Lineare Gleichungssysteme

Seite 98

Im „linearen Gleichungssystem“

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

sind die Koeffizienten a_{ij} und die rechten Seiten b_i vorgegeben. Gesucht werden die Unbekannten x_j.

Gleichungssysteme können zeilen- oder spaltenorientiert betrachtet werden:

Spaltenorientiert

1. Vorgegeben: 1 kg Mehl, 2 kg Zucker

   Plan: Erstellen von VanillekipferIn und Haselnussplätzchen. Außer Mehl und Zucker alle Zutaten quasi unbeschränkt.

   1 Haselnussplätzchen 25 g Zucker, 5 g Mehl
   1 Vanillekipferl 10 g Zucker, 10 g Mehl

   H = Anzahl Haselnussplätzchen, V = Anzahl Vanillekipferl

	Haselnuss	Vanille	Ergebnis
Zucker	$0.025 \cdot H$	$+0.01 \cdot V$	$= 2$
Mehl	$0.005 \cdot H$	$+0.01 \cdot V$	$= 1$

   $H = 50, \quad V = 75$

Zeilenorientiert

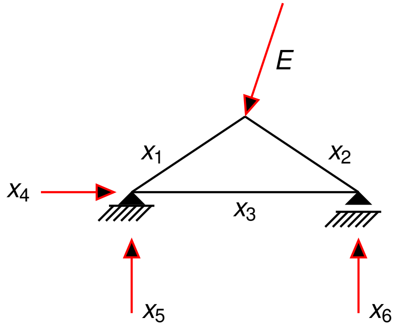
2. Von $p \in \Pi_3$ weiß man, dass $p(0) = 1, p(1) = 2, p(-1) = 5$ und $p(-2) = 0$ ist.

   Ansatz: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
   unbekannt ($\sim a_j$)

$p(0) = 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 \cdot a_0 & + & 0 \cdot a_1 & + & 0^2 \cdot a_2 & + & 0^3 \cdot a_3 & = & 1 \\ 1 \cdot a_0 & + & 1 \cdot a_1 & + & 1^2 \cdot a_2 & + & 1^3 \cdot a_3 & = & 2 \\ 1 \cdot a_0 & + & (-1) \cdot a_1 & + & (-1)^2 \cdot a_2 & + & (-1)^3 \cdot a_3 & = & 5 \\ 1 \cdot a_0 & + & (-2) \cdot a_1 & + & (-2)^2 \cdot a_2 & + & (-2)^3 \cdot a_3 & = & 0 \\ & & & & & & & & \\ a_{i1}\ \ x_1 & & a_{i2}\ \ x_2 & & a_{i3}\ \ x_3 & & a_{i4}\ \ x_4 & & b_i \end{array}$$

3. „Kräfte“ in Stabwerk gesucht



   vergleiche früher und Skript.

Fragen zu

Seite 104

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
1\cdot a_0 & + & 0\cdot a_1 & + & 0^2\cdot a_2 & + & 0^3\cdot a_3 & = & 1\\
1\cdot a_0 & + & 1\cdot a_1 & + & 1^2\cdot a_2 & + & 1^3\cdot a_3 & = & 2\\
1\cdot a_0 & + & (-1)\cdot a_1 & + & (-1)^2\cdot a_2 & + & (-1)^3\cdot a_3 & = & 5\\
1\cdot a_0 & + & (-2)\cdot a_1 & + & (-2)^2\cdot a_2 & + & (-2)^3\cdot a_3 & = & 0
\end{array}$$

1. **Gibt es eine Lösung?**
2. **Gibt es keine Lösung?**
3. **Gibt es mehrere Lösungen?**
4. **Wie sieht die Lösungsmenge aus?**
5. **Wie kann ich diese Fragen schnell und genau beantworten?**

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
1\cdot a_0 & + & 0\cdot a_1 & + & 0^2\cdot a_2 & + & 0^3\cdot a_3 & = & 1\\
1\cdot a_0 & + & 1\cdot a_1 & + & 1^2\cdot a_2 & + & 1^3\cdot a_3 & = & 2\\
1\cdot a_0 & + & (-1)\cdot a_1 & + & (-1)^2\cdot a_2 & + & (-1)^3\cdot a_3 & = & 5\\
1\cdot a_0 & + & (-2)\cdot a_1 & + & (-2)^2\cdot a_2 & + & (-2)^3\cdot a_3 & = & 0
\end{array}$$

$$\Longleftrightarrow$$

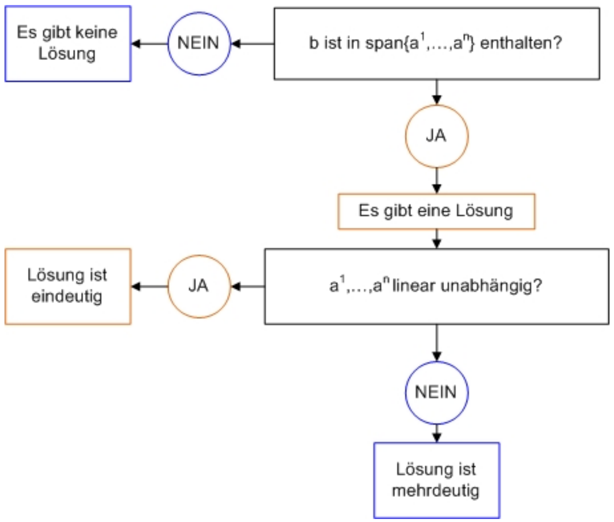
$$\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a^j \cdot x_j = b,\ a^j, b \in \mathbb{R}^m}$$

Sichtweise also: Kombiniere b linear aus den a^j.

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a^j \cdot x_j = b,\ a^j, b \in \mathbb{R}^m}$$



Seite 105

Lösung mehrdeutig: $a^1, \cdots, a^n$ l.a. $\Rightarrow$

$$\exists\, z_1, \cdots, z_n : \sum_{j=1}^{n} a^j \cdot z_j = 0, \begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} \neq 0.$$

$\Rightarrow$ Mit Lösung $(x_1, \cdots, x_n)^T$ von $\sum a^j \cdot x_j = b$ ist auch $(x_1 + z_1, \cdots, x_n + z_n)^T$ eine Lösung.

Denn:
$\sum_{j=1}^{n} a^j (x_j + z_j) = \sum_{j=1}^{n} a^j\, x_j + \sum_{j=1}^{n} a^j\, z_j = b + 0 = b.$

Seite 105

Fall

a) $b \in span\{a^1, \cdots, a^n\}$
b) $a^1, \cdots, a^n$ linear abhängig

a) $\Rightarrow \exists\, x_1, \cdots, x_n \,:\, \sum_{j=1}^{n} a^j\, x_j = b$
b) $\Rightarrow \exists\, z_1, \cdots, z_n \,:\, \sum_{j=1}^{n} a^j\, z_j = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ ist Lösung } \forall\, \mu.$$

Seite 105

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist spezielle Lösung des sog.

inhomogenen Systems. (Def. 3.6) $\sum_{j=1}^{n} a^j\, x_j = b$

$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ ist Lösung des sog.

homogenen Systems $\sum_{j=1}^{n} a^j \cdot x_j = 0$

Seite 105

Satz 3.8

Man erhält alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{n} a^j \cdot x_j = b,$$

indem man zu einer Lösung

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dieses Systems alle Lösungen des homogenen Systems

$$\sum_{j=1}^{n} a^j \cdot x_j = 0$$

addiert.

Seite 106

Beweis

Die Differenz zweier Lösungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des inhomogenen Systems ist wegen

$$0 = b - b = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a^j\, x_j}_{b} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a^j\, y_j}_{b} = \sum_{j=1}^{n} a^j (x_j - y_j)$$

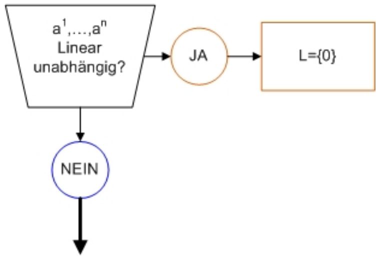
Lösung des homogenen Systems. □

Seite 106

$\sum_{j=1}^{n} a^j \cdot x_j = b$ Lösungsmenge $\qquad$ $\sum_{j=1}^{n} a^j \cdot x_j = 0$ Lösungsraum

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\text{speziell}} \quad + L \qquad \longleftarrow L$$

L?



Seite 106

$$L = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a^j x_j = 0 \right\} \text{ bei } n > r = \text{ dim span}\{a^1, ..., a^n\}$$

O.b.d.A. $\quad a^1, ..., a^r \quad$ l.u.

(S) $\quad \sum_{j=1}^{r} a^j x_j = -\sum_{j=r+1}^{n} a^j x_j \qquad \left(\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a^j x_j = 0\right)$

1. $\text{span}\{a^1, ..., a^r\} = \text{span}\{a^1, ..., a^n\}$
   $\Rightarrow -\sum_{j=r+1}^{n} a^j x_j \in \text{span}\{a^1, ..., a^r\}$, ($S$ lösbar nach $x_1, ...x_r$)
2. $a^1, ..., a^r$ l.u. $\Rightarrow$ S eindeutig lösbar.
3. $(x_1, ...x_r, x_{r+1}, ..., x_n)^T \in L \Rightarrow$
   $(x_1, ..., x_r)$ durch $(x_{r+1}, ..., x_n)$ eindeutig bestimmt.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1(x_{r+1}, ..., x_n) \\ \vdots \\ x_r(x_{r+1}, ..., x_n) \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_{r+1}, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\};$$

$$L = span \left\{ \begin{pmatrix} x_1(1, 0, ..., 0) \\ \vdots \\ x_r(1, 0, ..., 0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} x_1(0, ..., 0, 1) \\ \vdots \\ x_r(0, ..., 0, 1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Satz 3.9

Sei $r := dim\ span\{a^1, \cdots, a^n\}$ und L der Lösungsraum von

$$\sum_{j=1}^{n} a^j x_j = 0$$

Dann ist $dim\ L = n - r$

Speziell

$$a^1, \cdots, a^n \in \mathbb{R}^m \Rightarrow dim\ span\{a^1, \cdots, a^n\} \le m.$$

Bei $m < n$ (weniger Gleichungen (unterbestimmt) als Unbekannte) ist $L \neq \{0\}$.
Es gibt dann also stets nichttriviale Lösungen von $\sum_{j=0}^{n} a^j \cdot x_j = 0$.

Beispiele

1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_4=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Basis des $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ lösbar, da b bestimmt kombinierbar.

Beispiele

1)

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_4=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

linear unabhängig $\Rightarrow r = 2$

$n = 4 \Rightarrow dim\, L = 2$

Eine spezielle Lösung erhält man leicht, wenn man x_3 und x_4 Null setzt und nach x_1 und x_2 auflöst.

$$x_s = (2, 1, 0, 0)^T$$

Eine partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

2 linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung bekommen wir aus

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}x_2=-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}x_3-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_4$$

Allgemeine Lösung = $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \mu,\nu \in \mathbb{R}.$

□

Ende der Vorlesung 6

Vorlesung 7
4. bzw. 5. Dezember 2013

Gleichungssysteme -
Lösungen und Lösungsmethoden

Seite 107

Wiederholung, 1. Teil

Satz 3.9

Sei $r := dim\, span\{a^1, \cdots, a^n\}$ und L der Lösungsraum von

$$\sum_{j=1}^{n} a^j\, x_j = 0$$

Dann ist $dim\, L = n - r$

Wiederholung, 2. Teil

Tafelbeispiele

Seite 107

Lösbarkeit bei $m = n$

$\sum_{j=1}^n a^j\, x_j = 0$ hat nur die 0 als Lösung.

$\Rightarrow dim\, L = 0 \Rightarrow$ Satz 3.9 $n - r = 0$

$\Rightarrow r := dim\, span\{a^1, \cdots, a^n\} = n$

$\Rightarrow a^1, \cdots, a^n$ l. u. also Basis von $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a^j\, x_j = b$ eindeutig lösbar $\forall\, b$.

$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a^j\, x_j = 0$ eindeutig lösbar .

$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a^j\, x_j = 0$ hat nur die Nulllösung.

KREISSCHLUSS

Seite 107

Satz 3.10

Ein lineares $n \times n$ - System ist genau dann für alle rechten Seiten eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung hat.

Satz 3.10 (noch mal)

(1)

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{array}$$

hat für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\Leftrightarrow$$

(2)

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}\,x_n & = & 0 \end{array}$$

hat nur die Lösung $x = 0$.

Hat dagegen (2) eine nichttriviale Lösung, so gilt für (1)

ENTWEDER

(1) hat keine Lösung

$$b \notin span\{a^1, \cdots, a^n\}$$

ODER

(1) hat ∞ - viele Lösungen

$$x = x_{\text{speziell}} + L$$

Lösungsraum von (2)

Zum Merken: Spezialfall

$n = 1$

$n \times n-$ System $\quad a \cdot x = b$

$a \neq 0$	homogenes System hat nur 0-Lösung $a \cdot x = 0$ $\Rightarrow x = 0$	inhomogenes System hat genau eine Lösung $\forall\, b$ $a \cdot x = b$ $x = \frac{b}{a}$
$a = 0$	homogenes System hat mehrere Lösungen $0 \cdot x = 0$, x beliebig	inhomogenes System Keine Lösung $0 \cdot x = b \neq 0$ geht nicht ∞ - viele Lösungen $0 \cdot x = b = 0$ x beliebig

Zentraler Algorithmus

Seite 108

Ziel nun

sogenannter **GAUSS - ALGORITHMUS**

Formt ein Gleichungssystem um in ein anderes mit gleicher Lösungsmenge, welches aber „netter“ ist als das Ausgangsproblem.

Erlaubte Umformungen

(i) Multipliziere eine Gleichung mit Zahl $\neq 0$

(ii) Addiere Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen

(iii) Vertausche zwei Gleichungen.

Was sind „nette“ Gleichungssysteme?

$\longrightarrow$ Tafel (Δ) (∇)

Kurz - Schreibweise für

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Schreibe kurz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \quad m \times (n+1) - \text{ Matrix}$$

Seite 109

$$\begin{array}{cccccc} \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \\ x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n-1} \quad x_n \quad r.S. \end{array}$$

weitere erlaubte Umformung

(iv) Vertausche $i-te$ und $j-te$ Spalte (nicht die letzte Spalte). Aber merke, dass dadurch die Position von x_i und x_j vertauscht wurden.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (\text{Fall } m > n)$$

a_{ii} = Diagonalelemente der Matrix

Ziel

Eliminiere alle Elemente unterhalb der Diagonale!

GAUSS - ELIMINATION.

Seite 109

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Parallel Projektorbeispiel

Seite 109

1. Schritt

WENN $a_{11} = 0$, finde Element $a_{ij} \neq 0$

WENN dieses nicht existiert $\Rightarrow$ STOP

SONST: Tausche
$i-te$ und 1. Zeile
$j-te$ und 1. Spalte,
so dass danach
$a_{11} \neq 0$ ist. (a_{11} heißt Pivot - Element des 1. Schrittes.)

Für $i = 2, \cdots, m$

Ziehe das a_{i1}/a_{11} - fache der ersten Zeile von der $i-ten$ Zeile ab.

Resultat:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{bmatrix}$$

2. Schritt (Wenn nicht schon STOP)

Wende 1. Schritt auf das kleinere System

$$\begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & & & & \\ a_{m2}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{bmatrix}$$

an. (Falls nicht STOP eintritt).

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{bmatrix}$$

i-ter Schritt

Wende 1. Schritt an auf das Subsystem

$$\begin{matrix} a_{ii}^{(i-1)} & \cdots & a_{in}^{(i-1} & b_i^{(i-1)} \\ \vdots & & & \\ a_{mi}^{(i-1)} & \cdots & a_{mn}^{(i-1)} & b_m^{(i-1)} \end{matrix}$$

von

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(i-1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(i-1)} & b_1^{(i-1)} \\ 0 & a_{22}^{(i-1)} & & & & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & \vdots & & a_{i-1,i-1}^{(i-1)} & & & a_{i-1,n}^{(i-1)} & b_{i-1}^{(i-1)} \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_{ii}^{(i-1)} & \cdots & a_{in}^{(i-1} & b_i^{(i-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{mi}^{(i-1)} & \cdots & a_{mn}^{(i-1)} & b_m^{(i-1)} \end{bmatrix}$$

Seite 110

i-ter Schritt

Wiederhole bis zur letzten Gleichung oder bis das Restsystem verschwindet.

Resultat der ersten Bearbeitungsphase

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
a_{11}^{(s)} & a_{12}^{(s)} & \cdots & a_{1s}^{(s)} & a_{1,s+1}^{(s)} & \cdots & a_{1n}^{(s)} & b_1^{(s)} \\
0 & a_{22}^{(s)} & \cdots & a_{23}^{(s)} & a_{2,s+1}^{(s)} & \cdots & a_{2n}^{(s)} & b_2^{(s)} \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\
\vdots & & \ddots & a_{ss}^{(s)} & a_{s,s+1}^{(s)} & \cdots & a_{sn}^{(s)} & b_3^{(s)} \\
\vdots & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{s+1}^{(s)} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m^{(s)}
\end{array}\right]$$

$a_{ii} \neq 0$

Seite 111

Phase 2

Es folgt eine theoretische Phase 2:

(wird praktisch aber so NICHT ausgeführt!)

Seite 111

Phase 2 (Theorie)

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
a_{11}^{(s)} & a_{12}^{(s)} & \cdots & a_{1s}^{(s)} & a_{1,s+1}^{(s)} & \cdots & a_{1n}^{(s)} & b_1^{(s)} \\
0 & a_{22}^{(s)} & \cdots & a_{23}^{(s)} & a_{2,s+1}^{(s)} & \cdots & a_{2n}^{(s)} & b_2^{(s)} \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\
\vdots & & 0 & a_{ss}^{(s)} & a_{s,s+1}^{(s)} & \cdots & a_{sn}^{(s)} & b_3^{(s)} \\
\vdots & & \vdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{s+1}^{(s)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_m^{(s)}
\end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

Seite 112

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,s+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & 1 & \ddots & \vdots & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{s,s+1} & \cdots & a'_{sn} & b'_s \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b'_{s+1} \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b'_m
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lllllll}
1x_1 & & & +a'_{1,s+1}x_{s+1}+ & \cdots + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
& 1x_2 & & +a'_{2,s+1}x_{s+1}+ & \cdots + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
& & \ddots & & & & & \\
& & 1x_s & +a'_{s,s+1}x_{s+1}+ & \cdots + & a'_{sn}x_n & = & b'_s \\
& & & & & 0 & = & b'_{s+1} \\
& & & & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & 0 & = & b'_m
\end{array}$$

Fall 1

$(b'_{s+1}, \cdots, b'_m)^T \neq 0 \quad \Rightarrow$ keine Lösung

Fall 2

$(b'_{s+1}, \cdots, b'_m)^T = 0$

$x_{s+1}, \cdots, x_n$ frei wählbar.

Allgemeine Lösung

$$x = \begin{bmatrix} b'_1 & - & (a'_{1,s+1}x_{s+1} & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n) \\ b'_2 & - & (a'_{2,s+1}x_{s+1} & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n) \\ \vdots & & & & & & \\ b'_s & - & (a'_{s,s+1}x_{s+1} & + & \cdots & + & a'_{sn}x_n) \\ x_{s+1} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ x_n & & & & & & \end{bmatrix}$$

Seite 113

$$x = \begin{bmatrix} b'_1 & - & (a'_{1,s+1} & x_{s+1} & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n) \\ b'_2 & - & (a'_{2,s+1} & x_{s+1} & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n) \\ \vdots & & & & & & & \\ b'_s & - & (a'_{s,s+1} & x_{s+1} & + & \cdots & + & a'_{sn}x_n) \\ & & & x_{s+1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & x_n \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -a'_{1,s+1} \\ \vdots \\ -a'_{s,s+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x_{s+1} + \begin{bmatrix} -a'_{1,s+2} \\ \vdots \\ -a'_{s,s+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x_{s+2} + \cdots + \begin{bmatrix} -a'_{1n} \\ \vdots \\ -a'_{sn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_n}$$

Diese $n-s$ Vektoren spannen den Lösungsraum L des homogenen Problems auf.

$$dim\, L = n - r, dim\, L = n - s \Rightarrow s = r.$$

Seite 113

In

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,s+1} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a'_{s,s+1} & \dots & a'_{sn} \\ 0 & & \dots & \dots & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{bmatrix}$$

sind offenbar s Zeilen - Vektoren l. u.

Wenn wir zeigen können, dass sich beim Gauss - Algorithmus die Anzahl linear unabhängiger Zeilen nicht ändert, haben wir mit $r = s$ gezeigt:

Satz 3.18 (und Definition von „Rang“)

In einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

ist die Maximalzahl l. u. Spalten gleich der Maximalzahl l. u. Zeilen ($r = s$).

Diese Zahl heißt der Rang von A.

Wir zeigen allgemeiner

Lemma 3.17

Sei V ein Vektorraum, seien

$$v^1, \cdots v^k \in V, j \in \{1, \cdots, k-1\}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Dann gilt

$$v^1, \cdots, v^k \text{ l. u. } \Leftrightarrow v^1, \cdots, v^{k-1}, v^k + \lambda\, v^j \text{ l. u.}$$

und die linearen Erzeugnisse sind gleich.

Beweis

„$\Rightarrow$“

$$\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i\, v^i + \mu_k (v^k + \lambda v^j) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{k} \mu_i\, v^i + (\mu_j + \lambda \mu_k) v^j = 0 \Leftrightarrow$$

a) $\mu_i = 0,\ i = 1. \cdots, k;\ i \neq j$

b) $\left\{ \begin{array}{l} \mu_j + \underbrace{\lambda \mu_k}_{} = 0 \\ = 0 \text{ nach a)} \end{array} \right\}$ also auch $\mu_j = 0$

$\square$

Rückweg „$\Leftarrow$“ genauso:

$$v^1, \cdots, v^{k-1}, v^k + \lambda v^j$$

addiere $-\lambda v^j$ zum letzten Vektor $\square$

Verfahren zur Gewinnung einer Basis von $span\{v^1, \cdots, v^k\}$

Schreibe $v^1, \cdots, v^k$ zeilenweise in eine Matrix.

Wende die erste Phase des Gauss - Algorithmus an.

Mache Spaltenvertauschungen rückgängig.

$\Rightarrow$ Die von Null verschiedenen Zeilenvektoren sind die gewünschte Basis.

Beispiel

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&1\\0&2&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&2\\0&1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 3\\ \hline 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0\end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0\end{array}$$

$$\nearrow$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 3\\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Praktische Durchführung des Gauss - Algorithmus bei $m = n$.

A Eliminationsphase

Ersetze: „Suche von $a_{ij} \neq 0$ in Restmatrix“
durch „Suche $|a_{ij}| > |a_{kj}| \,\forall\, k \geq j$ in aktueller erster Spalte“
des Restsystems. Tausche dieses „Pivot - Element“ in die aktuelle 1. Zeile des Restsystems.
Ist bei dieser „Spaltensuche“ $|a_{ij}| < \text{Tol}$, so signalisiere „numerische Singularität“.
Wird solches nicht festgestellt, so hat das System nach Phase 1 die Form.

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ & a_{22} & & & \vdots\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & a_{nn} & b_n\end{array}\right]$$

B Lösungsphase

$$x_n := b_n / a_{nn}$$

$$x_i := (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j) / a_{ii}$$

mit $i = n - 1(-1)1$

Spare Speicher für x

$$b_n := b_n / a_{nn}$$

$$b_i := (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} b_j) / a_{ii}$$

mit $i = n - 1(-1)1$

Lösung am Ende im Speicher von b.

Beispiel 3.21 (Pivotisierung)

Rechnung mit 3-stelliger Gleitpunktarithmetik

[d.h.: nach jedem Rechenschritt werden die führenden 3 Stellen der Mantisse (gerundet) weiterverwendet].

$$\begin{array}{rrl} 10^{-4} \cdot x_1 & +x_2 = & 1 \quad 10^{-4} = 0.100 \cdot 10^{-3} \\ x_1 & +x_2 = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{exakt}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & \underbrace{1 - 10000}_{-9999 \approx -10000} & -10000 \end{array}\right) \overset{\text{Rundung}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & -10^{-4} & -10^{-4} \end{array}\right)$$

Rückwärts: $x_2 = 1$

1. Gleichung : $10^{-4} x_1 + 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

Tatsächliche Lösung: $x_1 = -1.00010\cdots$, $x_2 = 1.00010\cdots$

Mit Spaltenpivot siehe:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \underbrace{1 - 10^{-4}}_{\approx 1} & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Rückwärts einsetzen

$x_2 = 1(1.00010)$, $x_1 = -1(-1.00010)$

Fehler: $\sim 10^{-4}$ $\quad \sim 10^{-4}$

gut!

Ende der Vorlesung 7