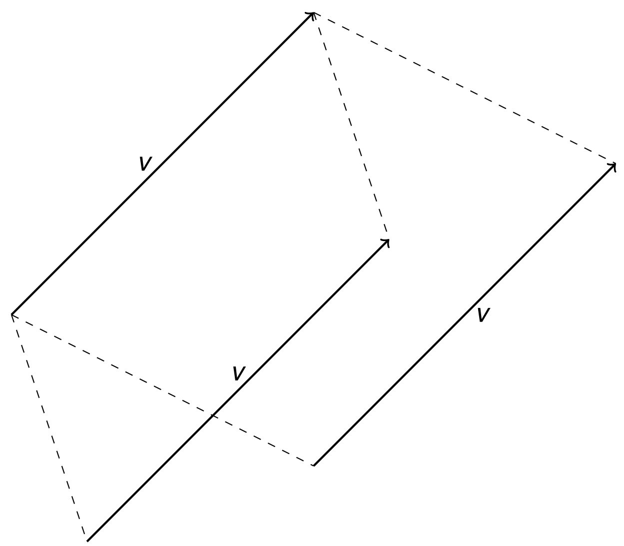
Vorlesung 2
30. bzw. 31. Oktober 2013

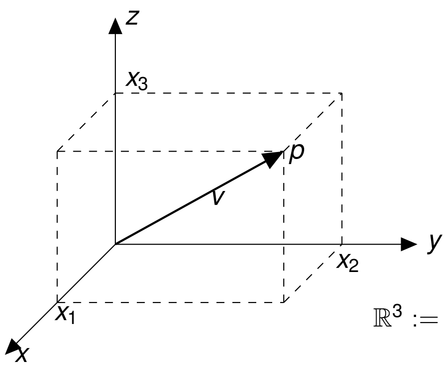
Vektorrechnung im Anschauungsraum 1

Seite 38

Vektoren



Seite 38



$$\mathbb{R}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Seite 38

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \cong \text{Vektoren der Ebene.}$$

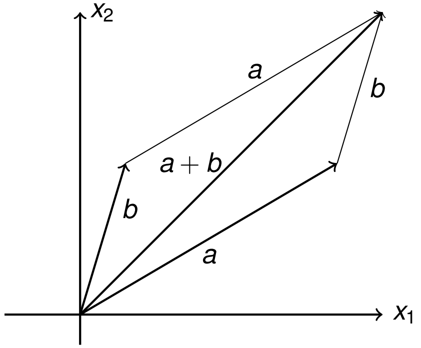
$$\mathbb{R}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \cong \text{Vektoren im Raum.}$$

Seite 39

Addition von Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

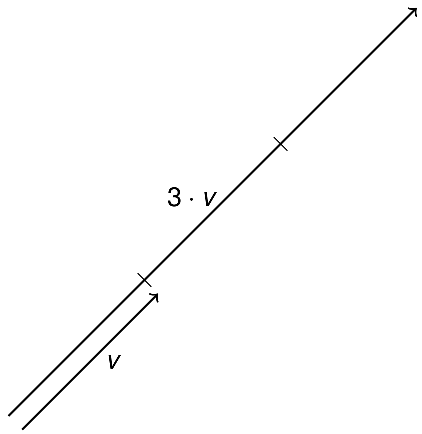
Geometrisch: Aneinanderfügen der Vektorpfeile



Seite 39

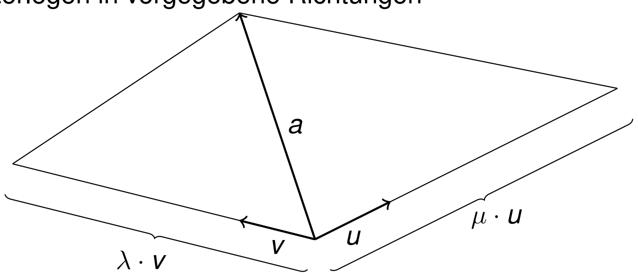
Multiplikation mit Skalaren (reellen Zahlen)

$$a \cdot \lambda = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \lambda = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \lambda \\ a_2 \cdot \lambda \\ a_3 \cdot \lambda \end{pmatrix}$$



Seite 39

Zerlegen in vorgegebene Richtungen



$a = \lambda\, v + \mu\, u$

In $\mathbb{R}^2$ jeder Vektor in Richtungen u, v, die nicht parallel sind.

In $\mathbb{R}^3$ in u, v, w die nicht in einer Ebene liegen.

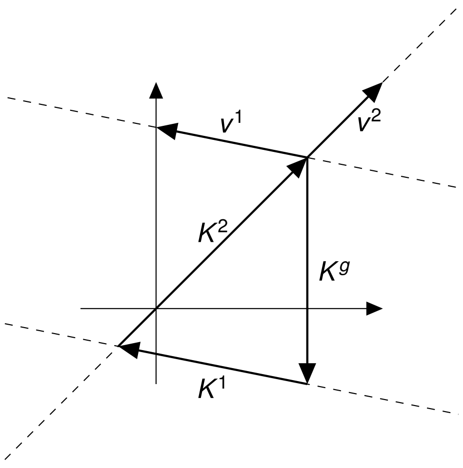
Zerlegung eines Vektors in vorgegebene Richtungen:

Eines der häufigsten Probleme in der Mathematik!

Thema des ganzen 1. Semesters!

Seite 40

Beispiel 2.1 (zeichnerische Lösung)



Seite 40

Beispiel (rechnerische Lösung)

$K^1 := \mu_1\, v^1 \qquad K^2 := \mu_2\, v^2 \qquad K^g$ gegeben.

Ruhebedingung:
$K^1 + K^2 + K^g = 0$
$v^1\, \mu_1 + v^2\, \mu_2 = -K^g$

Komponentenweise:

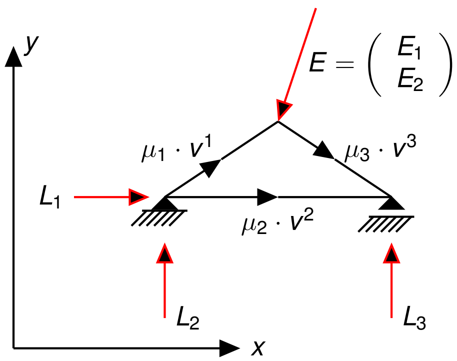
$v_1^1\, \mu_1 + v_1^2\, \mu_2 = -K_1^g$

$v_2^1\, \mu_1 + v_2^2\, \mu_2 = -K_2^g$

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} K_1^g \\ K_2^g \end{pmatrix}.$$

Zahlenbeispiel —> Tafel!



$$L_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1\, v^1 + \mu_2\, v^2 = 0$$

Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $n \gg 3$ treten auf.

$$\left.\begin{array}{l} L_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1\, v^1 + \mu_2\, v^2 = 0 \\ E - \mu_1\, v^1 + \mu_3\, v^3 = 0 \\ L_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu_2\, v^2 - \mu_3\, v^3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} L_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} L_2 + \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ -v_1^1 \\ -v_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mu_1 + \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ -v_1^2 \\ -v_2^2 \end{pmatrix} \mu_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1^3 \\ v_2^3 \\ -v_1^3 \\ -v_2^3 \end{pmatrix} \mu_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} L_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_1 \\ -E_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

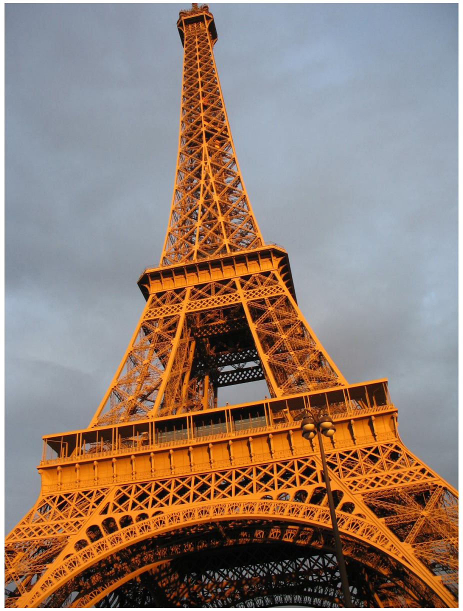


Bild:Pixelio, Frank Weyen

Zählen Sie mal die Knoten!

Seite 41

Satz 2.3: Eigenschaften der Vektoroperationen

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3 \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(i) $a + b = b + a$

(ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(iii) $\exists!\, x := b - a \in \mathbb{R}^3$ mit $a + x = b$

(iv) $(\lambda \cdot \mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$

(v) $\lambda(a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$

(vi) $(\lambda + \mu)a = \lambda\, a + \mu\, a$

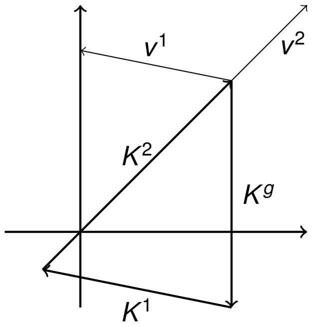
(vii) $1 \cdot a = a$.

Aufgaben:

$0 \cdot a = \Theta$ $\exists : \Theta \in \mathbb{R}^3$ mit $a + \Theta = a \,\forall\, a$.	Aus Eigenschaften folgerbar.

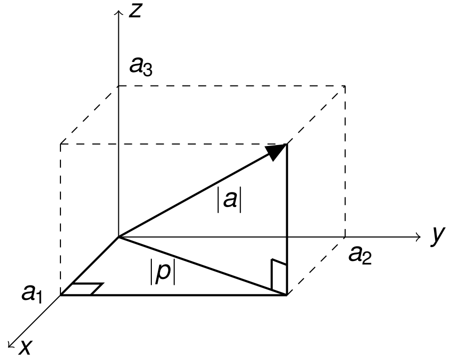
Seite 41

Frage: Wie gross sind K^1, K^2?



Seite 41

Länge $|a|$ eines Vektors a ?



$$|p|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$|a|^2 = |p|^2 + a_3^2$$

$$|a|^2 = |p|^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Betrag

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Seite 42

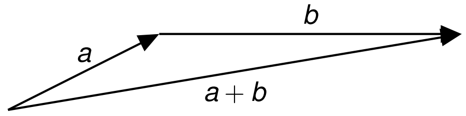
Satz 2.5: Eigenschaften der „Längenfunktion“ $|\cdot|$

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^3, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,

$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$|\lambda\, a| = |\lambda| \cdot |a|$

$|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)



Seite 42

Folgerung aus der Dreiecksungleichung

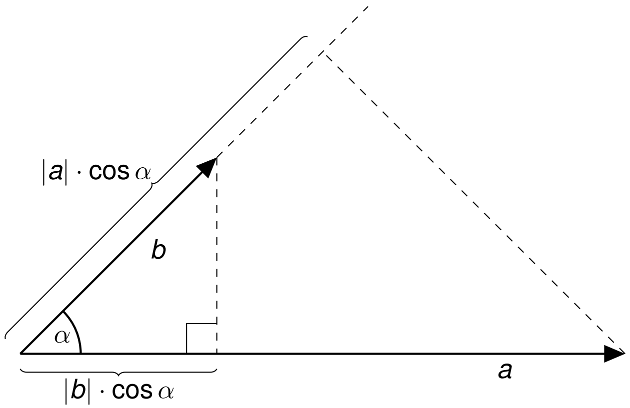
Wie bei dem reellen Betrag zeigt man auch

$\big||u| - |v|\big| \leq |u - v| \qquad (\Leftrightarrow \pm(|u| - |v|) \leq |u - v|)$.

Hinweis: Stetigkeit des Betrags.

Seite 44

Skalar-Produkt = Inneres-Produkt = Punkt-Produkt

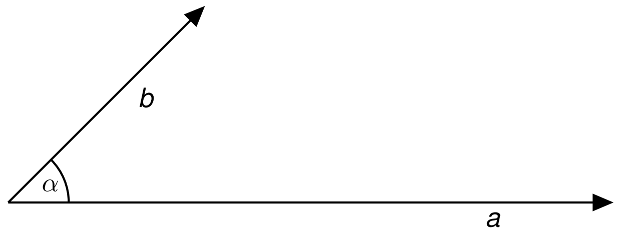


Skalar-Produkt

$\langle a, b\rangle := |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$

Das Skalarprodukt ist eine Zahl.

$$\langle a, b\rangle = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$$



$|a| \cdot \cos\alpha =$ Länge der Projektion von a auf die Richtung von b

$|b| \cdot \cos\alpha =$ Länge der Projektion von b auf die Richtung von a.

$$\langle a, b \rangle = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$$

Berechnungsformel für $\cos\alpha$:

$\cos\alpha = \frac{\langle a,b\rangle}{|a|\cdot|b|}$

Wenn $\langle a, b\rangle$ irgendwie anders berechnet werden kann, findet man einen Algorithmus für $cos(\alpha)$.

Wir werden sehen:

$$\text{Man kann} \quad \langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_i\, b_i .$$

Dafür ist etwas Arbeit nötig!

Achtung! In vielen Schulen $a \cdot b$ statt $\langle a, b\rangle$
Das ist gefährlich!
Was ist $a \cdot b \cdot c$?
Antwort: QUATSCH!

Seite 44

Satz 2.6: Eigenschaften des Skalarproduktes

(i) $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle \qquad \forall\, a, b$

(ii) $\langle a + b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle \qquad \forall\, a, b, c$

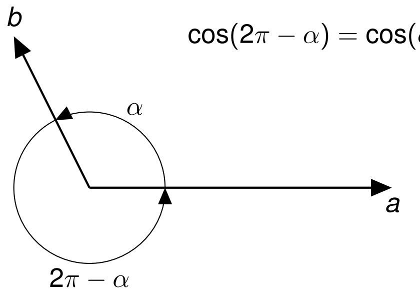
(iii) $\langle \lambda\, a, b\rangle = \lambda\, \langle a, b\rangle \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$

(iv) $\langle a, a\rangle = |a|^2 > 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Seite 45

Beweis: $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$

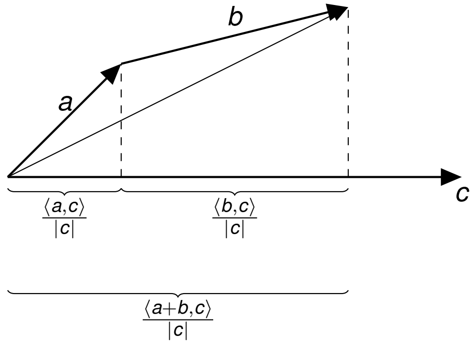
$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$



(i)

Seite 45

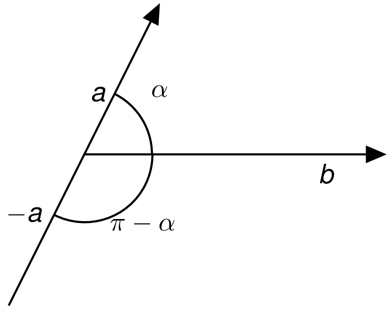
Beweis: $\langle a+b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$



(ii)

Seite 45

Beweis: $\langle \lambda\, a, b\rangle = \lambda \langle a, b\rangle$



$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$

(iii)

(iv) klar.

Seite 45

Beweis von: $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^n a_i\, b_i$

$$\text{Mit } e_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = \begin{pmatrix} a_1\\a_2\\a_3 \end{pmatrix} = a_1\, e_1 + a_2\, e_2 + a_3\, e_3$$

$$\Rightarrow b = \begin{pmatrix} b_1\\b_2\\b_3 \end{pmatrix} = b_1\, e_1 + b_2\, e_2 + b_3\, e_3$$

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle &= \left\langle \textstyle\sum_{i=1}^3 a_i\, e_i\,, \sum_{j=1}^3 b_j\, e_j \right\rangle\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i\, b_j\, \langle e_i, e_j\rangle\end{aligned}$$

$$\text{Wegen } \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\underbrace{\Rightarrow \langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^3 a_i\, b_i}_{\text{Ist das nun nicht einfach?}}$$

Seite 46

$$|\langle a, b\rangle| = \big||a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha\big| \le |a|\cdot|b|$$

Also

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^3 a_i\, b_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^3 a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cauchy - Schwarzsche - Ungleichung CSU

$$\big|\langle a, b\rangle\big| \le |a|\cdot|b|$$

Damit zeigt man die Dreiecksungleichung:

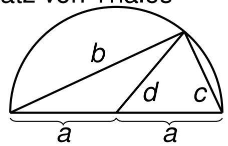
$$\begin{aligned}|a+b|^2 &= \langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a\rangle + 2\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle\\ &\le |a|^2 + 2|a|\cdot|b| + |b|^2\\ &= (|a|+|b|)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |a+b| \le |a| + |b|.$$

Seite 47

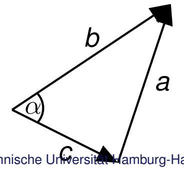
Anwendungen:

1. Satz des Pythagoras $\rightarrow$ Spezialfall von Cos-Satz
2. Satz von Thales

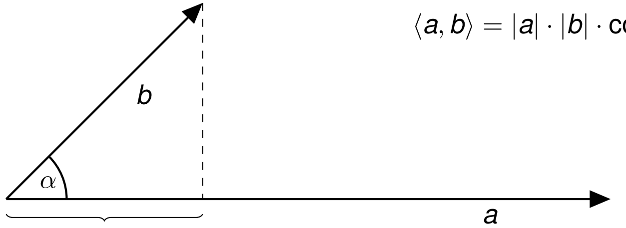


$$\begin{aligned}\langle b,c\rangle &= \langle a+d,-a+d\rangle \\ &= -\langle a,a\rangle+\langle a,d\rangle-\langle d,a\rangle+\langle d,d\rangle \\ &= -|a|^2+|d|^2=0\end{aligned}$$

3. Cosinus - Satz

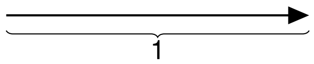


$$\begin{aligned}|a|^2 &= \langle a,a\rangle=\langle b-c,b-c\rangle \\ &= |b|^2+|c|^2-2|b|\cdot|c|\cos\alpha\end{aligned}$$

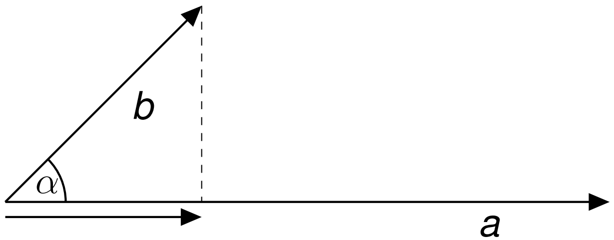


$$\langle a,b\rangle=|a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha$$

$$|b|\cdot\cos\alpha = \frac{\langle a,b\rangle}{|a|}\cdot\frac{a}{|a|}$$



Folie zum Übers-Bett-Hängen

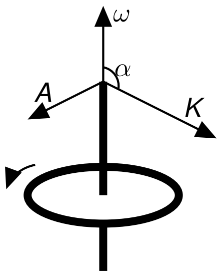


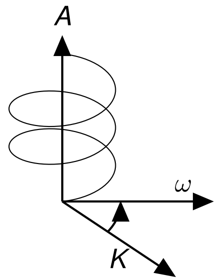
Projektion von b auf a-Richtung

$$=\frac{\langle a,b\rangle}{|a|\cdot|a|}\cdot a=\frac{\langle a,b\rangle}{\langle a,a\rangle}\cdot a$$

Seite 47

Kreuzprodukt





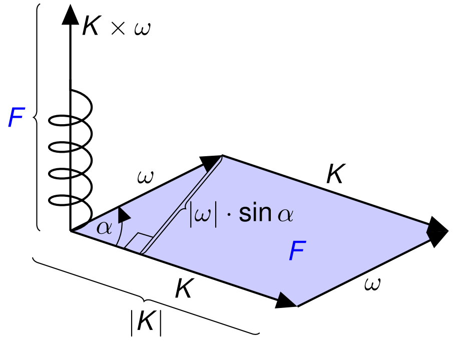
(1) $|A|=|\omega|\cdot|K|\cdot\sin\alpha$
(2) A senkrecht zu K und ω.
(3) K ω A Rechtssystem

Kreuzprodukt von K und ω

$A=K\times\omega$

Seite 48

Interpretation von $|K \times \omega| = |K| \cdot |\omega| \cdot \sin\alpha$



$|K| \cdot |\omega| \cdot \sin\alpha = F =$
Fläche des durch K und ω aufgespannten Parallelogrammes.

Seite 48

Allgemein also

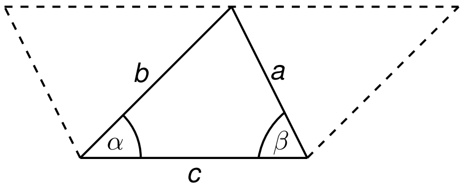
Seien $a, b \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ mit $\angle(a, b) = \alpha$. Dann ist $a \times b \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

(i) $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot |\sin\alpha|$
(ii) $a \times b \perp a, b$
(iii) $(a, b, a \times b)$ Rechtssystem

Bei a oder $b = 0$
Sei $a \times b = 0$

Seite 48

Beispiel 2.9 (Sinus-Satz)



$|a| \sin\beta = |b| \sin\alpha$

Beweis

$$\begin{aligned} |F| &= \frac{1}{2}|b \times c| = \frac{1}{2}|b|\,|c| \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}|a \times c| = \frac{1}{2}|a| \cdot |c| \cdot \sin\beta \quad \square \end{aligned}$$

Seite 49

Achtung:

Skalarprodukt ohne Schwierigkeiten auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinerbar.

Aber: Kreuzprodukt lebt nur in $\mathbb{R}^3$

Satz 2.10: Eigenschaften des Kreuzproduktes

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^3 \;\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $a \times b = -b \times a$
(ii) $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$
(iii) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
(iv) $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - \langle a, b\rangle^2$

Ende der Vorlesung 2

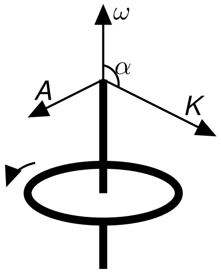
Vorlesung 3
6. bzw. 7. November 2013

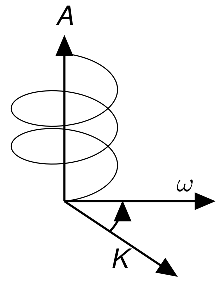
Vektorrechnung im Anschauungsraum 2

Kurze Wiederholung

Seite 47

W: Kreuzprodukt



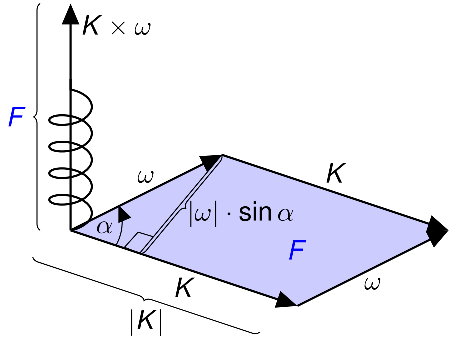


(1) $|A| = |\omega| \cdot |K| \cdot \sin\alpha$
(2) A senkrecht zu K und ω.
(3) $K\ \omega\ A$ Rechtssystem

Kreuzprodukt von K und ω

$A = K \times \omega$

W: Interpretation von $|K \times \omega| = |K| \cdot |\omega| \cdot \sin\alpha$



$|K| \cdot |\omega| \cdot \sin\alpha = F =$
Fläche des durch K und ω aufgespannten Parallelogrammes.

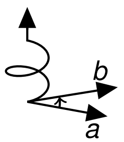
EIGENSCHAFTEN

Satz 2.10: Eigenschaften des Kreuzproduktes

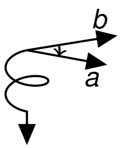
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^3\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $a \times b = -b \times a$
(ii) $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$
(iii) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
(iv) $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - \langle a, b\rangle^2$

Beweis.



(i) $a \times b$
$=$



$-b \times a$

(ii) selber machen

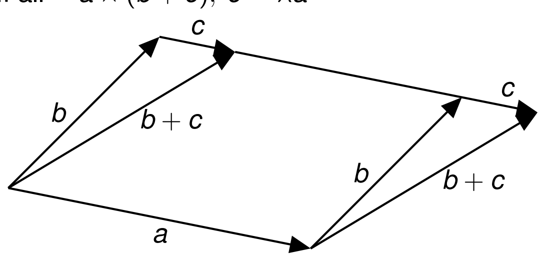
(iv)

$$\begin{aligned} |a \times b|^2 &= |a|^2 \cdot |b|^2 \sin^2\alpha = |a|^2 \cdot |b|^2 (1 - \cos^2\alpha) \\ &= |a|^2 \cdot |b|^2 - \underbrace{|a|^2 |b|^2 \cos^2\alpha}_{\langle a,b\rangle^2} \end{aligned}$$

$\square$

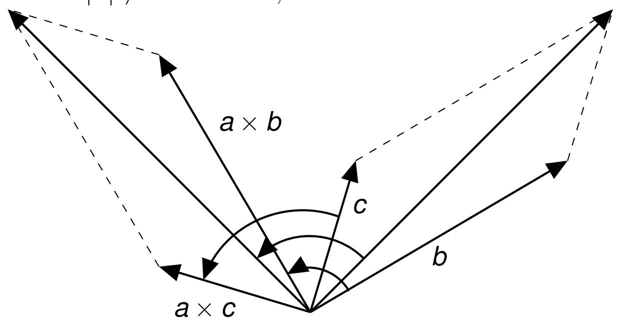
Beweis: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

(iii) 1.Fall $\quad a \times (b + c),\ c = \lambda a$



Beweis: $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

(iii) 2. Fall $|a| \neq 0$ und $a \perp b$, $a \perp c$



$a\perp$ auf Zeichenebene (nach oben!)

Beweis: $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

(iii) 3. Fall $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ beliebig.
(Wird auf Fälle 1 und 2 zurückgeführt).
Wir zeigen die Behauptung nur für $|a| = 1$.
Denn, wenn für $\tilde{a} = \frac{1}{|a|} a$
$\tilde{a} \times (b+c) = \tilde{a} \times b + \tilde{a} \times c$ richtig,
dann auch (nach (ii)) ...
$a \times (b+c) = |a|\tilde{a} \times (b+c) = |a|\tilde{a} \times b + |a|\tilde{a} \times c = a \times b + a \times c.$

immer noch Beweis: $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

Also o.B.d.A.: $|a| = 1$
Setze dann

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= b - \langle a, b\rangle a \qquad \perp a \\ \tilde{c} &= c - \langle a, c\rangle a \qquad \perp a. \end{aligned}$$

Dann

$$a \times (b+c) = a \times (\tilde{b} + \langle a,b\rangle a + \tilde{c} + \langle a,c\rangle a) = a \times ((\tilde{b}+\tilde{c}) + \underbrace{(\langle a,b\rangle + \langle a,c\rangle)a}_{\lambda a})$$

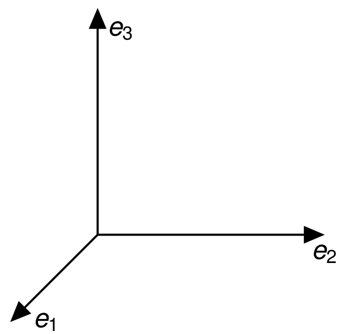
mit Fall 1 $\quad = a \times (\tilde{b} + \tilde{c}) + \underbrace{a \times (\lambda a)}_{=0 \text{ nach (ii) , (i)}}$

mit Fall 2 $\quad = a \times \tilde{b} + a \times \tilde{c} = a \times (b - \langle a,b\rangle a) + a \times (c - \langle a,c\rangle a)$

mit Fall 1 $\quad = a \times b + a \times c. \quad \square$

Berechnung von $a \times b$ ohne Winkel α

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 \\ e_3 \times e_1 &= e_2 \end{aligned}$$

Einsetzen von $a = \sum a_i e_i \quad b = \sum b_j e_j$
in $a \times b$ liefert:

Seite 51

$$a \times b = \sum a_i \cdot e_i \times \sum b_j \cdot e_j$$
$$= \sum_i \sum_j a_i \cdot b_j \cdot e_i \times e_j$$
$$= \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Wer soll das behalten?

Seite 51

Keiner!

Definition 2.11 Matrix, Determinante

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m \times n)},\ a_{ij} \in \mathbb{R}$$

heißt (m, n) - Matrix.
m ist die Zeilenzahl, n die Spaltenzahl der Matrix A. Sind Zeilenzahl und Spaltenzahl gleich, so heißt eine Matrix quadratisch.

Seite 51

Jeder quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ wird eine reelle Zahl $\det A \in \mathbb{R}$ zugeordnet, die Determinante von A.

Bei

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

schreibt man auch

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} := \det A.$$

Seite 51

Wir definieren $\det A$ für $A \in \mathbb{R}^{nn}$ zunächst nur für $n = 2$ und $n = 3$.

n=2

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Seite 51

n = 3

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} :=$$

$$+a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longleftarrow 2 \times 2 \text{ - Determinanten}$$

$$-a_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \longleftarrow \text{nach } n = 2 \text{ Regel}$$

$$+a_{13} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \longleftarrow \text{ausrechnen}$$

Anmerkung: $n = 4$ greift analog auf $n = 3$ Definition zurück usw.

Seite 51

Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ und e_1, e_2, e_3 die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ setze formal

$$A(a,b) := \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \det A(a,b) &= e_1(a_2\, b_3 - b_2\, a_3) \\ &\quad - e_2(a_1\, b_3 - b_1\, a_3) \\ &\quad + e_3(a_1\, b_2 - b_1\, a_2) \\ &= \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - b_2\, a_3 \\ b_1\, a_3 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - b_1\, a_2 \end{pmatrix} \\ &= a \times b. \end{aligned}$$

Also:

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Seite 51

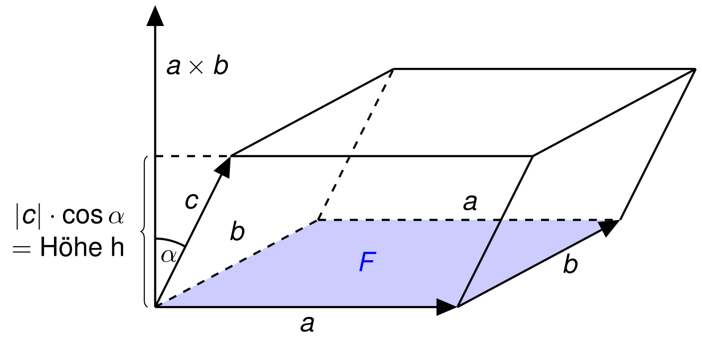
Kreuzprodukt, Zusammenfassung

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - b_2\, a_3 \\ b_1\, a_3 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - b_1\, a_2 \end{pmatrix}$$

Bzw:

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Seite 52



Spatprodukt

$$\langle a \times b, c\rangle = \underbrace{|a \times b|}_{\text{Grundfläche F}} \cdot \underbrace{|c| \cdot \cos(\alpha)}_{\text{Höhe h}}$$

= Volumen des durch a, b, c aufgespannten Spates

Spat = Parallelepiped = Parallelotop

Seite 53

Berechnung des Spatprodukts

$$a \times b = \det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} e_1 - \det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} e_2 + \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} e_3$$

$$=: u_1\, e_1 - u_2\, e_2 + u_3\, e_3$$

$$V := \langle a \times b, c\rangle = \langle u_1\, e_1 - u_2\, e_2 + u_3\, e_3, c\rangle = u_1 \underbrace{\langle e_1, c\rangle}_{c_1} - u_2 \underbrace{\langle e_2, c\rangle}_{c_2} + u_3 \underbrace{\langle e_3, c\rangle}_{c_3}$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} c_1 - \det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} c_2 + \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} c_3$$

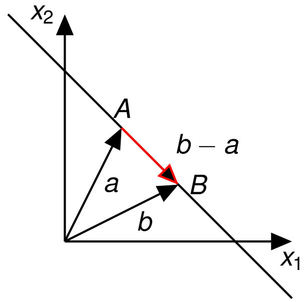
$$= \det\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \det\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \left(= \det\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

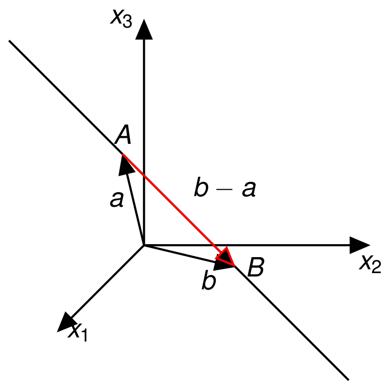
Da „$V = 0 \Leftrightarrow a, b, c$ in einer Ebene“, ergibt sich neben der Berechnungsmethode für V ein einfacher Test für „a, b, c in Ebene.“

Seite 53

Etwas Elementargeometrie

Geraden:





$$\underbrace{x = a + \lambda\, u, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Punkt (a) - Richtungs (u) - Darstellung der Gerade oder Parameterdarstellung (Parameter λ)

z.B.: $u = b - a$.

$x_1 = a_1 + \lambda u_1 \quad \lvert (-\frac{u_2}{u_1})$ $x_2 = a_2 + \lambda u_2$ Œ $\quad u_1 \neq 0$	$x_1 = a_1 + \lambda u_1$ $x_2 = a_2 + \lambda u_2$ $x_3 = a_3 + \lambda u_3$ Œ $\quad u_1 \neq 0$
$x_2 - \frac{u_2}{u_1} x_1 = a_2 - \frac{u_2}{u_1} a_1$ $\Leftrightarrow$ $-u_2\, x_1 + u_1\, x_2 = -u_2\, a_1 + u_1\, a_2$	$-u_2\, x_1 + u_1\, x_2 = -u_2\, a_1 + u_1\, a_2$ $-u_3\, x_1 + u_1\, x_3 = -u_3\, a_1 + u_1\, a_3$

Gleichungsdarstellungen.

Lemma 2.13

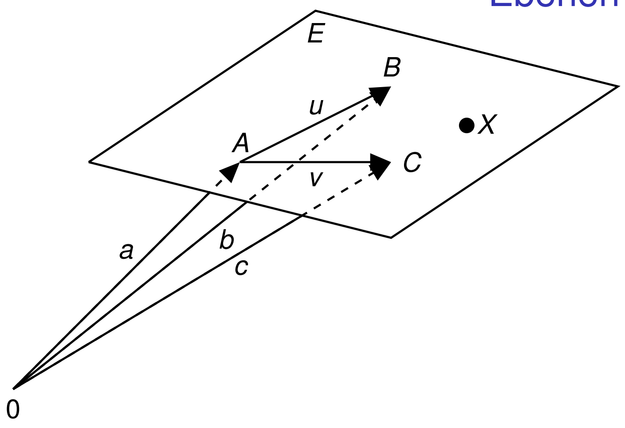
Mit $a^i, u^i \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2$ seien $M_i := \{x| \quad x := a^i + \lambda\, u^i, \lambda \in \mathbb{R}\} \quad i = 1, 2.$

<u>Behauptung</u>

$$M_1 = M_2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$a^2 - a^1 = \mu\, u^1 \text{ für ein } \mu \in \mathbb{R}$$
$$\text{und}$$
$$u^2 = \kappa\, u^1 \text{ für ein } \kappa \in \mathbb{R}, \kappa \neq 0.$$

Beweis: $\rightarrow$ Skript.
Interpretation: $\rightarrow$ Tafel!

Ebenen



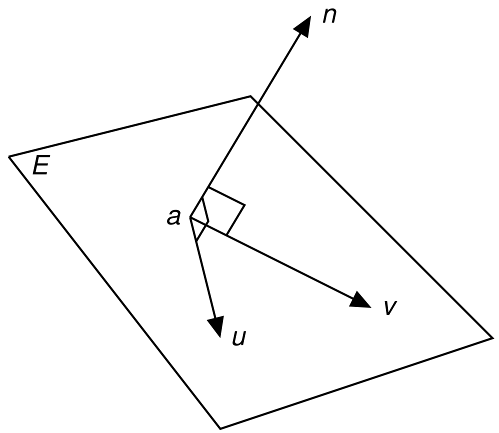
Parameterdarstellung von $X \in E$
$x :=$ Ortsvektor von X
$x = a + \lambda u + \mu\, v$
u, v Vektoren „in E“ nicht parallel, etwa $u = b - a, v = c - a$.

Elimination von λ und μ aus $x_i = a_i + \lambda\, u_i + \mu\, v_i \quad i = 1, 2, 3$ führt auf Gleichungsdarstellung

$$n_1\, x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = \delta,$$
$$x_i, n_i, n_1, n_2, n_3, \delta \in \mathbb{R}$$

$$\langle n, x\rangle = \delta$$
$$\langle n, a\rangle = \delta$$
$$\langle n, x\rangle = \delta = \langle n, a\rangle$$
$$\Rightarrow \langle n, x - a\rangle = 0$$

d.h. $(n \perp x - a \quad \forall\, x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad$ (n senkrecht auf Ebene.)



Beispiel:

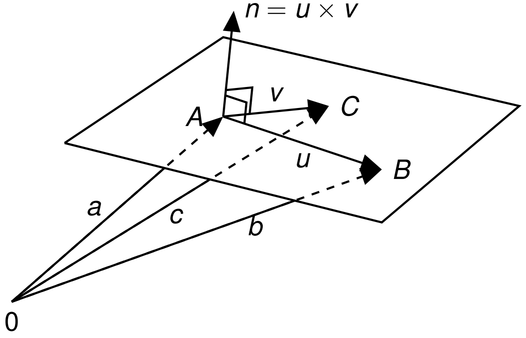
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} x_1 = 1 + \lambda + \mu & *1 \\ x_2 = 1 \quad\;\; + \mu & *(-2) \\ x_3 = 1 + \lambda - \mu & *(-1) \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{x_1 - 2x_2 - x_3 = -2}$$

$$n_1 = 1, n_2 = -2, n_3 = -1, \delta = -2$$

Seite 58



Wenn man eine Normale n von E hat und einen Punkt a, so findet man eine Gleichung ganz schnell.
$\langle n, x - a \rangle = 0$

Woher n nehmen?

$$\left.\begin{array}{l} u = b - a \\ v = c - a \end{array}\right\} \underbrace{n = u \times v.}_{\text{Fertig!}}$$

Seite 59

Noch besser:
Verwende statt Normalenvektor n den

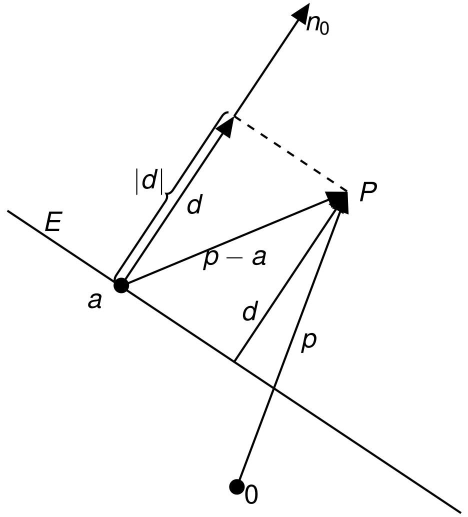
Einheitsnormalenvektor

$$n^0 := \frac{1}{|n|} n$$

Hessesche Normalform

Die Form
$\langle n^0, x - a \rangle = 0$
der Ebenengleichung heißt Hessesche Normalform

Seite 59



$d = \langle n^0, p - a \rangle n^0$ $\qquad$ d = Projektion von $p - a$ auf n^0
$|d| = |\langle n^0, p - a \rangle|$
Abstand von Punkt P zu Ebene E.

Seite 59

Hessesche Normalform einer Ebene

$x = a + \lambda\, u + \mu\, v \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\langle \frac{u \times v}{|u \times v|}, x - a \rangle = 0.$

<u>Analog im $\mathbb{R}^2$ Parameterform:</u> $x = a + \lambda\, u \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

Normale auf Gerade ,n, muss senkrecht stehen auf u.

$n := \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \qquad \langle n, u \rangle = -u_2 \cdot u_1 + u_1 \cdot u_2 = 0$

$n^0 = \begin{pmatrix} -\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \\ \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \end{pmatrix}$

<u>Geradengleichung:</u>

$\langle n^0, x - a \rangle = 0$ Hesse - Normalform.

Ende der Vorlesung 3

Vorlesung 4
13. bzw. 14. November 2013

Allgemeine Vektorräume - Einführung

Seite 65

Allgemeine Vektorräume

Definition 2.18:

$V \neq \emptyset$ mit Addition

$u, v \longrightarrow u + v \in V$

und skalarem Vielfachen

$u \in V, \lambda \in \mathbb{R} \to \lambda \cdot u \in V$

heißt VEKTORRAUM, wenn

$\forall u, v, w \in V$ und $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ möglich. Dann komplexer.)

(i) $u + v = v + u$

(ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(iii) $\exists! x \in V : u + x = v.$

(iv) $(\lambda \cdot \mu) u = \lambda(\mu\, u)$

(v) $\lambda(u + v) = \lambda\, u + \lambda\, v$

(vi) $(\lambda + \mu) u = \lambda\, u + \mu\, u$

(vii) $1 \cdot u = u.$

Seite 66

Beispiele

1. $\mathbb{R}^2$& $\mathbb{R}^3$

2. $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n \right\}$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

3. a). E eine Ebene des $\mathbb{R}^3$ durch 0.$+, \cdot\lambda$ wie im $\mathbb{R}^3$.
   b). G eine Gerade des $\mathbb{R}^n$ durch 0.$+, \cdot\lambda$ wie in $\mathbb{R}^n$.

Seite 67

4. a) $\Pi_n =$ Menge aller Polynome
   $p(x) = \sum_{j=0}^{n} p_j x^j \quad , p_j \in \mathbb{R}$, mit
   $(p+q)(x) = \sum_{j=0}^{n} (p_j + q_j) x^j$ und
   $\lambda\, p(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda\, p_j\, x^j$.

   b) $T_n :=$ Menge aller trigonometrischen Polynome

   $s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

Seite 67

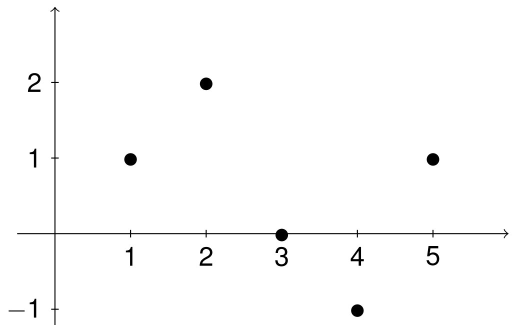
5. M Menge $V = \{f : M \to \mathbb{R}\}$
   Addition und Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ punktweise erklärt

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in M$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), x \in M.$$

Zur Vektor-Interpretation von Funktionen

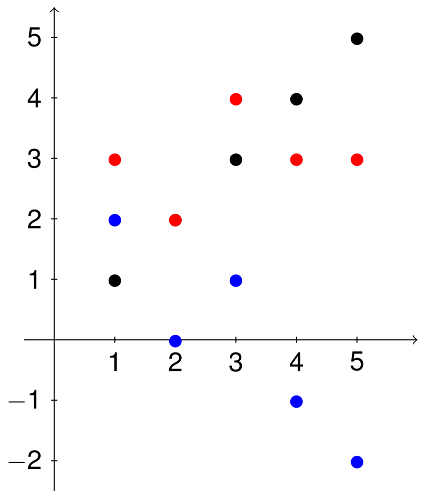
$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Funktion: $\{1,2,3,4,5\} \Rightarrow \mathbb{R}$

$x(1) = 1,\ x(2) = 2,\ x(3) = 0,\ x(4) = -1,\ x(5) = 1$

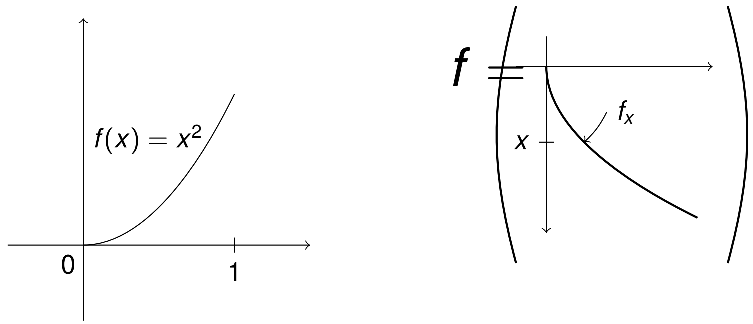


Vektor-Addition ist Funktionen Addition

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Funktion ist kontinuierlicher Vektor



Seite 68

6. Menge aller $(m, n) -$ Matrizen .

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} \cdots \lambda a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \lambda a_{m1} \cdots \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{m1} \cdots b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \cdots a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} \cdots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seite 68

Definition 2.23

Sei V ein Vektorraum.
$W \subset V$ heißt Untervektorraum oder Teilvektorraum von V, wenn W mit den Verknüpfungen von V selbst wieder Vektorraum ist.

Vorteil der Begriffsbildung

„V Vektorraum“ bewiesen.
$W \subset V$. Dann für $u, v, w \in W$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ klar:

(i) $u + v = v + u$
(ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$
(iv) $(\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda(\mu \cdot u)$
(v) $\lambda(u + v) = \lambda\, u + \lambda\, v$
(vi) $(\lambda + \mu)u = \lambda\, u + \mu\, u$
(vii) $1 \cdot u = u$.

Für „W Vektorraum“ fehlt nur noch

(iii) $(\exists! x \in W : u + x = w)\, \forall\, u, w \in W$.

Seite 68

Satz 2.23

Sei V Vektorraum und $W \subset V, W \neq \emptyset$. Dann

$\boxed{\text{W ist Vektorraum}}$

$\Longleftrightarrow$

SEHR PRAKTISCH

a) $u + v \in W \quad \forall\, u, v \in W$

b) $\lambda\, u \in W \quad \forall\, u \in W, \lambda \in \mathbb{R}$

Beweis: „$\Rightarrow$„: klar !

„$\Leftarrow$“ : zu zeigen : $\{a), b)\} \Rightarrow (iii)$.

Seien $u, v \in W$. Dann löst $x := v + (-1)u$ die Gleichung $u + x = v$ in V eindeutig.

Dies ist auch in W der Fall, wenn nur $x \in W$. Aber

$$\underbrace{v + \underbrace{(-1)u}_{\in W \text{ nach } b)}}_{\in W \text{ nach } a)} \in W$$

$\square$

Seite 69

Beispiele für Untervektorräume

A. $\Pi_n = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}\}$
ist Teilraum des Vektorraumes der reellen Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

B. Dito $T_n := \{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \sin k\, x + b_k \cos k\, x, a_0, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}\}$

C. $G := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | n_1\, x + n_2\, y = 0\} \quad n_1^2 + n_2^2 \neq 0$

ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$ (Eine Gerade durch Null, Normale $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$).

denn $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \in G, i = 1, 2 \Rightarrow \begin{cases} n_1\, x_1 + n_2\, y_1 = 0 \\ n_1\, x_2 + n_2\, y_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow n_1(x_1 + x_2) + n_2(y_1 + y_2) = 0$ also $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in G.$

und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (n_1\, x + n_2\, y) = 0$

$\Rightarrow n_1(\lambda\, x) + n_2(\lambda\, y) = 0$ also $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G.$

Seite 69

Beispiele für Untervektorräume

A. $\Pi_n = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}\}$
ist Teilraum des Vektorraumes der reellen Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

B. Dito $T_n := \{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \sin k\, x + b_k \cos k\, x, a_0, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}\}$

C. $G := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | n_1\, x + n_2\, y = 1\} \quad n_1^2 + n_2^2 \neq 0$

ist kein Teilraum von $\mathbb{R}^2$ (Eine Gerade nicht durch Null, Normale $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$).

denn $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \in G, i = 1, 2 \Rightarrow \begin{cases} n_1\, x_1 + n_2\, y_1 = 1 \\ n_1\, x_2 + n_2\, y_2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow n_1(x_1 + x_2) + n_2(y_1 + y_2) = 2 \neq 1$ also $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \notin G.$

und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (n_1\, x + n_2\, y) = 1$

$\Rightarrow n_1(\lambda\, x) + n_2(\lambda\, y) = \lambda$ also $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \notin G$ für $\lambda \neq 1$.

Seite 69

D. = Beispiel 3 (Skript)

Sei L die Menge der Lösungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ des homogenen Gleichungssystems

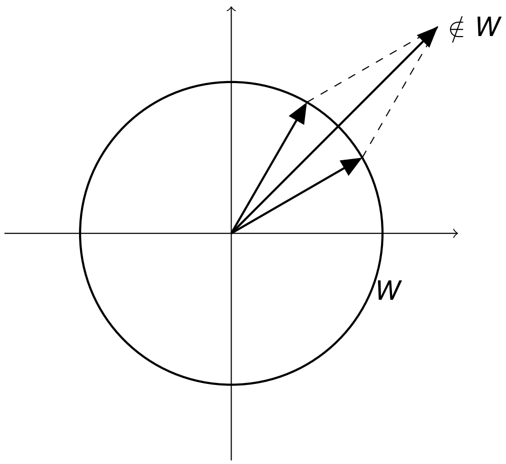
$$\begin{array}{cccc} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = 0 \end{array}$$

Dann sind mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ auch

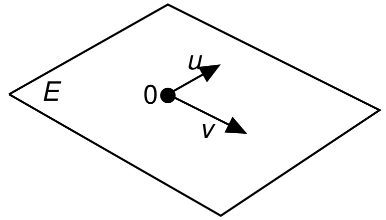
$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

Lösungen des Gleichungssystems. $\Rightarrow L$ ist Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

E. $W := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ kein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.



Seite 69



Parameterdarstellung einer Ebene E durch den Nullpunkt mit zwei nicht-parallelen Vektoren u und v der Ebene.
$E = \{\lambda\, u + \mu\, v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Ziel:
Verallgemeinerung einer solchen Darstellung auf allgemeine Vektorräume.

Frage:
Was sind dort $u, v, \cdots$?

Zunächst mal umgekehrt!
$u, v, w, \cdots$ gegeben. Bastle daraus einen Vektorraum.

Seite 69

Definition 2.25 “Linearkombination“

A. Sind $v^1, \cdots, v^r \in V$ Vektoren, so heißt jeder Vektor

$$v = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j\, v^j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

eine Linearkombination von

$$v^1, \cdots, v^r$$

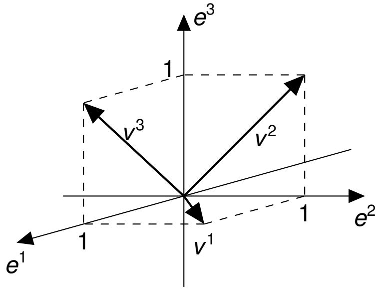
B. Ist jeder Vektor aus V Linearkombination von $v^1, \cdots, v^r$, so “spannen $v^1, \cdots, v^r$ den Raum V auf “

Seite 70

Beispiele

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^3$ spannen $\mathbb{R}^3$ auf:

   “Beweis“: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\, e^1 + x_2\, e^2 + x_3\, e^3$



2.
$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

spannen auch den $\mathbb{R}^3$ auf, denn

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}(x_1+x_2-x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}(x_2+x_3-x_1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}(x_1-x_2+x_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1+x_2-x_3+x_1-x_2+x_3 \\ x_1+x_2-x_3+x_2+x_3-x_1 \\ x_2+x_3-x_1+x_1-x_2+x_3 \end{pmatrix} \right]$$

Wie man darauf kommt? $\rightarrow$ Später!!

Seite 70

3. $u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ spannen nicht $\mathbb{R}^3$ auf, da

$e^3 \notin span\{u^1, u^2, u^3\}$. Sie spannen aber den Unterraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_3 = 0 \right\}$$ auf.

Frage: Warum ist V Unterraum?

Seite 70

4. $1, x, x^2, \cdots, x^n$ spannen Π_n auf.

5.
$$\begin{matrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) & \cdots & \cos(nx) \\ & \sin(x) & \sin(2x) & \cdots & \sin(nx) \end{matrix}$$

spannen

$T_n := \{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) | a_0, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}\}$ auf.

Seite 70

Satz 2.27

Sei V Vektorraum und $v^1, ., v^r \in V$.

(i) $W := \{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v^j : \lambda_j \in \mathbb{R}\}$ ist Teilraum von V.

(ii) Für jeden Teilraum $U \subset V$ mit $v^1, \cdots, v^r \in U$ gilt $U \supset W$; d.h. W ist kleinster Teilraum mit $v^1, \cdots, v^r \in V$.

Bezeichnung 2.28

$W := \{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v^j | \lambda_j \in \mathbb{R}\} =: span\{v^1, \cdots, v^r\}$

$v^1, \cdots, v^r$ erzeugendes System von W.

Seite 71

Beweis von Satz 2.27

(i) $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^r \mu_i v_i \in W \Rightarrow \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \mu_i) v^i \in W$

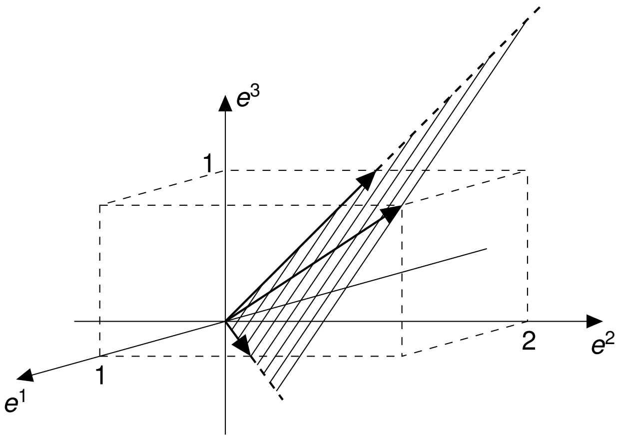
$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \in W, \nu \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{i=1}^r \nu \lambda_i v^i \in W$

(ii) $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_i v^i \in U \Rightarrow \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 \in U$

$\Rightarrow \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v^3 \in U \Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \in U \square$

Beispiele

A. $span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Ebene durch den Nullpunkt



B. $span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist dieselbe Ebene; denn

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Linearkombination der Vektoren $(1,1,0)^T$ und $(0,1,1)^T$.

C. $span\{v^1, v^2\}$ mit $v^2 = \mu\, v^1$ ist gleich $span\{v^1\}$, denn

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i v^i = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 \mu\, v^1 = (\lambda_1 + \lambda_2 \mu) v^1.$$

Seite 71

Ziel

Finde zu vorgegebenem Unterraum einen minimale Zahl von Vektoren $v^1, \cdot, v^r \in W$ mit $span\{v^1, \cdot, v^r\} = W$.

Seite 71

Definition 2.30 Unheimlich Wichtig!!

(i) $v^1, \cdots, v^r \in V$ heißen linear abhängig , wenn

$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^r |\lambda_i| \neq 0$ mit $\sum_{i=1}^r \lambda_i v^i = 0$.

(ii) $v^1, \cdot, v^r \in V$ sind linear unabhängig , wenn
$\sum_{i=1}^r \lambda_i v^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r |\lambda_i| = 0$

Achtung ! Schreibweise!

$\sum_{i=1}^r |\lambda_i| \neq 0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \cdots, r\} : \lambda_i \neq 0.$

$\sum_{i=1}^r |\lambda_i| = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in \{1, \cdots, r\}.$

Seite 72

Beispiele

A. $e^1, e^2, e^3, \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, da

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i e^i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_i = 0 \, \forall_i.$$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, da

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\lambda_1 = 0$$

$$\underbrace{\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_1 = 0 \end{array}}_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$$

C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig,

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

D. $u^1, u^2 \in \mathbb{R}^2$ linear abhängig $\Leftrightarrow u^1 || u^2$

$u^1, u^2, u^3 \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = 0.$

Seite 72

E. Sind $v^1, \cdots, v^r \in V$ linear abhängig, so auch $v^1, \cdots v^r, v^{r+1}$

Beweis: $\sum_{i=1}^r \lambda_i v^i = 0$ und $\sum_{i=1}^r |\lambda_i| \neq 0$ so ist

$\sum_{i=1}^{r+1} \mu_i v^i = 0$ und $\sum_{i=1}^{r+1} |\mu_i| \neq 0$

für $\mu_i = \lambda_i \quad i = 1, \cdots, r, \quad \mu_{r+1} = 0.$

$\square$

F. Mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind auch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3+k} \text{ linear unabhängig.}$$

$\rightarrow$ Anbau macht nicht abhängig!

G. Die Funktionen $f(x) = 1$ und $g(x) = x$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind linear unabhängig, denn die Vektoren

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sind linear unabhängig.}$$

Die Funktionen f und g sind diese Vektoren mit “langen Anbauten“.

H. „$1, x, x^2, \cdots, x^n \in \Pi_n$ sind linear unabhängig“, denn $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \equiv 0$ ist nur für $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ möglich nach dem

> Fundamentalsatz der Algebra:
> $p \in \Pi_n, a_n \neq 0$
> $\Rightarrow$ p hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen.

Folgerung:
Ist ein a_n in $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = p(x)$ von Null verschieden, so hat $p(x)$ in $\mathbb{R}$ höchstens n Nullstellen.

Anmerkung:
Beweis von H auch ohne Fundamentalsatz möglich. Siehe später $\rightarrow$ „Interpolation“. (Verallgemeinerung von Beispiel G.)

V : Vektorrraum

$W \subset V$ Untervektorraum

$W = span\{v^1, v^2, \cdots, v^m\}$

Ziel

Wähle Teilmenge $\{w^1, \cdots, w^r\}$ aus $\{v^1, \cdots, v^m\}$, so dass $w^1, \cdots, w^r$ linear unabhängig ist und immer noch $W = span\{w^1, \cdots, w^r\}$.

$w^1, \cdots, w^r$ heißt dann Basis von W.

Geht das?

Ende der Vorlesung 4

Vorlesung 5
20. bzw. 21. November 2013

Basis, Dimension,Orthonormalsysteme

Seite 71

WIEDERHOLUNG

Definition 2.30 Unheimlich Wichtig!!

(i) $v^1, \cdots, v^r \in V$ heißen linear abhängig , wenn

$\exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^r |\lambda_i| \neq 0$ mit $\sum_{i=1}^r \lambda_i v^i = 0$.

(ii) $v^1, \cdot, v^r \in V$ sind linear unabhängig , wenn
$\sum_{i=1}^r \lambda_i v^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r |\lambda_i| = 0$

Achtung ! Schreibweise!

$\sum_{i=1}^r |\lambda_i| \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, i \in \{1, \cdots, r\} : \lambda_i \neq 0$.

$\sum_{i=1}^r |\lambda_i| = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0, \forall\, i \in \{1, \cdots, r\}$.

Seite 73

WIEDERHOLUNG

V : Vektorrraum

$W \subset V$ Untervektorraum

$W = span\{v^1, v^2, \cdots, v^m\}$

Ziel

Wähle Teilmenge $\{w^1, \cdots, w^r\}$ aus $\{v^1, \cdots, v^m\}$, so dass $w^1, \cdots, w^r$ linear unabhängig ist und immer noch $W = span\{w^1, \cdots, w^r\}$.

$w^1, \cdots, w^r$ heißt dann Basis von W.

Geht das?

Wir formulieren den Inhalt von Satz 2.32 (und seines Beweises) algorithmisch.

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \mu_i \, v^i | \mu_i \in \mathbb{R} \right\}$$

START

WENN $v^1, \cdots, v^m$ linear unabhängig $\rightarrow$

$r = m$ $w^1, \cdots, w^r = v^1, \cdots, v^m$
STOP

SONST

$\exists \, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \neq 0$
und $\sum_{i=1}^m \lambda_i \, v^i = 0$.

Sei $\lambda_j \neq 0$.
Dann
$0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \, v^i = \lambda_j \, v^j + \sum_{i=1, i \neq j}^m \lambda_i \, v^i$,
also
$v^j = - \sum_{i=1, i \neq j}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v^i$,
somit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mu_i \, v^i &= \mu_j \, v^j + \sum_{i=1, i \neq j}^m \mu_i \, v^i \\ &= - \sum_{i=1, i \neq j}^m \mu_j \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \, v^i + \sum_{i=1, i \neq j}^m \mu_i \, v^i \\ &= \sum_{i=1, i \neq j}^m (\mu_i - \mu_j \frac{\lambda_i}{\lambda_j}) v^i \end{aligned}$$

Entferne v^j und GO TO START

Satz 2.32

Sei $W := span\{v^1, \cdots, v^m\} \subset V$.

(i) Sind $v^1, \cdots, v^m$ linear abhängig und $\sum_{i=1}^m \lambda_i \, v^i = 0$, so ist
$W = span\{v^1, \cdots, v^{j-1}, v^{j+1} \cdots, v^m\}$
für jedes $j \in \{1, \cdots, m\}$ mit $\lambda_j \neq 0$.

(ii) Ist $W \neq \{0\}$, so gibt es linear unabhängige Vektoren
$v^{k_1} \cdots v^{k_r} \in \{v^1, \cdots, v^m\}$ mit $W = span\{v^{k_1}, \cdots, v^{k_r}\}$.

Definitionen 2.33

1. Sei V Vektorraum, $S := \underbrace{\{v^1, \cdots, v^r\}}_{endlich} \subset V$

   S ist Basis von V
   wenn
   (i) $v^1, \cdots, v^r$ linear unabhängig
   (ii) $V = span\{v^1, \cdots, v^r\}$.
2. Existiert eine (endliche) Basis von V, so heißt V endlichdimensional.
   (sonst unendlichdimensional)

Beispiele von Basen

A. $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots, e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

bilden die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

B. $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\} =$ Standardbasis des Π_n.

C. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$; also Basis nicht eindeutig.

Satz 2.36 (Steinitz)

Sei $W := span\{v^1, \cdots, v^m\}$ und $w^1, \cdots, w^r \in W$ linear unabhängig, dann

(i) $r \leq m$

(ii) $\exists\, r$ Vektoren in $\{v^1, \cdots, v^m\}$
(Œdie ersten r) mit $W = span\{w^1, \cdots, w^r, v^{r+1}, \cdots, v^m\}$

Folgerung: (Korollar 2.38)

Die Anzahl der Basisvektoren in einer Basis eines endlichdimensionalen
$VR \quad V$ ist Basis - unabhängig

Definition 2.39 Dimension eines VR

Diese Anzahl heißt die Dimension von V. Bezeichnung: $dim\, V$.

Beweis der Folgerung

Seien $\{v^1, \cdots, v^m\}$ und $\{w^1, \cdots, w^r\}$ Basen

	Basis von V	linear unabhängig in V		
a)	$v^1, \cdots, v^m$	$w^1 \cdots w^r$	$\overset{\text{Steinitz}}{\Rightarrow}$	$r \leq m$
b)	$w^1, \cdots, w^r$	$v^1 \cdots v^m$	$\Rightarrow$	$m \leq r$

aus a) & b) folgt: $r = m$ □

Korollar 2.37

Seien V endlichdimensional und $w^1, \cdots, w^r \in V$ linear unabhängig. Dann gibt es $v^{r+1}, \cdots, v^n$, so dass $w^1, \cdots, w^r, v^{r+1}, \cdots, v^n$ Basis von V sind.

Beweis

Sei $v^1, \cdots, v^n$ Basis von V.
O. B. d. A. nach Steinitz $v^1, \cdots, v^r$ gegen $w^1, \cdots, w^r$ austauschbar □

Beweis von Satz 2.36

(ii): Induktion nach T: (Dabei fällt (i) nebenbei ab)

$\underline{r=1}$ Austausch von w^1 gegen ein $v \in \{v^1, \cdots, v^m\}$

$w^1 \in span\{v^1, \cdots, v^m\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} w^1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i v^i \\ w^1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, i \in \{1, \cdots, m\} : \lambda_i \neq 0$$

Œ.$i = 1$ Nach Reduktionsalgorithmus (Seite 110) ist dann

$v^1 = \frac{1}{\lambda_1}\{w^1 - \sum_{i=2}^m \lambda_i v^i\}$

in $\{w^1, v^1, v^2, \cdots, v^m\}$ streichbar mit

$span\{w^1, v^2, \cdots, v^m\} = V$.

Beweis von Satz 2.36 fort.

$\underline{r \to r+1 \quad (r+1 \leq m)}$

Œ$w^1, \cdots, w^r$ schon ausgetauscht. Situation dann

$w^{r+1} \in W$ gegeben

$w^1, \cdots, w^{r+1}$ linear unabhängig

$$\left\{\begin{array}{l} W = span\{w^1, \cdots, w^r\} \quad a) \\ oder \\ W = span\{w^1, \cdots, w^r, v^{r+1}, \cdots, v^n\} \quad b) \end{array}\right.$$

a) $w^{r+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i w^i \Rightarrow w^1, ..., w^{r+1}$ linear abhängig $\lightning$
Situation a) unmöglich

b) $w^{r+1} \in W \Rightarrow w^{r+1} = \sum_{i=1}^r \lambda_i w^i + \underbrace{\sum_{i=r+1}^m \mu_i v^i}_{\text{mindestens ein } \mu_k \neq 0 \quad k \in \{r+1, \cdots, m\}}$

sonst $w^{r+1} = \sum_{i=1}^r \lambda_i w^i$
$\lightning$ zu linear unabhängig von $w^1, \cdots, w^{r+1}$
Streiche v^k in $\{w^1, \cdots, w^{r+1}, v^{r+1}, \cdots, v^m\}$ $\square$

Folgerungen aus Folgerung

$dim\, \mathbb{R}^n = n$

$dim\, \Pi^n = \sharp\{1, x, x^2, \cdots, x^n\} = n+1$

Ist V VR der Dimension n und $v^1, \cdots, v^n \in V$ linear unabhängig

$\Rightarrow v^1, \cdots, v^n$ ist Basis

$\Rightarrow \forall\, v \in V\, \exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v^i$.

Sei V ein Vektorraum, $dim\ V = n < \infty, \{v^1, \cdots, v^n\}$ eine Basis von V.

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v^i, x_i \in \mathbb{R}$$

$x_1, ..., x_n$ sind die Koordination von x bezüglich der Basis $\{v^1, \cdots, v^n\}$

Korollar 2.41

$$\text{Zuordnung } x \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ist eindeutig.}$$

Beweis: Sei $x = \sum_{i=1}^n x_i v^i, x = \sum_{i=1}^n y_i v^i$

Dann: $\Rightarrow 0 = x - x = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) v^i$

v_i linear unabhängig $\Rightarrow x_i = y_i, \quad i = 1, \cdots, n$.

$\square$

Korollar 2.42 (Dimensionsformel)

U, W Teilräume von V, endlichdimensional. Dann

$$dim(U+W) = dimU + dimW - dim(U \cap W)$$

Beweis

$v^1 \cdots v^r$ Basis von $U \cap W$.

$$\underbrace{\overbrace{u^1, \cdots, u^s \quad v^1, \cdots, v^r}^{\text{Basis von } U} \quad w^1, \cdots, w^t}_{\text{wenn linear unabhängig, Beweis fertig}}, \qquad \underbrace{v^1, \cdots, v^r \quad w^1, \cdots, w^t}_{\text{Basis von } W.}$$

Annahme:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{s} \mu_j u^j + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v^i}_{:=u \in U} + \underbrace{\sum_{k=1}^{t} \nu_k w^k}_{-u \in W} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow u \in U \cap W \\ \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{r} \hat{\lambda}_1 v^i \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu_j = 0 \, \forall j \\ \nu_k = 0 \, \forall k \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v^i \Rightarrow \lambda_i = 0 \, \forall i. \qquad \square$$

Bijektive Abbildung

$$T : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i v^i \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{Koordinatenvektor} \end{cases}$$

mit

$$T(x+y) = T\Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i) v^i\Big) = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T(x)+T(y),$$

und $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Rechnung in V ersetzbar durch äquivalente Rechnung im $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.44

Zwei Vektorräume $(V, +, \cdot)$ und $(W, \bigoplus, \bigodot)$ heißen isomorph, wenn $\exists$ Bijektion $T : V \to W$ mit

$$T(x+y) = T(x) \bigoplus T(y), \quad \forall x, y \in V$$

$$T(\lambda \cdot x) = \lambda \bigodot T(x), \qquad \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Satz 2.45

$(V_A, +, \cdot), (V_B, \bigoplus, \bigodot)$ Dimension n. Dann

$$V_A \quad \text{isomorph} \quad \mathbb{R}^n \quad \text{isomorph} \quad V_B.$$

Beispiel

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Basis:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 v^1 + x_2 v^2 \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Statt mit $\uparrow$ rechne mit $\uparrow$

Nächstes Ziel

Definiere Skalarprodukt auf allgemeinem Vektorraum und damit dann Orthogonalität.

Definition 2.47 (Allgemeines Skalarprodukt)

Sei V (reeller) Vektorraum.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \begin{cases} VxV & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x, y & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{cases}$$

heißt Skalarprodukt oder inneres Produkt in (oder auf) V , wenn gelten:

(i) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall\, x, y, z \in V$

(ii) $\langle \lambda \cdot x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \quad \forall\, x, y \in V, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall\, x, y \in \mathbb{V}$

(iv) $\langle x, x\rangle > 0 \quad \forall\, x \in V\backslash\{0\}$

$(V, \langle , \rangle) =$ unitärer Raum.

Beispiele

1. Euklidisches Produkt auf $\mathbb{R}^n$:

   $$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

   $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i\, y_i$

2. Gewichtetes euklidisches Produkt auf $\mathbb{R}^3$:
   $\langle x, y\rangle_G := 5\, x_1 \cdot y_1 + 3\, x_2 \cdot y_2 + 2\, x_3 \cdot y_3$

3. Inneres Produkt auf Π_n :
   $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)\, q(x)\, d\, x$

Für das normale euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ galt:

$$(CSU) \quad \langle x, y\rangle \leq |x| \cdot |y| \quad x, y \in \mathbb{R}^3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

Erinnerung: CSU $\Rightarrow$ $\triangle$-Ungleichung

Satz 2.50 *CSU*

V unitärer Raum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$

Dann

$$\langle x, y\rangle^2 \le \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \quad \forall\, x, y \in V$$

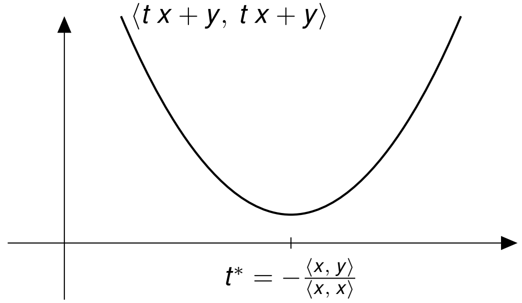
Beweis

Für $x = 0$: trivial!

Sei deshalb $x \neq 0$ Dann

$\forall\, t \in \mathbb{R} : \langle t\,x + y, t\,x + y\rangle \ge 0$, insbesondere auch für $t = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$

$$\begin{aligned} 0 &\le t^2\langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} - \frac{2\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle \\ &= -\frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle. \quad \square \end{aligned}$$



$$0 \le t^2\langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

insbesondere

$$\begin{aligned} 0 &\le (t^*)^2\langle x, x\rangle + 2\,t^*\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= -\frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle \end{aligned}$$

$\square$

Zusatz:

„=„ $\Leftrightarrow$ $\langle t^*\,x + y, t^*\,x + y\rangle = 0$

$\Leftrightarrow$ $t^*\,x + y = 0$

also

CSU mit „=„ $\Leftrightarrow$ x, y linear abhängig.

Mit $\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$ gilt : $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$

Allgemeiner

$(V, \langle , \rangle)$ unitär; dann ist

$||x|| := \langle x, x\rangle^{1/2}$

die $\langle \cdot, \cdot\rangle$ zugeordnete Norm.

Damit:

CSU

$$|\langle x, y\rangle| \le ||x|| \cdot ||y||$$

Seite 90

Satz 2.66 Eigenschaften der $\langle , \rangle^{1/2}$-Norm

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, || \cdot ||)$
unitärer *VR* mit Norm $||x|| := \langle x, x\rangle^{1/2}$. Dann

(i) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $||\lambda\, x|| = |\lambda|\, ||x|| \quad \forall\, x \in V, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall\, x, y \in V$

Beweis

(i) und (ii) trivial.
(iii) wie schon früher mit *CSU*

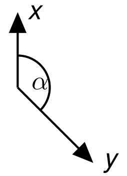
$$\begin{aligned} 0 \leq ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\leq \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\,\sqrt{\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &= ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \quad \square \end{aligned}$$

Seite 84

Aus *CSU* $\quad |\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$ folgt auch

$$\frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||} \in [-1, 1]$$

Bei $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot y_i$ auf $\mathbb{R}^3$ war



$$\frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||} = \cos(\alpha)$$

Seite 84

Für allgemeine innere Produkte definiert man den Winkel α zwischen x und y über

$$\frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||} = \cos\alpha$$

Definition 2.53 Orthogonalität

Man sagt dann auch, x und y seien orthogonal, wenn $\cos\alpha = 0$, also $\langle x, y\rangle = 0$ ist.

Seite 84

Beispiel

Bezüglich
$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ sind

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

orthogonal. Es gilt sogar

$$\langle e^i, e^j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq i \end{cases}$$

Kronecker - Symbol

Seite 84

Ortho*basis

Sei $(V, \langle , \rangle)$ unitärer Raum und $v^1, \cdots, v^n$ Basis ($dim\ V = n$).
Ist dann

$$\langle v^i, v^j \rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

so heißt
$\{v^1, \cdots, v^n\}$ Orthogonalbasis.

Haben alle v^i bezüglich

$$||x|| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

zusätzlich Einheitslänge, d.h. mit

$$||v^i|| = \langle v^i, v^i \rangle^{1/2} = 1, \forall i,$$

so heißt $\{v^1, \cdots, v^n\}$ eine Orthonormalbasis.

Beispiel: $\{e^1, \cdots, e^n\}$ ist ONB von $\mathbb{R}^n$ mit euklidischem Skalarprodukt.

Seite 84

Definition 2.53 Ortho*basis

V euklidischer Vektorraum mit $\langle , \rangle$.

1. u, v orthogonal wenn $\langle u, v \rangle = 0$.
2. $S := \{v^1, \cdots, v^r\} \subset V$ heißt Orthogonalsystem wenn
   $v^j \neq 0 \quad \forall j$
   $\langle v^j, v^k \rangle = 0, j \neq k$
3. Ein Orthogonalsystem heißt Orthonormalsystem, wenn Längen der Vektoren = 1.
4. Orthonormalsystem, welches Basis von V ist, heißt Orthonormalbasis.

Seite 86

Orthonormalbasen sind schön!

$\{v^1, \cdots, v^n\}$ ONB von $(V, \langle , \rangle)$.

$$v^1, \cdots, v^n \text{ Basis} \Rightarrow \quad \forall\, v\, \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ : \ v = \sum_{i=1}^n x_i\, v^i.$$

Wie berechnet man x_i ?

$$\begin{aligned} \langle v^j, v \rangle &= \langle v^j, \sum_{i=1}^n x_i\, v^i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i\, \underbrace{\langle v^j, v^i \rangle}_{=\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \delta_{ij} = x_j \end{aligned}$$

$x_j = \langle v^j, v \rangle$ Satz 2.58

Seite 86

$$\begin{array}{rclclclcl} v &=& \alpha_1\, v_1 &+& \alpha_2\, v_2 &+& \cdots &+& \alpha_n\, v_n \\ \langle v_1, v \rangle &=& \langle v_1, \alpha_1\, v_1 &+& \alpha_2\, v_2 &+& \cdots &+& \alpha_n\, v_n \rangle \\ \langle v_1, v \rangle &=& \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle &+& \alpha_2 \langle v_1, v_2 \rangle &+& \ldots &+& \alpha_n \langle v_1, v_n \rangle \\ && =1 && =0 && && =0 \end{array}$$

also $\langle v_1, v \rangle = \alpha_1$.

Satz 2.58

$v_1, ..., v_n$ Orthonormalsystem.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i \quad , \quad \alpha_j = \langle v_j, v \rangle$$

also

$$\underbrace{v = \sum_{i=1}^{n} v_i \langle v_i, v \rangle}_{\text{„Fourierentwicklung“}}$$

$v_1, ..., v_n$ Orthonormalsystem

$$v = v_1 \langle v_1, v \rangle + v_2 \langle v_2, v \rangle + \ldots + v_n \langle v_n, v \rangle$$

Projektion auf v_1 Projektion auf v_2 Projektion auf v_n

Projektion auf span$\{v_1, v_2\}$

Satz 2.57

V eukl. VR und $\langle , \rangle$ $\quad S = \{v^1, \cdots, v^r\}$ sei Orthogonalsystem.
$\Rightarrow \; v^1, \cdots, v^r$ linear unabhängig

Beweis

Annahme: $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, v^i = 0$

$$\Rightarrow \lambda_j \langle v^j, v^j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, \langle v^j, v^i \rangle = \langle v^j, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, v^i \rangle = 0 \quad \square$$

Nun beantworten wir die Frage:

Wie bastle ich mir eine Orthonormalbasis?

Wie man eine ONB bastelt:

$\longrightarrow$ 2.62,63 + Tafel

Ende der Vorlesung 5

Vorlesung 6
27. bzw. 28. November 2013

Normen, Metriken,
Mannigfaltigkeiten,
Gleichungssysteme 1

Seite 90

Wiederholung

Satz 2.66 Eigenschaften der $\langle,\rangle^{1/2}$-Norm

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, ||\cdot||)$
unitärer *VR* mit Norm $||x|| := \langle x, x\rangle^{1/2}$. Dann

(i) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $||\lambda\, x|| = |\lambda|\, ||x|| \quad \forall\, x \in V, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall\, x, y \in V$

Beweis

(i) und (ii) trivial.
(iii) wie schon früher mit *CSU*

$$\begin{aligned} 0 \leq ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\leq \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\,\sqrt{\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &= ||x||^2 + 2||x||\cdot||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Seite 90

$||x||$ misst - wie $|x|$ in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ - die Länge eines Vektors.

Leider ist nicht jede (vernünftige) Längenmessung $||x||$ über

$$\langle x, x\rangle^{1/2} =: \; ||x||$$

mit einem inneren Produkt verbunden.

Es gibt noch andere wichtige Längenmessungen. Für solche fordern wir aber stets die oben gefundenen Eigenschaften.(Satz 2.66)

Definition 2.67 Norm

Sei V Vektorraum. Eine Abbildung

$$||\cdot|| : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow ||x|| \end{cases}$$

heißt Norm auf V, wenn

(i) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $||\lambda\, x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \quad \forall\, x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $||x+y|| \le ||x|| + ||y|| \quad \forall\, x, y \in V.$

$(V, ||\cdot||)$ heißt normierter Raum.

Beispiele

(i) $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ euklidische Norm

(ii) $||x||_\infty := max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$ Maximumnorm

(iii) $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ Summennorm

(iv) Zusammenfassend: $||x||_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, p \ge 1$

Bemerkungen: 1. $x_\infty = \lim_{p\to\infty} ||x||_p$
2. Der Nachweis der Normeigenschaft von $||\cdot||_p$ ist (für $p \neq 2$) etwas aufwendiger.

Achtung!

Jeder unitäre Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist vermittels $||x|| := \langle x, x\rangle^{1/2}$

auch normierter Raum $(V, ||\cdot||)$.

Die Umkehrung gilt jedoch nicht!

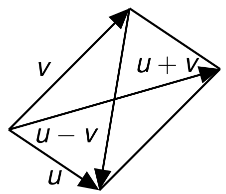
Es gibt nicht zu jeder Norm $||\cdot||$ ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so daß

$$||x|| = \langle x, x\rangle^{1/2}$$

Anmerkung:

Notwendig und hinreichend dafür ist die Gültigkeit der sog. Parallelogrammgleichung.

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$$



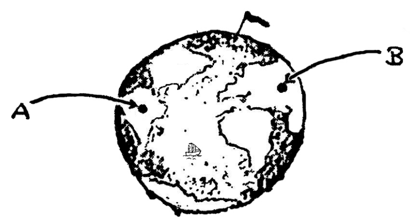
Aus der Möglichkeit, Längen von Vektoren zu messen, resultiert eine Messmethode für Abstände von Punkten A und B eines normierten Raumes $(V, ||\cdot||)$.

$$d(A,B) = ||a - b||$$

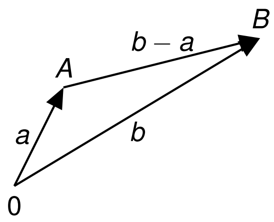
Distanz Ortsvektoren von A bzw. B.

Man möchte aber oft auch Abstände zwischen Punkten wissen, die nicht einem Vektorraum angehören!

Beispiel:



NORMIERTER RAUM?



Dann
Distanz $(A, B) := ||b - a|| -$ möglich.
Allgemeiner $d(a, b)$

Definition 2.70 (Metrik)

Sei M eine Menge. Eine Abbildung

$$d : \begin{cases} M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \longrightarrow d(x, y) \end{cases}$$

heißt Metrik, wenn

(d_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(d_2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\, x, y \in M$

(d_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall\, x, y, z \in M.$

Eine Menge M mit Metrik d heit metrischer Raum.

Achtung!
Jeder normierte Raum $(V, ||\cdot||)$ wird mit

$$(*) \quad d(x, y) := ||x - y||, x, y \in V$$

auch metrischer Raum. Jedoch muss es zu einer Metrik $d(x, y)$ keine Norm $||\cdot||$ geben mit $(*)$.

Beispiel:
Diskrete Metrik:

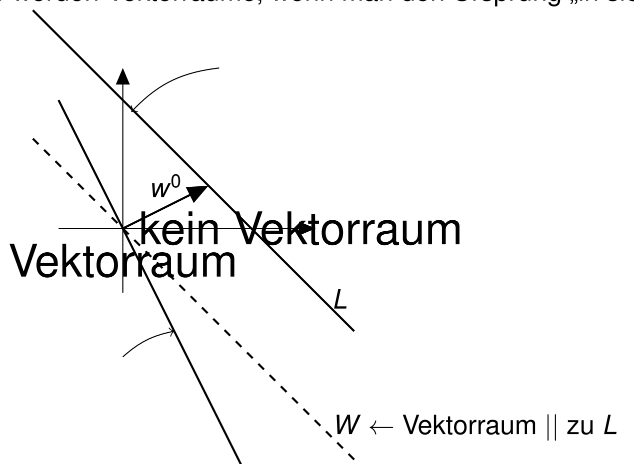
$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{bei } x = y \\ 1 & \text{bei } x \neq y. \end{cases}$$

Kurz Luft holen

Themenwechsel: –> Mannigfaltigkeiten

„Mannigfaltigkeiten“

Geraden und Ebenen durch 0 sind Vektorräume.
Geraden und Ebenen die nicht durch 0 gehen, sind keine Vektorräume.
Sie kommen aber doch auch wohl vor!
Sie werden Vektorräume, wenn man den Ursprung „in sie hinein verschiebt“.



Definition 2.71 lineare Mannigfaltikeit

Sei V Vektorraum, W Untervektorraum von V, $w^0 \in V$ fest.

Dann heißt $L := w^0 + W := \{w^0 + w | w \in W\}$

Lineare Mannigfaltigkeit in V (oder affiner Raum)

Beispiele

1. Gerade $L := \{x := w^0 + \lambda u | \lambda \in \mathbb{R}\} = w^0 + span\{u\}$
2. Ebene $\{x \in \mathbb{R}^3 | n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \delta\}$
   $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \neq 0, \quad \delta \in \mathbb{R}$ fest
   Ist lineare Mannigfaltigkeit
   Sei w^0 irgendeine Lösung von $\langle n, x \rangle = \delta$.
   Dann
   $$\langle n, w^0 \rangle = \delta$$
   Für jede Lösung y ist
   $$\langle n, y \rangle = \delta$$
   Subtraktion zeigt
   $$\langle n, y - w_0 \rangle = 0 \qquad \text{(homogen)}$$
   Seien u_1, u_2 l.u. und $\perp n$.
   Dann $y - w_0 \in \operatorname{span}\{u_1, u_2\} = W$.

3. Allgemeiner:
   Lösungsmenge von
   $$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_n \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$
   ist leer oder lineare Mannigfaltigkeit.
   Ist y nämlich beliebige Lösung und w^0 spezielle Lösung, so löst $y - w^0$ das homogene System.
   $$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n &= 0 \end{aligned}$$
   Sei W Lösungsraum davon, so ist $y \in w^0 + W$.

Satz 2.76

Sei V Vektorraum. Zwei lineare Mannigfaltigkeiten

$$L := w^0 + W$$

$$K := u^0 + U$$

sind genau dann gleich, wenn $W = U$ und $w^0 - u^0 \in W$ gelten.

Beweis

$$L = K \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Zu } w \in W \quad \exists\, u = u(w) \in U \\ \text{Zu } u \in U \quad \exists\, w = w(u) \in W \end{array}\right\} w^0 + w = u^0 + u.$$

Bei $w = 0 \Rightarrow w^0 = u^0 + u(0)$ also $w^0 - u^0 = w(0) \in U$
Bei $u = 0 \Rightarrow w^0 + w(0) = u^0$ also $w^0 - u^0 = w(0) \in W$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Für } u \in U \text{ ist damit } u = w^0 - u^0 + w \in W \\ \text{Für } w \in W \text{ ist umgekehrt } w = -(w^0 - u^0) + u \in U. \end{array}\right\} \Rightarrow U \equiv W$$

Seite 94

Fortsetzung Beweis

Sei nun $W = U$ und
$$w^0 - u^0 \in W.$$

Zu zeigen
$$w^0 + W = u^0 + U.$$

Aber
$$w^0 + W = u^0 + \underbrace{(w^0 - u^0) + W}_{=W=U}$$

□

Seite 94

Satz 2.77

Seien
$$L = w^0 + W,\ K := w^0 + U$$

lineare Mannigfaltigkeiten in $VR \quad V$

Dann $K \cap L = \varnothing$ oder $K \cap L =$ lineare Mannigfaltigkeit.

Beweis

Ist $K \cap L \neq \varnothing \Rightarrow \exists v^0 \in K \cap L$

$\Rightarrow L = v^0 + W, K = v^0 + U.$

$= K \cap L = \{v^0 + v | v \in U \cap W\}$ □

Seite 95

Komplexe Vektorräume

Definition wie reelle Vektorräume, nur kommen jetzt die Skalare aus $\mathbb{C}$

Beispiele:

1. $\mathbb{C}^n := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} : z_i \in \mathbb{C} \right\}$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + w_1 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{pmatrix}, \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_n \end{pmatrix}$$

2. $\Pi_n := \left\{ p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i, a_i \in \mathbb{C} \right\}$

3. Sei $V =$ Vektorraum

Definition

$\hat{V} := \left\{ (x, y) \mid x, y \in V \right\}$ mit

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$(a + ib)\,(x, y) := (ax - by, ay + bx)$

heißt Komplexifizierung von V

Anmerkung: Denke (x, y) als $x + iy$.

Normen auf komplexen Vektorräumen

$$||\cdot|| \; : V \to \mathbb{R}$$

wie bei reellen Vektorräumen.
Metriken

$$d(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$$

dito.

Abweichungen aber beim Skalarprodukt!

Sei V komplexer Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ ist inneres oder skalares Produkt, wenn

(i) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \quad \forall\, u, v \in V$ $\longleftarrow$ hier Abweichung!
(ii) $\langle \lambda\, u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle \quad \forall\, u, v \in V, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$
(iii) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall\, u, v, w \in V$
(iv) $\langle u, u\rangle > 0 \quad \forall\, u \in V \setminus \{0\}$.

Vektorrechnung Vektoren im 2- und 3-dim. Anschauungsraum

Seite 96

Folgerungen:

$$\begin{aligned}
\langle u, \lambda\, v\rangle &= \overline{\langle \lambda\, v, u\rangle} = \overline{\lambda \langle v, u\rangle} \\
&= \bar{\lambda}\, \overline{\langle v, u\rangle} = \bar{\lambda} \langle u, v\rangle \\
\langle u, v + w\rangle &= \overline{\langle v + w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} \\
&= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle.
\end{aligned}$$

Standard - Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$

$\langle u, v\rangle \; := \sum_{i=1}^n u_i\, \bar{v}_i \; ; u, v \in \mathbb{C}^n$

Zugehörige euklidische Norm
$||u||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i\, \bar{u}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2} \in \mathbb{R}$.