - t_1 & t_{n+1}^2 - t_{n+1} t_1 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} - t_1 t_{n+1}^{n-2} & t_{n+1}^n - t_1 t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} t_2 - t_1 & (t_2 - t_1) t_2 & \cdots & (t_2 - t_1) t_2^{n-2} & (t_2 - t_1) t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ t_{n+1} - t_1 & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1} & \cdots & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1}^{n-2} & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n+1} (t_j - t_1) \left(det \begin{pmatrix} 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1} \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_1) \right) \square$$

Seite 184

Korollar

Zu jedem Datensatz

t_1	t_2	$\cdots$	t_{n+1}
y_1	y_2	$\cdots$	y_{n+1}

mit $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$ gibt es genau ein Polynom
$p \in \Pi_n \quad (p(t) = a_0 + a_1 t + \cdot + a_n t^n)$ mit $p(t_i) = y_i, i = 1, \cdots, n+1$

- Hinweis: Es muss p nicht unbedingt den Grad n haben. p hat höchstens diesen Grad
  $y_i = 1 \quad i = 1, \cdots, n+1$
  $\Rightarrow p(t) \equiv 1 \quad$ Grad 0
  $\left.\begin{array}{l} y_i = 0, i = 1, \cdots, n+1 \\ \Rightarrow p(t) \equiv 0 \quad \forall t \end{array}\right\} \Rightarrow$

Korollar 5.24

Ein Polynom $p(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i\, t^i$ hat höchstens n Nullstellen, oder $\alpha_i = 0, i = 0, \cdots, n$

Seite 184

Beweislein

Annahme p hat die $(n+1)$ Nullstellen $t_1, \cdots, t_{n+1}$. Dann ist

$$p(t_i) = 0 \quad i = 1, \cdots, n+1$$

also

$$p \equiv 0, \text{ d.h. } \alpha_i = 0, i = 0, \cdots, n. \quad \square$$

Korollar 5.25

Stimmen zwei Polynome $p_1, p_2 \in \Pi_n$ in mindestens $n+1$ Punkten $t_1 < t_2 \cdots < t_{n+1}$ überein, so ist $p_1 = p_2$.

Beweislein:

$p := p_1 - p_2$ Dann $p \in \Pi_n$ und $p(t_1) = p(t_2) \cdots = p(t_{n+1}) = 0$,
also $p \equiv 0$, also $p_1 = p_2 \quad \square$

Hinweis

Man berechnet die Koeffizienten $a_o, \cdots, a_n$ des Polynoms
$p(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \in \Pi_n$ mit
$p(t_i) = y_i, i = 1, \cdots, n+1$
Um Gottes Willen NICHT
aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Das ist

1. Rechenzeitaufwendig
2. Numerisch instabil
3. Geht es besser!

Es folgen

- eine explizite Angabe der Inversen einer regulären Matrix
- eine explizite Lösungsformel für reguläre Gleichungssysteme (Cramersche Regel)

Beide Formeln benutzt man praktisch nur bis $n = 3$ und sonst nur für

THEORETISCHE ZWECKE!
Praktisch viel zu TEUER!

Seite 185

Zu $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär definiere
$B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ durch

$$b_{ij} := (-1)^{i+j} det\, A_{ji} / det\, A$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$det\, A \cdot B = \begin{pmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}| \\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}| \end{pmatrix}$$

Seite 185

Satz 5.27

Behauptung: $B = A^{-1}$

Beweis von $B^{-1} = A$?

Einfach $A \cdot B = E$ finden:

Sei $C = A \cdot B$ Dann

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \\ &= (\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{ik}\, det\, A_{jk}) / det\, A \\ &= \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

□

Seite 186

$Ax = b, A$ regulär
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= A^{-1} b \\ x_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(-1)}\, b_j = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, b_j\, det\, A_{ji} / det\, A \\ &= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, b_j\, det\, A_{ji} \right)}_{det\, B_i} / det\, A \end{aligned}$$

$B_i \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ entsteht aus A durch Ersetzen der $i - ten$ Spalte von A durch b.

Satz 5.29: Cramersche Regel

$$Ax = b \Rightarrow x_i = \frac{det\, B_i}{det\, A}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{+3}{-1} = -3$$

Eine weitere Darstellung der Determinante

Interessant für theoretische Zwecke. Erhält man durch Einsetzen von

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{xj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e^i$$

in

$$det\ A = det(a^1, a^2, \cdots, a^n) \qquad \forall_i$$

Endresultat:
Sei S_n die Menge aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$. Dann

$$det\ A = \sum_{(i_1, \cdots, i_n) \in S_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} \cdot \underbrace{det(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n})}_{\in \{+1, -1\}}$$

Definition

Permutation $(i_1, \cdots, i_n)$ ist gerade falls $(i_1, \cdots, i_n) \longrightarrow (1, \cdots, n)$ mit gerader Anzahl von Vertauschungen, sonst ungerade.

$$sign(i_1, \cdots, i_n) = \begin{cases} 1 & (i_1, \cdots, i_n) \text{ gerade} \\ -1 & (i_1, \cdots, i_n) \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$det\ A = \sum_{(i_1, \cdots, i_n) \in S_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} \cdot sign(i_1, \cdots, i_n)$$

Man wird mit dieser Regel Determinanten nur zur Strafe berechnen (lassen).

Berechnen Sie einmal die Komplexität dieser Formel.

Ende des WS 2013/2014