Vorlesung 1
23. bzw. 24. Oktober 2013

Komplexe Zahlen

Einführung

Seite 28

Lösung von

$x^2 + 1 = 0,$

pq-Formel liefert

$x_{1/2} = \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{\text{verboten}};$

$x^2 - 6x + 11 = 0$?

$x_{1/2} = 3 \pm \underbrace{\sqrt{-2}}_{\text{verboten}}$

Definition

Imaginäre Einheit $i := \sqrt{-1}$

Dann

$x_{1/2} = \pm i;$

$i^2 = -1.$

$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{2} \cdot i$

Allgemein

$z = x + i\,y;\; x, y \in \mathbb{R}$

Komplexe Zahl.

$\mathbb{C} := \{z = x + i\,y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Komplexe Addition & Multiplikation

Mit $z_1 := x_1 + i\,y_1, \qquad z_2 := x_2 + i\,y_2$

definiere

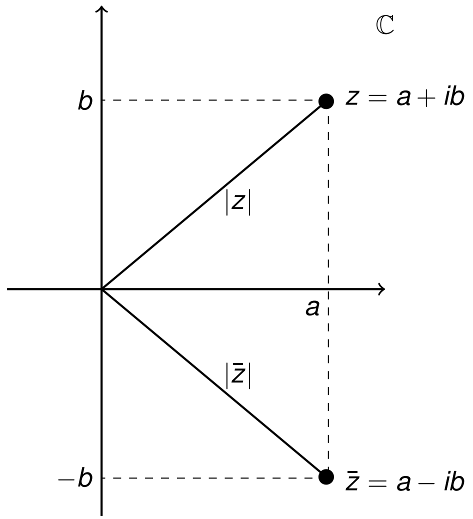
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Aus reellen Rechenregeln unter Beachtung von $i^2 = -1$:

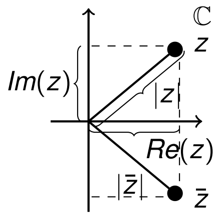
$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Zahlenebene $\mathbb{C}$



Bezeichnungen

$Re(a+i\,b) = a$	Realteil
$Im(a+i\,b) = b$	Imaginärteil
$\overline{a+i\,b} = a - i\,b$	konjugiert Komplexes
$\lvert a+i\,b\rvert := \sqrt{a^2+b^2}$	Betrag $\in \mathbb{R}$



Konsequenzen

$z + \bar{z} = 2Re\,z$

$z - \bar{z} = 2i\,Im\,z$

$\bar{\bar{z}} = z$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (Nachrechnen!!!)

Seite 31

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1\,x_2 + y_1\,y_2) + i(y_1\,x_2 - x_1\,y_2)$$

Also

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

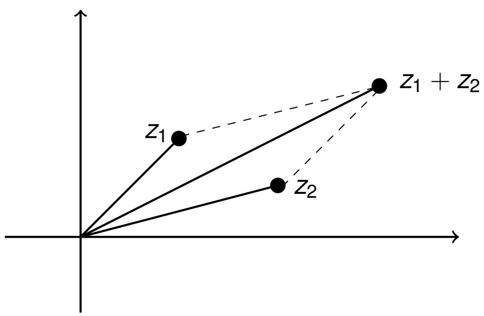
Achtung:

$\mathbb{C}$ nicht ordenbar.

Aber:

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

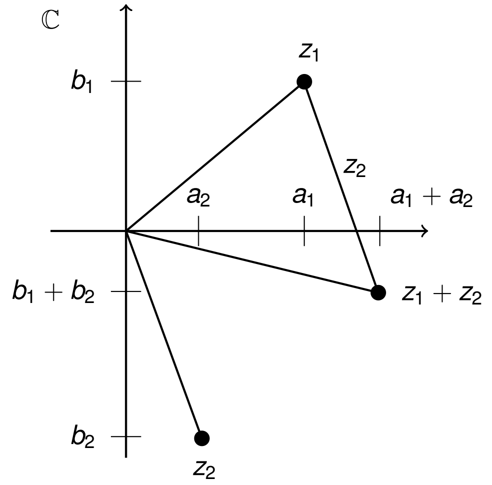
$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.



Geometrie komplexer Operationen

Seite 31

1. Addition wie Vektoraddition in der Ebene



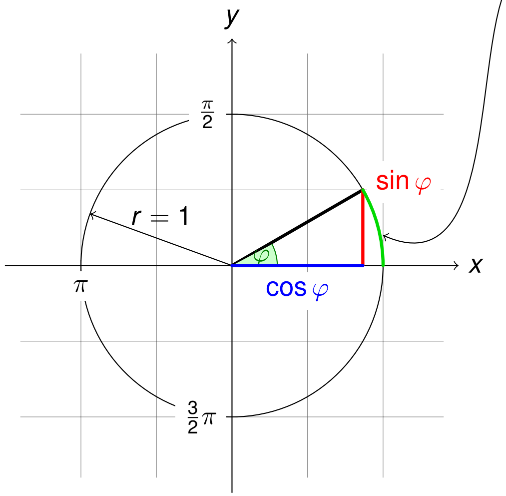
$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

2. Multiplikation und Division mit Polardarstellung komplexer Zahlen

Seite 32

Sinus und Cosinus am Einheitskreis

zu φ gehörige Bogenlänge

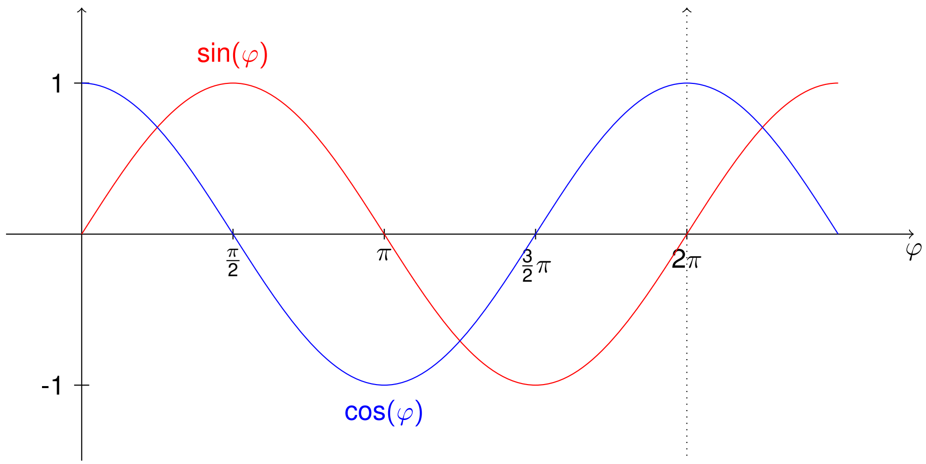


$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

$\sin(0) = 0$
$\cos(0) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
$\sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$

Vollkreis hat 360°
oder eine Bogenlänge von 2π



Additionstheoreme für sin und cos

$\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\psi)\cos(\varphi)$
$\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)$

Seite 33

Geometrischer Beweis $\longrightarrow$ Skript.

Analytischer Beweis $\longrightarrow$ nächstes Semester.

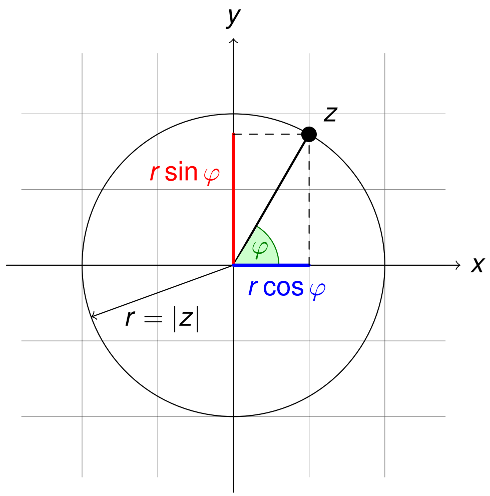
Einfache Merkregel: kommt gleich.

Benötigt werden etwas später noch:

$\tan(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, nicht definiert bei $\varphi = \frac{2n+1}{2}\pi, n \in \mathbb{N}$

$\cot(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, nicht definiert bei $\varphi = n\pi, n \in \mathbb{N}$.

Jetzt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$



$z = r(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi))$

Kürze ab:

$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Abkürzung gut?

JA:

$e^{i(\varphi+\psi)} =$

$\cos(\varphi+\psi) + i\ \sin(\varphi+\psi)$

$= \cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi +$

$i(\cos\varphi\ \sin\psi + \cos\psi\ \sin\varphi)$

$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)$

$= e^{i\varphi}\ e^{i\psi}$

Dann

$z = re^{i\varphi}$

Eulers Formel

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Ist ungeheuer praktisch!

Anwendungsbeispiel: Additionstheoreme vergessen?

Euler liefert:

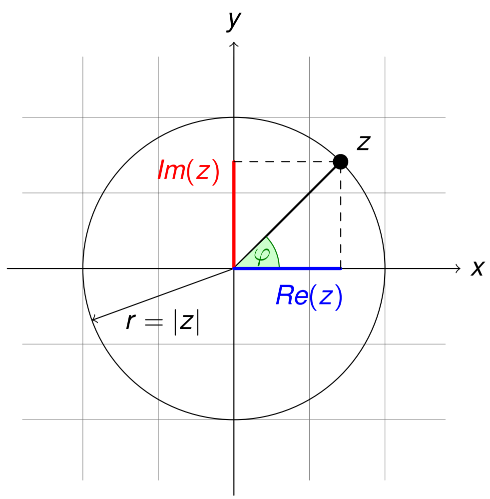
$\cos(\varphi+\psi) + i\ \sin(\varphi+\psi) = e^{i(\varphi+\psi)}$

$= e^{i\varphi}\ e^{i\psi}$

$= (\cos\varphi + i\ \sin\varphi)(\cos\psi + i\ \sin\psi)$

$= (\cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi) + i(\cos\varphi\ \sin\psi + \cos\psi\ \sin\varphi)$

Vergleiche Real- und Imaginärteile beider Seiten. Fertig!



$z = Re(z) + i\ Im(z)$

$= r\ e^{i\varphi},\ \varphi = arg\ z.$

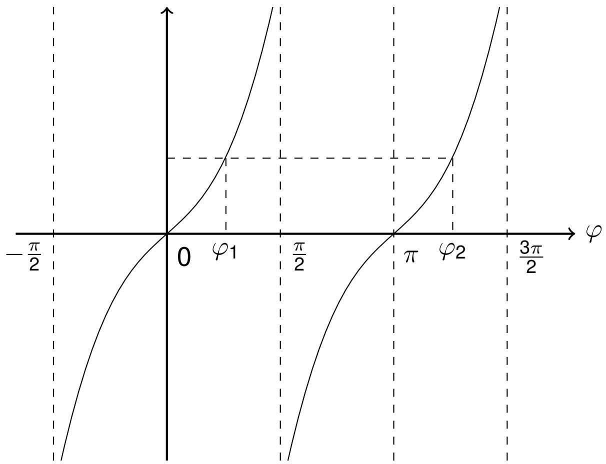
$arg\ z$ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Praktische Bestimmung von φ aus

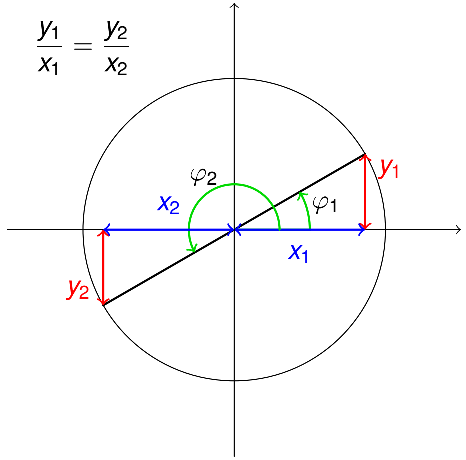
$\tan\varphi = \frac{Im(z)}{Re(z)}$

$\left(\varphi = arc\ \tan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)\right)$

Aber Achtung!



$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$



Wozu der Aufstand?

Seite 34

Antwort: Multiplikation und Division werden sehr einfach!

$$(r_1\, e^{i\,\varphi_1})(r_2\, e^{i\,\varphi_2}) = \underbrace{r_1 \cdot r_2}_{\text{multipliziere Beträge}} \cdot \underbrace{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}_{\text{addiere Argumente.}}$$

$$(r_1\, e^{i\,\varphi_1}) \Big/ (r_2\, e^{i\,\varphi_2}) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i\,(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Speziell (Formel von de Moivre)

$$(r\, e^{i\,\varphi})^n = r^n\, e^{i\,n\,\varphi}$$

$[r(\cos\,\varphi + \,i\,\sin\varphi)]^n = r^n(\cos\,n\,\varphi + \,i\,\sin n\,\varphi) \Rightarrow$ weitere Additionstheoreme

De Moivre rückwärts:

Seite 45

Gesucht n-te Wurzel aus

$z = r\, e^{i\,\varphi}$

Eine Antwort

$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\, e^{i\,\varphi/n}$

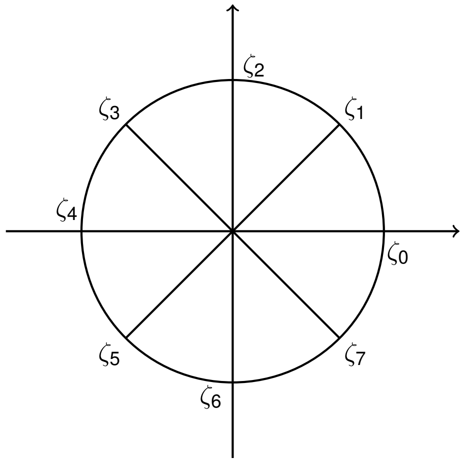
Aber auch

$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\, e^{i(\varphi/n + \frac{2\pi}{n}\cdot k)} \qquad k = 1, \cdots, n-1$

da $\quad n \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot k = 2\pi \cdot k$

Allgemein:

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\, e^{i\,(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$



Die 8 achten Wurzeln aus 1.
Die 8 achten ““Einheitswurzeln““.

Sind komplexe Zahlen wirklich?

Ende der 1. Vorlesung