Vorlesung 8
11. bzw. 12. Dezember 2013

Matrixdarstellungen
linearer Abbildungen

Seite 120

MATRIZEN

Sylvester [1850], Caley [1858]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m,n)} \text{ oder } \mathbb{C}^{(m\times n)}$$

heißt (m, n) - Matrix ($m \times n$ - Matrix).

Elemente

$$a_{ij}$$

Zeilenindex Spaltenindex

$m = n \Leftrightarrow$ quadratische Matrix.

Seite 120

Schreibweisen

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$$

$$A = (a^1, \cdots, a^n), \qquad a^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, \qquad A^i := (a_{i1}, \cdots, a_{in})$$

Seite 121

Auch Vektoren sind als Matrizen interpretierbar.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ ist } (m, 1)\text{- Matrix.}$$

Konvention (praktische)

Schreibe (Orts) - Vektoren immer als Spaltvektoren!!

$A^i := (a_{i1}, \cdots, a_{in})$ wird manchmal als Zeilenvektor bezeichnet.

Bitte nicht verwirren lassen!

Wenn dieser Zeilen"vektor" wirklich als „Vektor" des $\mathbb{R}^n$ benutzt werden soll, verstehe unter Zeilenvektor

$$n^i := (A^i)^T$$

Erklärung:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}^T := (C_1, \cdots, C_n)$$

$$(C_1, \cdots, C_n)^T := \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

„Transposition"

(macht Zeilen zu Spalten und umgekehrt)

Vektorraum der (m, n) - Matrizen

Seite 122

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$$
$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{(m,n)}$ isomorph zu $\mathbb{R}^{(m \times n)}$

$$dim\, \mathbb{R}^{(m,n)} = m \cdot n$$

Seite 122

Matrizen dienen zur Beschreibung linearer Abbildungen zwischen endlich - dimensionalen Vektorräumen.

Definition 4.1 Lineare Abbildung

V, W Vektorräume. Dann
$T : V \to W$ linear, wenn

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall\, x, y \in V$$

$$T(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall\, x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$$

Linearität ist wie der „Preis" beim Einkaufen

$$\text{Preis} \begin{pmatrix} \text{3 Pakete Butter} \\ \text{4 Kg Mehl} \\ \text{3l Milch} \\ \text{1 1/2 Kg Braten} \end{pmatrix} = \begin{matrix} 3* \text{ Preis (1 Pak. Butter)} \\ +4* \text{ Preis (1 Kg Mehl)} \\ +3* \text{ Preis (1l Milch)} \\ +1.5* \text{ Preis (1 Kg Braten)} \end{matrix}$$

Sonderangebote

1 Kg Senf 5 Euro 10 Kg Senf 40 Euro

sind nichtlinear

Beispiele (pro)

1. Drehungen: Ebene um Nullpunkt. Oder: $\mathbb{R}^3$ um Achse durch Nullpunkt.
2. $$x \to \lambda x, \lambda \in \mathbb{R} \text{ fest}$$ $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ fest.}$$
3. Mit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ist $$\mathcal{A}: \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^m \\ \mathbb{R}^n \ni x & \to \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$ linear.
   Das wird die Standard - Inkarnation einer linearen Abbildung werden.

Seite 123

4. $$\frac{d}{dx}: \begin{cases} \Pi_n \to \Pi_{n-1} \\ p \mapsto p' \end{cases}$$
5. $$Int_1: \begin{cases} \Pi_n \to \mathbb{R} \\ p \mapsto \int_0^1 p(s)ds \end{cases}$$ $$Int_2: \begin{cases} \Pi_n \to \Pi_{n+1} \\ p \mapsto \int_0^x p(s)ds \end{cases}$$

Beispiele (contra)

Seite 124

1. Verschiebung $$x \mapsto x + c, c \in V \quad c \neq 0 \text{ fest.}$$
2. Drehung um Punkt in Ebene $\neq$ Nullpunkt.
   Drehung des $\mathbb{R}^3$ um Achse nicht durch Nullpunkt (und nicht um 2π).

Seite 124

ACHTUNG!

Sehr wichtig

$$\Downarrow$$

Lineare Abbildung

Lineare Abbildung $\mathcal{T} : V \to W$ ist durch Wirkung auf eine Basis $v^1, \cdots v^n$ von V festgelegt.

$$\mathcal{T} : v^i \to \mathcal{T}(v^i)$$

$$v \in V \Rightarrow \exists! \xi_1, \cdots, \xi_m \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v^i$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}(\sum_{i=1}^{n} \xi_i v^i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathcal{T}(v^i) = w$$

$$\left(w \in W \Rightarrow \exists! \zeta_1, \cdots, \zeta_m : w = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i w^i \right)$$

Seite 124

$$\mathcal{T} : V \to W$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i v^i \qquad \sum_{j=1}^{m} \zeta_j w^j$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \zeta_j \\ \vdots \\ \zeta_m \end{pmatrix}$$

Wie? mit Matrix T

Seite 125

$$\mathcal{T} : V \to W$$

$$\underbrace{v^1, \cdots, v^n}_{\text{Basis}} \quad \underbrace{w^1, \cdots, w^m}_{\text{Basis}}$$

$$\mathcal{T} : v^j \to \mathcal{T}(v^j) = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} w^i$$

$$\begin{array}{c|cccc} & v^1 & v^2 & \cdots & v^n \\ \hline w^1 & t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ w^2 & t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w^m & t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{array} \qquad v = \sum \xi_i v^i$$

„Willst die Matrix Du erhalten,

schreib die Bilder in die Spalten“

Rotkäppchens Diätplan

	Ananas	Wein	Orangen	Sahne
Preis	2.00	8	0.50	1.39
Fett	0.02	0.01	0.05	30
Zucker	200	30	15	1

Korb mit:

$$\begin{array}{r} \textit{Ananas} \\ \textit{Wein} \\ \textit{Orangen} \\ \textit{Sahne} \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{ccccccccl} 2 \cdot 2.00 & + & 1 \cdot 8 & + & 3 \cdot 0.5 & + & 2 \cdot 1.39 & & P \\ 2 \cdot 0.02 & + & 1 \cdot 0.01 & + & 3 \cdot 0.05 & + & 2 \cdot 30 & & F \\ 2 \cdot 200 & + & 1 \cdot 30 & + & 3 \cdot 15 & + & 2 \cdot 1 & & Z \end{array}$$

$$v \in V \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} \xi_j v^j$$

$$\mathcal{T}(v) = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i w^i \quad \zeta_i?$$

$$\mathcal{T}(v) = \mathcal{T}\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j v^j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, \mathcal{T}(v^j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{i=1}^{m} t_{ij} \, w^i = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\xi_j\Big)}_{\zeta_i} w^i$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= t_{11}\,\xi_1 + \cdots + t_{1n}\xi_n \\ &\cdots \\ \zeta_m &= t_{m1}\,\xi_1 + \cdots + t_{mn}\xi_n \end{aligned}$$

$$\mathcal{T} : \overset{\dim n}{V} \to \overset{\dim m}{W}$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} \xi_j v^j \to w = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i w^i$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} t_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} t_{mj}\xi_j \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T} \approx T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

Abbildung $\leftrightarrow$ Matrix

Beispiele

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \text{ linear} \\ e^1 &\to e^2 \\ e^2 &\to e^3 \\ e^3 &\to e^1 \end{aligned}$$

$T =$

	e^1	e^2	e^3
e^1	0	0	1
e^2	1	0	0
e^3	0	1	0

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &\to w^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 27 \end{pmatrix} \\ v^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} &\to w^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} &\to w^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

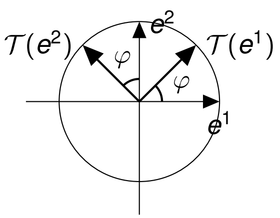
$T =$

	v^1	v^2	v^3
w^1	1		
w^2		1	
w^3			1

3.

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$v^i = e^i, w^i = e^i, i = 1, 2$$



$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$T = \begin{array}{c|c|c} & v^1 & v^2 \\ \hline w^1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \hline w^2 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\,x_1 - 1/\sqrt{2}\,x_2 \\ 1/\sqrt{2}\,x_1 + 1/\sqrt{2}\,x_2 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aber Darstellung bzgl. der Standardbasen gewünscht.

Was nun?

Wir benötigen für T die Bilder von e^1, e^2, e^3!

Aber

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{T}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathcal{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathcal{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}e^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e^1 + 2e^2 + 1e^3$$

$$\mathcal{T}e^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e^1 + 1e^2 + 0 \cdot e^3$$

$$\mathcal{T}e^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e^1 + 0 \cdot e^2 + 0 \cdot e^3$$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fertig.

Test

$$T\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{matrix}3 & \cdot & 1+2 & \cdot & (-1)+0 & \cdot & 1=\\ 2 & \cdot & 1+1 & \cdot & (-1)+0 & \cdot & 0=\\ 1 & \cdot & 1+0 & \cdot & (-1)+0 & \cdot & 0=\end{matrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathcal{T}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\checkmark$$

$$\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_2\end{pmatrix}v = \begin{pmatrix}< B_1^T, v >\\< B_2^T, v >\\< B_3^T, v >\end{pmatrix}$$

Matrix-Vektor Multiplikation

$$\begin{bmatrix}t_{11} & \cdots & t_{1n}\\ \vdots & & \\ t_{m2} & \cdots & t_{mn}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}t_{11}x_1 & + & t_{12}x_2 & +\cdots+ & t_{1n}x_n\\ t_{21}x_1 & + & t_{22}x_2 & +\cdots+ & t_{2n}x_n\\ \vdots & & & & \\ t_{m1}x_1 & + & t_{m2}x_2 & +\cdots+ & t_{mn}x_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Beispiele

1.

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&3\\1&0&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

2. $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x^Ty = (x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_iy_i =< x, y >_{\text{eukl.}}$$

$$x^Ty = y^Tx = (y_1,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Aber (noch!) nicht

$= xy^T$ oder $= yx^T$!!! | $\neq$ Matrix $\cdot$ Vektor.

Weitere Beispiele für Matrixdarstellungen lineare Abbildungen

Seite 127

Beispiel 4.8

V, W endlich dim. Vektorräume;

$\mathcal{N} : V \to W$ Nullabbildung

$\mathcal{N} : v \to 0 \quad \forall\, v \in V$

$\{v^1, \cdots, v^n\}$ bzw. $\{w^1, \cdots, w^n\}$

beliebige Basen in V bzw. W

Dann

$$\mathcal{N}(v^i) = 0 = \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot w^i$$

$\Rightarrow \mathcal{N}$ wird durch Nullmatrix

lusch, lusch $\longrightarrow \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

dargestellt

Beispiel 4.9

Seite 127

V endlich dim. Vektorraum und

$$\mathcal{I} : \begin{cases} V \to V \\ v \to v \end{cases}$$

die identische Abbildung.
Stellt man die Identität bzgl. derselben Basis $\{v^1, \cdots, v^n\}$ in Bild - und Urbildraum dar, so hat man wegen

$$\mathcal{I}(v^j) = v^j = 0v^1 + \cdot + 0 \cdot v^{j-1} + 1v^j + 0 \cdot v^{j+1} + \cdots + 0v^n$$

als $j-te$ Spalte der darstellenden Matrixgerade e^j

Es ist also T durch die Einheitsmatrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ dargestellt.

Beispiel 4.10

Achtung! Identität wird nicht mehr durch E dargestellt, wenn in Urbild und Bild

$$\mathcal{I} : V \longrightarrow V$$

$$\{v^1, \cdots, v^n\} \quad \{w^1, \cdots, w^n\}$$

verschiedene Basen verwendet werden.

Wozu so+n Quatsch?

Damit wir Sie in der Klausur besser fressen können? Nein! Sondern?

Ihre Basis für $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Karl-Heinz' Basis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\text{in Ihrem System beschrieben}}$$

Wenn Karl-Heinz durch $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ einen Vektor beschreibt, dann erhalten Sie

die Darstellung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ in Ihrer Basis über

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{I}$$

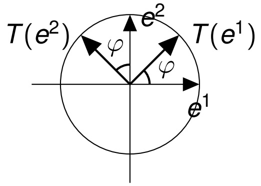
$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Karl-Heinz' Weltsicht $\longrightarrow$ Ihre Weltsicht
T-Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Seite 129

Beispiel 4.11
Matrixdarstellung Drehung des $\mathbb{R}^2$ um Nullpunkt um Winkel φ
Darstellung bzgl. Standardbasis in Urbild - und Bildraum.



Länge erhalten

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2+\varphi) \\ \sin(\pi/2+\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = -\sin\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$Tx = \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.12 (Achtung: Theoretisches Beispiel)
$V = W = \mathbb{R}^3$
T = Spiegelung an

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$\underbrace{z_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, z^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, z^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Beschreibung bzgl. Basis } \{z^1, z^2, z^3\} \text{ in Urbild und Bild einfach.}}$$

$$T(z^1) = z^1, T(z^2) = z^2, T(z^3) = -z^3$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vermutlich interessanter: Matrix bzgl. Einheitsvektor.
Dazu $T(e^i)$ benötigt.

Seite 131

Für $T(e^i)$ drücke e^i aus in $z^1, \cdots z^3$

$$z^1\lambda_1 + z^2\lambda_2 + z^3\lambda_3 = e^1$$

ist lin. Gleichungssystem.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Gauss liefert

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$$

Seite 131

Nun

$$\begin{aligned} T(\frac{2}{3}z^1+\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{3}z^3) &= \frac{2}{3}T(z^1)+\frac{1}{3}T(z^2)+\frac{1}{3}T(z^3) \\ &= \frac{2}{3}z^1+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{3}z^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{1. Spalte von } T \end{aligned}$$

Rest analog.

(Achtung: Spiegelung rechnet man anders aus!
wird später VIEL einfacher)

Seite 133

Beispiel 4.15

$$\mathrm{Int}_1 : \begin{array}{ccc} \Pi_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longrightarrow & \int_0^1 p(s)ds \end{array}$$

Basen: $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ von Π_n und $\{1\}$ von $\mathbb{R}$.

$p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i$ wird bzgl. Basis $1, x, x^2, \cdots, x^n$ durch
$\alpha := \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ dargestellt.

$$\mathrm{Int}_1(x^k) = \int_0^1 x^k\, dx = \frac{1}{k+1} \to [(k+1) - \text{te Spalte}]$$

$$\text{Matrix } = (\cdots, [(k+1)\text{-te Spalte}], \cdots)$$

$$G = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{k+1})$$

$$\mathrm{Int}_1(p) = G\alpha$$

Ende der Vorlesung 8

Vorlesung 9
18. bzw. 19. Dezember 2013

Matrixkalkül 1

Wiederholung

Tafel –> Matrixdarstellung
linearer Abbildungen

Jetzt: Ziel Matrixmultiplikation

Abbildungen		B		A	
Räume	U	$\longrightarrow$	V	$\longrightarrow$	W
Basen	$u^1, \cdots, u^p$		$v^1, \cdots, v^n$		$w^1, \cdots, w^m$
Matrizen		(b_{ij})		(a_{ij})	

Mit A, B auch $A \circ B =: C$ linear!

Matrix (c_{kj}) ?

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j\, u^j, \qquad B(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\, x_j \Big) v^i$$

$$\begin{aligned} A(B(x)) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\, x_j \Big) A(v^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\, x_j \Big) \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, w^k \\ &= \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{p} \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij} \Big)}_{c_{kj}} x_j \Big) w^k \end{aligned}$$

Seite 134

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{B} & V & \xrightarrow{A} & W \\ u^1, \cdots, u^p & & v^1, \cdots, v^n & & w^1, \cdots, w^m \\ & (b_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,p}} & & (a_{ki})_{\substack{k=1,\cdots,m \\ i=1,\cdots,n}} & \end{array}$$

$$C = \overset{\longrightarrow}{A} \cdot B$$

$$(c_{kj})_{\substack{k=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,p}}$$

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ij}$$

$$C := \underbrace{A \cdot B}_{\text{Matrixprodukt}}$$

Bemerkungen:

Seite 135

1) $A \cdot B = C$:

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ij}$$

= euklidisches inneres Produkt von
k-ter Zeile von A und j-ter Spalte von B.

Längen müssen passen! $\Leftrightarrow$ Dimension des Bildraumes von $B =$ Dimension des Definitionsbereiches von A.

2) Matrix-Vektor-Produkt $A \cdot x$ ($A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $x \in \mathbb{R}^{n}$) ist konsistent mit Matrix-Matrix-Produkt $A \cdot x$ ($A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $x \in \mathbb{R}^{(n,1)}$).

Seite 136

3)

$$(A \cdot B \text{ erklärt}) \quad \not\Rightarrow \quad (B \cdot A \text{ erklärt})$$

Und wenn das (zufällig) doch einmal der Fall sein sollte, so sind sie nicht notwendig gleich!

Matrixmultiplikation ist NICHT kommutativ!

Bei $AB = BA$ heißen A und B vertauschbar.

Seite 137

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (Nicht - Null) mal (Nicht - Null) = Null möglich

5) Matrixmultiplikation ist assoziativ

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Tafelbeispiele „Immer auf die Kleinen!“

6) Es gelten die Distributivgesetze

$$1.(A + B)C = AC + BC$$

$$2.A(C + D) = AC + AD$$

2 Stück nötig, da keine Kommutativität

7) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$x^T : = (x_1, \cdots, x_n)$$

$$x^T y = (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$yx^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_n \\ y_2 x_1 & \cdots & y_2 x_n \\ \vdots & & \\ y_n x_1 & \cdots & y_n x_n \end{pmatrix}$$

Dyadisches Produkt! $\nearrow$

Auch für $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad (m \neq n)$ sind yx^T und xy^T erklärt (nicht aber x^Ty, y^Tx!)

$$yx^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x_1, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \cdots & y_1x_n \\ y_2x_1 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_mx_1 & y_mx_2 & \cdots & y_mx_n \end{bmatrix}$$

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1, \cdots, y_m) = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix}$$

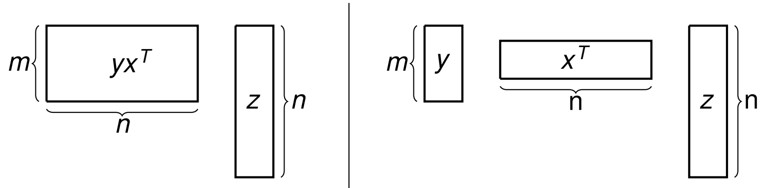
Achtung! Ausmultiplizieren nur zur Erläuterung $\nearrow$, dass yx^T und xy^T Matrizen sind!

In der Praxis multipliziert man xy^T und yx^T um Gottes Willen NICHT aus.

Warum nicht?

Weil die Anwendung dann einfacher wird

$$yx^T z = y \underbrace{(x^T z)}_{\alpha \in \mathbb{R}} = \alpha y$$



$$rang(yx^T) = rang \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \cdots & y_1x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_mx_1 & y_mx_2 & \cdots & y_mx_n \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 \text{ wenn } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung

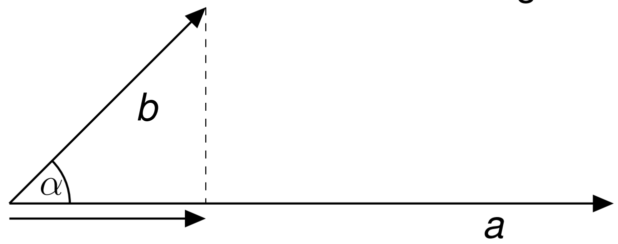
Jede Matrix vom Rang 1 hat eine Darstellung yx^T.

Beweis

$A \in \mathbb{R}^{m,n}, (a^1, \cdots, a^n)$
$rang(A) = 1 \Rightarrow dim\ span\{a^1, \cdots, a^n\} = 1$
Sei $\{y\}$ Basis. Dann $\exists\, \lambda_i : a^i = y\lambda_i \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} y_1\lambda_1 & y_1\lambda_2 & \cdots & y_1\lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_m\lambda_1 & y_m\lambda_2 & \cdots & y_m\lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A = y \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^T \qquad \square$$

Folie 2 zum Übers-Bett-Hängen



$$P_a(b) = a\frac{\langle a, b\rangle}{\langle a, a\rangle} \qquad \langle a, b\rangle = a^T b$$

$$= P_a(b) = \frac{a\, a^T b}{a^T a}$$

$$\boxed{P_a = \frac{aa^T}{a^T a}}$$

Satz 2.58

$$v^1, \ldots, v^n \quad \text{Orthonormalbasis}$$

$$V = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v^j \rangle v^j$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} v^j \langle v, v^j \rangle = \sum_{j=1}^{n} v^j v^{j\,T} v$$

$$= \underbrace{\left(\sum v^j v^{j\,T} \right)}_{E} v$$

$$\boxed{E = \sum_{j=1}^{n} v^j v^{j\,T}}$$

Seite 214

Einfacherer Methode für Spiegelung (Verbesserung von Beispiel 4.12)

Ergänze $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu Orthogonalsystem (v^1, v^2, v^3)

Fourierentwicklung

$$v = \frac{\langle v^1, v\rangle}{\langle v^1, v^1\rangle} v^1 + \frac{\langle v^2, v\rangle}{\langle v^2, v^2\rangle} v^2 + \frac{\langle v^3, v\rangle}{\langle v^3, v^3\rangle} v^3$$

$$v = \frac{v^1 v^{1\,T}}{v^{1\,T} v^1} v + \frac{v^2 v^{2\,T}}{v^{2\,T} v^2} v + \frac{v^3 v^{3\,T}}{v^{3\,T} v^3} v = Ev$$

$$Hv = -\frac{v^1 v^{1\,T}}{v^{1\,T} v^1} v + \frac{v^2 v^{2\,T}}{v^{2\,T} v^2} v + \frac{v^3 v^{3\,T}}{v^{3\,T} v^3} v$$

$$= \left(E - 2\frac{v^1 v^{1\,T}}{v^{1\,T} v^1} \right) v.$$

Kenntnis von v^2 & v^3 nicht nötig

Zwischenspiel

Seite 141

Wie im Gaußschen Algorithmus betrachte zu linearem Gleichungssystem

$$A\,x = b$$

neben der Matrix A die erweiterte Matrix

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$\Downarrow$ GAUSS $\Downarrow$

Seite 142

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{r,rn} & \cdots & a'_{r,n} & & b'_r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & b'_{r+1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & b'_m \end{array} \right)$$

$$Rang = \begin{cases} r \text{ wenn } b'_{r+1}, \cdots, b'_m = 0 \\ r+1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Gauss ändert Rang nicht $\Rightarrow$

Satz 4.23

$A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m$ gegeben.
Dann ist

$$A\,x = b$$

genau dann lösbar, wenn

$$Rang(A, b) = Rang(A).$$

Besonders wichtiger Fall

$$\begin{array}{rcl} & & A\,x = b \\ Rang\ A = n = m & \Rightarrow & \text{immer } Rang(A, b) = Rang(A) \\ & \Rightarrow & A\,x = b \text{ immer lösbar} \end{array}$$

Wie wir wissen sogar immer eindeutig.

Lösen linearer Systeme als Umkehrung einer Abbildung

Lineares Gleichungssystem

$$\text{(LGS)}\quad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & a_{13}\cdot x_3 & +\cdots & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & a_{23}\cdot x_3 & +\cdots & a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 & + & a_{m2}\cdot x_2 & + & a_{m3}\cdot x_3 & +\cdots & a_{mn}\cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

Mit

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$$

Ist

$$\text{(LGS)} \Leftrightarrow A\,x = b$$

Bestimme also $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\boxed{A\,x = b}$$

Seite 141

Der Abbildung

$$\mathcal{A} : V \longrightarrow W \text{ linear}$$

können wir bei Vorgabe von Basen

$$\text{Basen: } v^1, \cdots, v^n \longrightarrow w^1, \cdots, w^n$$

eine Matrix A zuordnen.

Umgekehrt: Bei Vorgabe von V, W mit Basen ist auch A eindeutig $\mathcal{A}$ zugeordnet.

Die Abbildung $\mathcal{A}$ hängt aber immer von V, W und Basen ab.

Im Folgenden meint
die einer (m, n)- Matrix A zugeordnete Abbildung $\mathcal{A}$
stets die Abbildung

$$\mathcal{A} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto Ax \end{cases}$$

$$A\,x = b$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \underset{\text{zu findendes Urbild}}{x} & \longrightarrow & \underset{\text{vorgegebenes Bild}}{b} \end{array}$$

$$A = (a^1, \cdots, a^n)$$

$$\begin{array}{rcl} \text{1. Rang } A = n & \Leftrightarrow & a^1, \cdots, a^n \text{ l.u.} \\ & \Leftrightarrow & \forall b\, \exists \text{ höchstens eine Lösung} \\ & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \text{ injektiv} \\ \text{2. Rang } A = m & \Leftrightarrow & dim\ span\{a^1, \cdots a^n\} = m \\ & \Leftrightarrow & \forall b \text{ durch } a^1, \cdots, a^n \text{ linear erzeugbar} \\ & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \text{ surjektiv} \\ \text{3. Rang } A = n = m & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \text{ bijektiv} \end{array}$$

Seite 142

Da (n, n)- Matrizen mit vollem Rang n so wichtig sind, bekommen sie einen extra Namen.

Definition 4.24

$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ heißt regulär (oder nicht singulär) wenn

(i) $m = n$

(ii) Rang $(A) = n =$ maximal.

Ist für $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ Rang $(A) < n$, so heißt A singulär (oder nicht regulär)

Wiederholung:

Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär, so hat

$$A\,x = b$$

für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ und umgekehrt.

Beispiele regulärer Matrizen

Seite 142

1.
$$E_n = diag(1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ ist regulär}$$

„Beweis 1“: Die Einheitsvektoren $e^1, \cdots, e^n$ sind linear unabhängig.

„Beweis 2“: $E_n\,x = b$ ist für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar, nämlich durch $x = b$

Seite 142

2.
$$diag(d_1, \cdots, d_n) \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ ist regulär}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$d_i \neq 0 \quad \forall\, i = 1, \cdots, n$$

„Beweis 1“ (Skript):
$(d_1 e^1, \cdots, d_n e^n)$ sind genau dann l.u. wenn $d_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$

„Beweis 2“:
$$diag(d_1, \cdots, d_n)x = b$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} d_1 x_1 = b_1 \\ \vdots \\ d_n x_n = b_n \end{array}\right\} \text{eindeutig lösbar für alle } b_1, \cdots, b_n \Leftrightarrow d_1, \cdots, d_n \neq 0$$

Seite 143

3. Dreiecksmatrizen

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

sind genau dann regulär, wenn all ihre Diagonalelemente von Null verschieden sind. Genau dann sind nämlich

$$L\,x = b \text{ bzw. } R\,x = b$$

für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. (Vorwärtseinsetzen bzw. Rückwärtseinsetzen)

Seite 143

zu 3. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 2 & 3 \\ & & & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ nicht lösbar.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ „mehrfach" lösbar. } x = \lambda e^1, \lambda \in \mathbb{R}$$

A regulär

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{A}$ bijektiv

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{A}$ hat Umkehrabbildung $(\mathcal{A}^{-1})$

Behauptung

$(\mathcal{A}^{-1})$ ist linear.

Beweis

Zu zeigen ist: Für

$$y^1, y^2 \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

gilt

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha y^1 + \beta y^2) = \alpha \mathcal{A}^{-1}(y^1) + \beta \mathcal{A}^{-1}(y^2)$$

Aber seien

$$\begin{array}{rcl} x^1 & = & \mathcal{A}^{-1}(y^1), \\ x^2 & = & \mathcal{A}^{-1}(y^2), \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} y^1 & = & \mathcal{A}(x^1) \\ y^2 & = & \mathcal{A}(x^2) \end{array}$$

Dann

$$\alpha y^1 + \beta y^2 = \alpha \mathcal{A}(x^1) + \beta \mathcal{A}(x^2) \underset{\text{Linearität von } \mathcal{A}}{=} \mathcal{A}(\alpha x^1 + \beta x^2)$$

Also

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha y^1 + \beta y^2) = \alpha x^1 + \beta x^2 = \alpha \mathcal{A}^{-1}(y^1) + \beta \mathcal{A}^{-1}(y^2) \quad \square$$

Seite 143

A regulär

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{A}$ bijektiv

$\Leftrightarrow$

$\mathcal{A}$ hat Inverse $(\mathcal{A}^{-1})$

und

$\mathcal{A}^{-1}$ ist linear.

$\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ wird durch eine Matrix dargestellt

A^{-1}

die inverse Matrix zu A.

Seite 144

Wegen $\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = id$ ist

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot A = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Schreibweise der Einheitsmatrix

Seite 139

E oder I oder

E_n oder I_n (Betrag der Dimension)

Für E gilt

$$\left.\begin{array}{r} E_m B = B \\ B E_n = B \end{array}\right\} \text{ für } B \in \mathbb{R}^{m,n}$$

Behauptung $A^{-1}A = E \Rightarrow AA^{-1} = E$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$:

Seite 144

$$\underbrace{Ax}_{\text{durchläuft alle } y \in \mathbb{R}^n \text{ wenn } x \in \mathbb{R}^n \text{ durchläuft}} = A \cdot Ex = A(A^{-1}A)x = (A\,A^{-1})Ax$$

Also

$$y = (A\,A^{-1})y \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow A\,A^{-1} = E$$

↑ **SEHR WICHTIGES „ALSO“! Muss man verstanden haben!**

Also

$$A^{-1}A = E = AA^{-1}$$

Interpretationen:

(i) A und A^{-1} vertauschbar

(ii) „Linksinverse“ = „Rechtsinverse“

(iii) $(A^{-1})^{-1} = A$

Wenn man die Inverse A^{-1} hat, kann man formal

$$A\,x = b$$

lösen durch

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E}\,x = A^{-1}b$$

also

$$x = A^{-1}b$$

Wie rechne ich A^{-1} aus?

Seite 147

Hauptsatz (der praktischen linearen Algebra)

Wer (unnötig) Matrizen invertiert ist
DOOF!

Warum? Weil's zu viel Arbeit macht und anders (meistens) schneller geht!

Wie invertiert man A? (wenns denn sein muss)

Seien $c^1, \cdots, c^n$ die Spaltvektoren von A^{-1}.
Dann aus

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A \cdot (c^1, c^2, \cdots, c^n) = (e^1, \cdots, e^n)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(Ac^1, Ac^2, \cdots, Ac^n) = (e^1, \cdots, e^n)$$

Also: Die $k-te$ Spalte c^k von A^{-1} löst

$$A\,x = e^k$$

Rechneralgorithmus

Für $k = 1, \cdots, n$ berechne die $k-te$ Spalte c^k von A^{-1} aus

$$Ac^k = e^k$$

($\rightarrow$ vgl. später LR-Zerlegung)

Aufwand der Berechnung von A^{-1}(ein wenig geschummelt; siehe später)

$\sim$ n Lösungen eines Systemes $A\,x = b$

Lösen von $A\,x = b$ über

$$\begin{cases} \text{Berechne } A^{-1} \\ \text{Setze } x = A^{-1}b \end{cases}$$

ist also ineffizient, weil ca. n mal so teuer wie das Lösen von $A\,x = b$ selbst.

Seite 144

Handalgorithmus

Forme

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

durch Zeilenumformungen so um, dass der $A-$Block in E übergeht.

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{array}\right)$$

Dann ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Wieso?

Begründung: Simultane Ausführung von n Gaußalgorithmen.

Beispiel

$$A\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & +2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) A^{-1}$$

Probe machen: $AA^{-1} = E$!

Ende der Vorlesung 9

Vorlesung 10
8. bzw. 9. Januar 2013

Matrixkalkül 2

WIEDERHOLUNG

Inverse Matrizen
(Tafel)

Wenn $A, B \in \mathbb{R}$ beide regulär sind, so gilt dies auch für $A \cdot B$
Denn man findet

$$(B^{-1}\underbrace{A^{-1})(A}_{E}\cdot B) = B^{-1}B = E,$$

so dass

$A \cdot B$ die Inverse $B^{-1}A^{-1}$ hat.

Frage: Kann $A \cdot B$ regulär sein, wenn A oder B singulär ist?
Antwort: Nein!

Seite 145

Satz 4.27 (Rangformel)

(i) $\forall\, A \in \mathbb{R}^{(m,n)} \quad \forall\, B \in \mathbb{R}^{(n,p)}$
gilt $Rang(A \cdot B) \leq min(Rang(A), Rang(B))$

(ii) Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär, so gilt
$\forall\, B \in \mathbb{R}^{(n,p)} : Rang(A \cdot B) = Rang(B)$

(iii) Ist $B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär, so gilt
$\forall\, A \in \mathbb{R}^{(m,n)} : Rang(A \cdot B) = Rang(A)$

Merkregel für (ii) und (iii):
Multiplikation mit einer regulären Matrix verändert den Rang nicht.

Achtung: in (i) ist „$<$“ möglich!

Seite 146

Beweis

(i) $Rang(A \cdot B) \leq min(Rang(A), Rang(B))$

α) „ $Rang(A \cdot B) \leq Rang(B)$ “

$$B = (b^1, \cdots, b^p) \Rightarrow AB = (Ab^1, \cdots, Ab^p)$$

$$b^{i_1}, \cdots, b^{i_k} \text{ l.a. } \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b^{i_j} = 0 \quad \sum |\lambda_j| \neq 0$$

$$\Rightarrow 0 = A\Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j b^{i_j}\Big) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (Ab^{i_j})$$

Also in $(Ab^1, \cdots, Ab^p)$ höchstens so viele Spalten l.u. wie in $(b^1, \cdots, b^p)$

(i) $Rang(A \cdot B) \leq min(Rang(A), Rang(B))$

β) „ $Rang(A \cdot B) \leq Rang(A)$ “ $\searrow Ab^1 = a^1 b_1^1 + a^2 b_2^1 + \cdots + a^n b_n^1$

$$A \cdot B =: (c^1, \cdots, c^p) = (Ab^1, \cdots, Ab^p)$$

$$Ab^i \in span\{a^1, \cdots, a^n\}; i = 1, \cdots, p$$

$$\Rightarrow span\{c^1, \cdots, c^p\} \subset span\{a^1, \cdots, a^n\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Rang(A \cdot B) &= dim\, span\{c^1, \cdots, c^p\} \\ &\leq dim\, span\{a^1, \cdots, a^n\} \\ &= Rang(A) \end{aligned}$$

□

(ii) „ $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär. $r = Rang(B), B \in \mathbb{R}^{(n,p)} \Rightarrow Rang(A \cdot B) = r$ “

Wir zeigen

(*) „$b^{i_1}, ..., b^{i_r}$ l.u. $\Rightarrow A\, b^{i_1}, ..., A\, b^{i_r}$ l.u.“

Daraus folgt dann

Anzahl lin. abh. Ab^{i_k}'s $\geq$ Anzahl lin. unabh. b^{i_k}'s

und somit

Rang$(AB) \geq$ Rang(B).

wegen Rang$(AB) \leq$ Rang(B) fertig □

(*) Zeigen wir nachstehend durch Beweis von

$Ab^{i_1}, ..., Ab^{i_r}$ l.a. $\Rightarrow b^{i_1}, ..., b^{i_r}$ l.a.

und das geht so.

$Ab^{i_1}, ..., Ab^{i_r}$ l.a.

$$\Rightarrow \sum_j \lambda_j\, Ab^{i_j} = 0$$

$$\sum_j |\lambda_j| \neq 0$$

$$\Rightarrow A(\sum_j \lambda_j\, b^{i_j}) = 0$$

$$\overset{A \text{ reg.}}{\Rightarrow} \sum_j \lambda_j\, b^{i_j} = 0$$

$\Rightarrow b^{i_1}, ..., b^{i_r}$ l.a.

(iii) „$B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär, und $A \in \mathbb{R}^{(m,n)} \Rightarrow Rang(A \cdot B) = Rang(A)$" ✓

$$A \cdot B =: (c^1, \cdots, c^n)$$

$$Rang(A{\cdot}B) = dimspan\{c^1, \cdots, c^n\} = dimspan\left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c^j \,\middle|\, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Wähle speziell

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^i \\ \vdots \\ \lambda_n^i \end{pmatrix} = i - te \text{ Spalte von } B^{-1}$$

(iii) „$B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär, und $A \in \mathbb{R}^{(m,n)} \Rightarrow Rang(A \cdot B) = Rang(A)$"
Fortsetzung:

Dafür ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^i c^j &= (A \cdot B) \begin{pmatrix} \lambda_1^i \\ \vdots \\ \lambda_n^i \end{pmatrix} = A \cdot (B \cdot B^{-1}) i - te \text{ Spalte} \\ &= Ae^i = a^i, \qquad i = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned} Rang(A \cdot B) &= dim\, span \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c^j \,\middle|\, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &\geq dim\, span\{a^1, \cdots, a^n\} \\ &= Rang(A) \end{aligned}$$

□

Korollar 4.29

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Dann

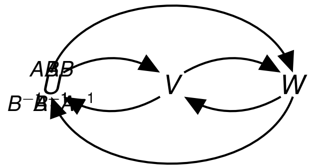
(i)

$$A \cdot B \text{ regulär}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$A \text{ regulär und } B \text{ regulär}$$

(ii) Ist $A \cdot B$ regulär, so ist

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Zu (ii)



Mit Matrizen sind lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ beschreibbar.
Speziell auch „Bewegungen des $\mathbb{R}^n$"

Frage: Welche Matrizen in $\mathbb{R}^{(n,n)}$ beschreiben Abbildungen, die Längen von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren erhalten?

Kongruenztransformationen

Mordswichtig!

Kongruenzforderungen

$Q \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist Kongruenztransformation (bzgl. euklidischem $\langle , \rangle$) wenn

Seite 149

$$L: ||Qx|| = ||x|| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

und

$$W: \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||} = \frac{\langle Qx, Qy\rangle}{||Qx|| \cdot ||Qy||} \,\forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$L \wedge W \Leftrightarrow$$

$$L: ||Qx|| = ||x|| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

und

$$W': \langle x, y\rangle = \langle Qx, Qy\rangle \,\forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Q \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ Kongruenz-Transformation}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\langle x, y\rangle = \langle Qx, Qy\rangle \,\forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Frage

Welche Qs tun das?

Wunsch

$\langle Qx, Qy\rangle$ Rüberwälzen

$$\langle Qx, \quad Qy\rangle$$

$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ gegeben.

Seite 150

Gesucht $B \in \mathbb{R}^{(?,?)}$ mit

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

$\langle x, By\rangle$ muss passen

$$\Rightarrow B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$B \in \mathbb{R}^{(n,m)}$$

$$(A \in \mathbb{R}^{(m,n)})$$

$\checkmark$

$$\begin{aligned}
\langle Ax, y\rangle &= \sum_{i=1}^{m} (Ax)_i \, y_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \, y_i \\
&\overset{!}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j \, b_{ji} \, y_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j (By)_j = \langle x, By\rangle
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m-1,1} & \cdots & \cdots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & \cdots & a_{m-1,1} & a_{m1} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{m-1,n} & a_{mn} \end{bmatrix} = B$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b_{ji} = a_{ij}$$

$$\text{für } \begin{matrix} i = 1, & \cdots, & m \\ j = 1, & \cdots, & n \end{matrix}$$

Bei komplexem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \bar{y}_i$$

und komplexer Matrix $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ hat man

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$$

bei $B \in \mathbb{C}^{(n,m)}$ mit

$$b_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

Also: Spiegelung an der Diagonalen und Übergang zum Konjugiert-Komplexen.

Seite 150

Transponierte, Adjunkte, Symmetrische, Hermitesche

Definition 4.33

(i) Zu

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(m,n)}$$

ist

$$A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{(n,m)}$$

die Transponierte (Matrix) zu A.
Bei $A = A^T$ heißt A symmetrisch.

(ii) Zu

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{(m,n)}$$

ist

$$A^* = (\bar{a}_{ji}) \in \mathbb{C}^{(n,m)}$$

die Adjungierte von A.
Bei $A = A^*$ heißt A hermitesch.

Beispiel $\rightarrow$ Tafel.

Rechenregeln für die Transposition

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle \quad \forall A, x, y;$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad \forall A, B;$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T \quad \forall A, \lambda \in \mathbb{R};$$

$$(A^T)^T = A \quad \forall A;$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \forall \begin{matrix} A & \in & \mathbb{R}^{(m,n)} \\ B & \in & \mathbb{R}^{(n,p)} \end{matrix}$$

Dito für die Adjunktion * (Aber Achtung: $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$)
Zu $(AB)^T = B^T A^T$:

$$\langle AB\,x, y \rangle = \langle Bx, A^T y \rangle = \langle x, B^T A^T y \rangle$$

Satz 4.36

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ regulär } \Leftrightarrow A^T \text{ regulär und}$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T =: A^{-T}$$

Beweis

Anzahl l.u. Zeilen = Anzahl l.u. Spalten

und daher $\Leftrightarrow$ ✓

$$E = E^T = (A\,A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T \quad \square$$

Mit unseren jetzigen Kenntnissen zurück zu

$$\langle x, y\rangle = \langle Qx, Qy\rangle \quad \forall\, x, y$$

$$\langle x, y\rangle = \langle Qx, Qy\rangle \forall\, x, y$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\langle x, y\rangle = \langle Q^T Qx, y\rangle \quad \forall\, x, y$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\langle x - Q^T Qx, y\rangle = 0 \quad \forall\, x, y$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\langle (E - Q^T Q)x, y\rangle = 0 \quad \forall\, x, y$$
$$\Leftrightarrow$$
$$||(E - Q^T Q)x|| = 0 \quad \forall\, x$$
$$\Leftrightarrow$$
$$E = Q^T Q$$

Damit

$$Q \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ Kongruenz-Transformation}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Q^T Q = E$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Q^{-1} = Q^T$$

(Bem. Bei komplexen Q und

$\langle x, y\rangle \quad : \quad = \sum x_i\, \bar{y}_i$ wird die Forderung zu $Q^*\, Q = E$)

Seite 152

Definition 4.37

$Q \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ orthogonal*, wenn

$$Q^T Q = E$$

$Q \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ unitär, wenn

$$Q^* Q = E$$

* =Zeilen und Spalten sind dann orthonormal

Beispiel 4.38: Seite 153 (Kongruenztransformationen des $\mathbb{R}^2$)

<u>Ansatz:</u> $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad Q^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q^T = Q^{-1}$ bei

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{(i) } a = \frac{d}{ad-bc} \\ \text{(ii) } d = \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right\} a = (ad-bc)^2 a \\ \left.\begin{array}{l} \text{(iii) } c = \frac{-b}{ad-bc} \\ \text{(iv) } b = \frac{-c}{ad-bc} \end{array}\right\} b = (ad-bc)^2 b \end{array}\right\} \overset{|a|+|b|\neq 0}{\Longrightarrow} ad - bc = \pm 1$$

folglich zwei Fälle

$$\begin{array}{llcrll} \alpha) & ad-bc & = & 1, & a = d, & b = -c \\ \beta) & ad-bc & = & -1, & a = -d, & b = c \end{array}$$

<u>ALSO:</u>

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ orthogonal wenn}$$

$$\begin{array}{llll} \alpha) & a = d, & b = c & ad - bc = det\, Q = 1 \\ \text{oder} & & & \\ \beta) & a = -d, & b = c & ad - bc = det\, Q = -1 \end{array}$$

In beiden Fällen $a^2 + b^2 = 1$, also $a = \cos\phi \quad b = \pm\sin\phi$

Damit entweder

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

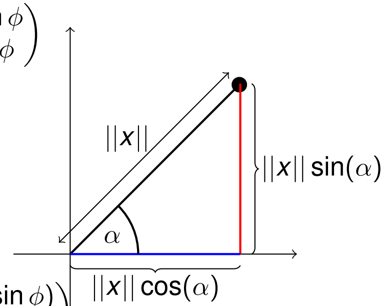
oder

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Beschreibt Drehung um ϕ.

Wissen wir zwar schon, trotzdem nochmal.



$$\begin{aligned} x &= ||x|| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \\ Q\,x &= \begin{pmatrix} x_1\cos\phi & +x_2(-\sin\phi) \\ x_1\sin\phi & +x_2\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= ||x|| \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\phi & -\sin\alpha\sin\phi \\ \cos\alpha\sin\phi & +\sin\alpha\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= ||x|| \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\phi) \\ \sin(\alpha+\phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun untersuche:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

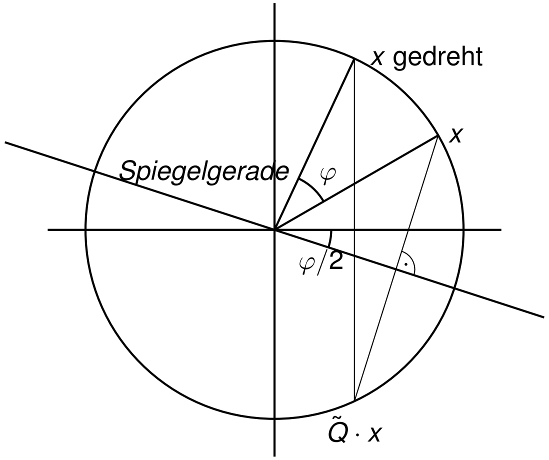
$$\begin{aligned} \tilde{Q}x &= ||x||\, \tilde{Q} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \\ &= ||x|| \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\phi) \\ -\sin(\alpha+\phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x \to ||x|| \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\phi) \\ \sin(\alpha+\phi) \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um } \phi$$

$$\to ||x|| \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\phi) \\ -\sin(\alpha+\phi) \end{pmatrix} \quad \text{Spiegelung an } x_1\text{- Achse.}$$

Zusammen: Spiegelung an der Gerade

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\tan(\frac{\phi}{2}) \end{pmatrix} \cdot \lambda \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$



$$\tilde{Q}\, x = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} x$$

Ende der Vorlesung 10

Vorlesung 11
15. bzw. 16. Januar 2013

Matrixkalkül 2

WIEDERHOLUNG

Gauss-Elimination
(Tafel)

Seite 154

LR - Zerlegung

Start: Beispiel $\rightarrow$ Tafel

$\vdots$

Darstellung der $k-ten$ Eliminationsschleife

$$A^{(k-1)}\begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & \cdots & \cdots & a_{1k}^{(k-1)} & a_{1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{1n}^{(k-1)} \\ 0 & \ddots & & \vdots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & & \vdots & a_{k+1,k}^{(k-1)} & a_{k+1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & a_{n,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

durch Matrixmultiplikation

Seite 154

$$A^{(k)}\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{1k}^{(k)} & a_{1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & \ddots & & \vdots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & 0 & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k}^{(k-1)} & a_{k+1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & a_{n,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Seite 155

Ziehe die $k-te$ Zeile

$$l_{ik} = a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} | i = k+1, \cdots, n$$

mal von der $i-ten$ Zeile ab,

$$A^{(k)} = M_k\, A^{(k-1)} \text{ mit}$$

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & -l_{k+1,k} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & -l_{k+2,k} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -l_{k+n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{bes. } (k+1)-te \text{ Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Seite 155

$$
\begin{aligned}
A^{(1)} &= M_1 \quad A^{(0)} \\
A^{(2)} &= M_2 \quad A^{(1)} \\
&\vdots \\
A^{(n-1)} &= M_{n-1} \quad A^{(n-2)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{bmatrix} =: R \text{ (Rechte obere Dreiecksmatrix)}$$

$$\Rightarrow R = M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot A$$

$$\overset{M_i \text{ regulär}}{\Rightarrow} A = M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} \cdot R$$

Zwei einfache Fakten

Seite 155

1. $$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ziehe k-te Zeile ab}$$

$$M_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Addiere k-te Zeile dazu}$$

Seite 155

2. $$M_1^{-1} \cdot \cdots \cdot M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Daher $\Downarrow$

Seite 155

$$A = \overset{\text{Links}}{L} \underset{\text{Zerlegung}}{\cdot} \overset{\text{Rechts}}{R} \qquad \text{mit}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & & \vdots \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \text{mit } l_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & r_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & r_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{Endergebnis der Elimination}$$

Wozu $A = L \cdot R$?

Seite 155

Dazu:

	Arbeit:
$A\,x = b$	Mit Gauss-El. $\boxed{\sim \frac{n^3}{3}}$
$\Leftrightarrow$	
$L\,\underbrace{R\,x}_{=:y} = b$	
$\Leftrightarrow$	
$L\,y = b$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$R\,x = y$	$\frac{n(n+1)}{2}$
	$\boxed{n^2}$

Faktor $\frac{n}{3}$ gespart!

Einspruch euer Ehren!
Löse $A\,x = b$ durch

$$x = A^{-1}\,b.$$

Auch n^2 Multiplikationen!

ABER!

Oft haben Matrizen Bandstruktur

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x & x & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ x & \ddots & & & x & \ddots & & & \vdots \\ x & & \ddots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ x & & & & \ddots & & & x & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \ddots & & & x \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & x \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

Diese bleibt LR-Zerlegung erhalten. Nicht aber bei A^{-1}

$\rightarrow$ Aufgaben, Skript

Leider sind nicht alle regulären Matrizen LR-zerlegbar.

Trauriges Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aber Gauss-mit-Pivotisierung klappt doch für alle regulären Matrizen.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$ LR-zerlegbar

Fazit

Wendet man auf A die bei Gauss mit Pivot ausgeführten Zeilenvertauschungen an $A \rightarrow \tilde{A}$, so ist $\tilde{A}$ LR-zerlegbar.

Seite 159

Wie stellt man

$$A \underset{\text{Zeilenvertauschen}}{\longrightarrow} \tilde{A}$$

mathematisch dar?

Antwort: Multiplikation mit sog. Permutationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{Zeilenvektoren von } A$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ \vdots \\ \alpha_{i_n} \end{pmatrix} \leftarrow \{i_1, \cdots, i_n\} = \{1, \cdots, n\} \text{ in evtl. anderer Reihenfolge.}$$

$$P := \begin{pmatrix} e_{i_1}^T \\ \vdots \\ e_{i_n}^T \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = PA$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} e_2^T \\ e_3^T \\ e_4^T \\ e_1^T \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Permutationsmatrizen sind orthogonal.

$$P\,P^T = \begin{pmatrix} e_{i_1}^T \\ \vdots \\ e_{i_n}^T \end{pmatrix} (e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) = E$$

Satz 4.42

Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär.

$$\Rightarrow$$

$\exists$ Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, so dass
$\tilde{A} := PA$ ist LR-zerlegbar.

Seite 160

Praktische Durchführung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{c}\text{Wende alle Zeilenvertauschungen} \\ \text{auch auf diesen Indexvektor an.}\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ l_{21} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \vdots \\ n \\ 5 \end{pmatrix} \leftarrow \text{gibt am Ende Vertauschungen an.}$$

Wann hat A selbst eine LR-Zerlegung?

Satz 4.44

Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär; seien

$$A_j := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix}, j = 1, \cdots, n$$

Dann gilt:

$$\boxed{A \text{ LR-zerlegbar } \Leftrightarrow A_j \text{ regulär}, j = 1, \cdots, n}$$

In diesem Fall ist LR-Zerlegung eindeutig.

Bemerkung: A_j heißt j-te Hauptuntermatrix.

Einschub (Abschnitt 4.6) Block- oder Super-Matrizen

$$\mathbb{R}^{(n,n)} \ni A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,N-1} & A_{1N} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,N-1} & A_{2N} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline A_{M-1,1} & A_{M-1,2} & \cdots & A_{M-1,N-1} & A_{M-1,N} \\ \hline A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{M,N-1} & A_{MN} \end{array}\right)$$

$A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n_{ij} m_j)}$ heißt Blockzerlegung von $A \leftarrow$ Blockmatrix.

Man kann mit Blockmatrizen rechnen wie mit „normalen Matrizen“

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} A_{1i} B_{i1} & \sum_{i=1}^{3} A_{1i} B_{i2} \\ \sum_{i=1}^{3} A_{2i} B_{i1} & \sum_{i=1}^{3} A_{2i} B_{i2} \end{pmatrix}$$

Achtung die Reihenfolge beachten! (Matrixprodukt nicht kommutativ).

Es müssen nur die „Block-Dimensionen“ und die Dimensionen der „Blöckchen“ so sein, dass

1. Die „äußere Form stimmt“
   Blockspaltenzahl der ersten =
   Blockzeilenzahl der zweiten Matrix
2. Die Blöckchenprodukte
   $\underbrace{A_{ki}}_{r} B_{ij}\} r$
   ausführbar sind. Achtung: Reihenfolge beachten

Beispiele

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot (5, \; 6) \\ (7 \;\; 8) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 9 \cdot (5, \; 6) \end{array}\right) \checkmark$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \cdot (1, \; 2) + (2, \; 3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot (1, \; 2) + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right) \checkmark$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \end{array}\right) = \text{klappt nicht}$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} (1, \; 2) + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \hline 7 \; (1, \; 2) + (8, \; 9) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right) \checkmark$$

usw.

$$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, B \in \mathbb{R}^{(n,p)}$$

Spezielle Zeilen/Spalten Blockzerlegungen.

$$A = (a^1, \cdots, a^n) = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}$$

$$B = (b^1, \cdots, b^p) = \begin{pmatrix} B^1 \\ \vdots \\ B^n \end{pmatrix}$$

a) $AB = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} (b^1, \cdots, b^p) = \begin{pmatrix} A^1 b^1 & \cdots & A^1 b^p \\ \vdots & & \\ A^m b^1 & \cdots & A^m b^p \end{pmatrix}$

$A^i b^j$ definiert, da A^i, b^j „gleich lang“

b) $AB = (a^1, \cdots, a^n) \begin{pmatrix} B^1 \\ \vdots \\ B^n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a^k B^k$ $\leftarrow$ Das können gewisse Vektor- und Parallelrechner gut.

$a^k B^k$ = dyadisches Produkt

Fall $p = 1 \Rightarrow$ Spaltenorientiertes Matrix-Vektor-Produkt

c) $AB = A(b^1, \cdots, b^p) = (Ab^1, \cdots, Ab^p)$

d) $AB = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A^1 B \\ \vdots \\ A^m B \end{pmatrix}$ $\square$

Wann hat A LR-Zerlegung? (Wiederholung)

Satz 4.44

Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär; seien

$$A_j := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix}, j = 1, \cdots, n$$

Dann gilt:

$$\boxed{A \text{ LR-zerlegbar } \Leftrightarrow A_j \text{ regulär}, j = 1, \cdots, n}$$

In diesem Fall ist LR-Zerlegung eindeutig.

Bemerkung: A_j heißt j-te Hauptuntermatrix.

Beweis: (Induktion nach n)

$n = 1 \qquad A = a_{11} \neq 0$

$1 \cdot a_{11} = L \cdot R$ (eindeutig) ✓

Annahme: Behauptung für $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen richtig.

Für $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ setze an $A = LR$ und zerlege

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & A_{n-1} & & \vdots & v \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ \hline * & \cdots & w^T & \cdots & * & a_{nn} \end{array}\right)$$

$$A = LR = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ * & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & L_{n-1} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * & 1 & 0 \\ \hline * & \cdots & x^T & \cdots & * & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccccc|c} * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_{n-1} & & \vdots & y \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & * \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & r_{nn} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$

(i) $A_{n-1} = L_{n-1} R_{n-1}$ eindeutig. (Induktionsannahme)

(ii) $w^T = x^T R_{n-1} \Leftrightarrow R_{n-1}^T x = w \quad \Rightarrow x$ eindeutig.

(iii) $v = L_{n-1} y \Rightarrow y$ eindeutig

(iv) $a_{nn} = x^T y + 1 \cdot r_{nn} \Rightarrow r_{nn}$ eindeutig und R_n, L_n mit A_n regulär.

$\square$

Ende der 11. Vorlesung