Inhaltsverzeichnis

Vorlesung 1
23. bzw. 24. Oktober 2013

Komplexe Zahlen

Einführung

Lösung von

$x^2 + 1 = 0,$

$x^2 - 6\,x + 11 = 0$?

pq-Formel liefert

$$x_{1/2} = \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{\text{verboten}};$$

$$x_{1/2} = 3 \pm \underbrace{\sqrt{-2}}_{\text{verboten}}$$

Definition

Imaginäre Einheit $i := \sqrt{-1}$

Dann

$x_{1/2} = \pm i;$

$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{2} \cdot i$

$i^2 = -1.$

Allgemein

$z = x + i\,y;\ x, y \in \mathbb{R}$

Komplexe Zahl.

Einführung

Lösung von
$x^2 + 1 = 0,$
pq-Formel liefert
$x_{1/2} = \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{\text{verboten}};$

$x^2 - 6x + 11 = 0$?

$x_{1/2} = 3 \pm \underbrace{\sqrt{-2}}_{\text{verboten}}$

Definition

Imaginäre Einheit $i := \sqrt{-1}$

Dann
$x_{1/2} = \pm i;$
$i^2 = -1.$

$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{2} \cdot i$

Allgemein
$z = x + i\,y;\ x, y \in \mathbb{R}$

Komplexe Zahl.

Einführung

Lösung von

$x^2 + 1 = 0,$

pq-Formel liefert

$x_{1/2} = \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{\text{verboten}} ;$

$x^2 - 6\,x + 11 = 0$?

$x_{1/2} = 3 \pm \underbrace{\sqrt{-2}}_{\text{verboten}}$

Definition

Imaginäre Einheit $i := \sqrt{-1}$

Dann

$x_{1/2} = \pm i;$

$i^2 = -1.$

$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{2} \cdot i$

Allgemein

$z = x + i\,y;\ x, y \in \mathbb{R}$

Komplexe Zahl.

Einführung

Lösung von

$x^2 + 1 = 0,$

pq-Formel liefert

$x_{1/2} = \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{\text{verboten}};$

$x^2 - 6\,x + 11 = 0$?

$x_{1/2} = 3 \pm \underbrace{\sqrt{-2}}_{\text{verboten}}$

Definition

Imaginäre Einheit $i := \sqrt{-1}$

Dann

$x_{1/2} = \pm i;$

$i^2 = -1.$

$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{2} \cdot i$

Allgemein

$z = x + i\,y;\ x, y \in \mathbb{R}$

Komplexe Zahl.

Seite 29

$$\mathbb{C} := \{z = x + i\,y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Addition & Multiplikation

Mit $z_1 := x_1 + i\,y_1, \qquad z_2 := x_2 + i\,y_2$

definiere

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Aus reellen Rechenregeln unter Beachtung von $i^2 = -1$:

$$(x_1 + i\,y_1)(x_2 + i\,y_2) = x_1 x_2 + i\,x_1 y_2 + i\,y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Seite 29

$$\mathbb{C} := \{z = x + i\,y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Addition & Multiplikation

Mit $z_1 := x_1 + i\,y_1, \qquad z_2 := x_2 + i\,y_2$

definiere

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Aus reellen Rechenregeln unter Beachtung von $i^2 = -1$:

$$(x_1 + i\,y_1)(x_2 + i\,y_2) = x_1 x_2 + i\,x_1 y_2 + i\,y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Seite 29

$$\mathbb{C} := \{z = x + i\,y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Addition & Multiplikation

Mit $z_1 := x_1 + i\,y_1, \qquad z_2 := x_2 + i\,y_2$

definiere

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Aus reellen Rechenregeln unter Beachtung von $i^2 = -1$:

$$(x_1 + i\,y_1)(x_2 + i\,y_2) = x_1 x_2 + i\,x_1 y_2 + i\,y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Seite 29

$$\mathbb{C} := \{z = x + i\,y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Addition & Multiplikation

Mit $z_1 := x_1 + i\,y_1, \qquad z_2 := x_2 + i\,y_2$

definiere

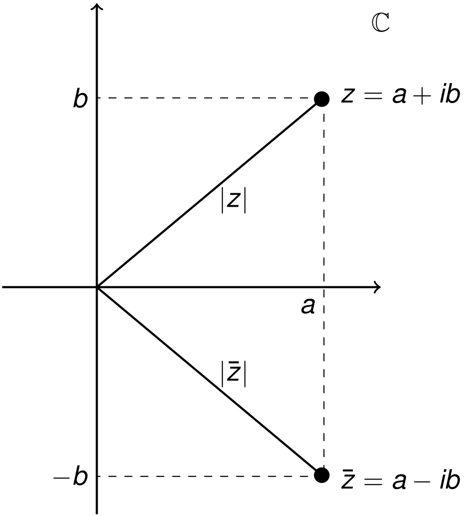
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Aus reellen Rechenregeln unter Beachtung von $i^2 = -1$:

$$(x_1+i\,y_1)(x_2+i\,y_2) = x_1x_2 + i\,x_1y_2 + i\,y_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Zahlenebene $\mathbb{C}$



Seite 31

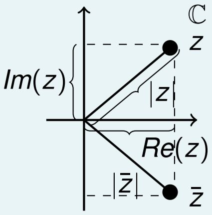
Bezeichnungen

$Re(a + i\,b) = a$ Realteil

$Im(a + i\,b) = b$ Imaginärteil

$\overline{a + i\,b} = a - i\,b$ konjugiert Komplexes

$|a + i\,b| := \sqrt{a^2 + b^2}$ Betrag $\in \mathbb{R}$



Konsequenzen

$z + \bar{z} = 2 Re\, z$

$z - \bar{z} = 2i\, Im\, z$

$\bar{\bar{z}} = z$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

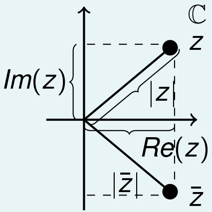
$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (Nachrechnen!!!)

Seite 31

Bezeichnungen

$Re(a + i\,b) = a$	Realteil
$Im(a + i\,b) = b$	Imaginärteil
$\overline{a + i\,b} = a - i\,b$	konjugiert Komplexes
$\lvert a + i\,b\rvert := \sqrt{a^2 + b^2}$	Betrag $\in \mathbb{R}$



Konsequenzen

$z + \bar{z} = 2Re\,z$

$z - \bar{z} = 2i\,Im\,z$

$\bar{\bar{z}} = z$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (Nachrechnen!!!)

Seite 31

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1\, x_2 + y_1\, y_2) + i(y_1\, x_2 - x_1\, y_2)$$

Also

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{y_1\, x_2 - x_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

Seite 31

Achtung:

$\mathbb{C}$ nicht ordenbar.

Aber:

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$

Seite 31

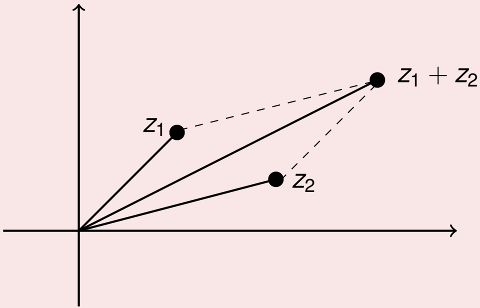
Achtung:

$\mathbb{C}$ nicht ordenbar.

Aber:

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$

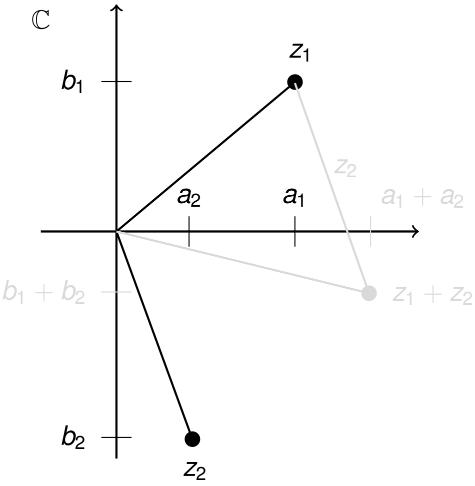


Geometrie komplexer Operationen

Seite 31

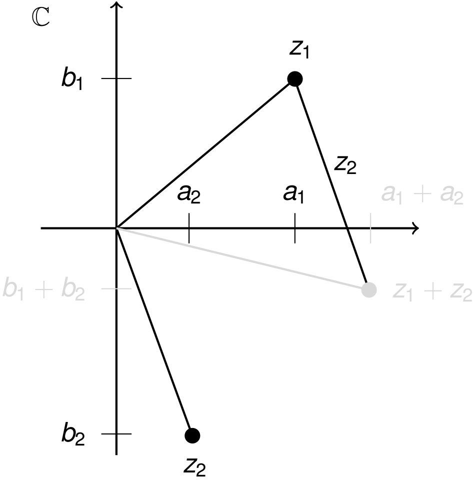
1. Addition wie Vektoraddition in der Ebene

Seite 31



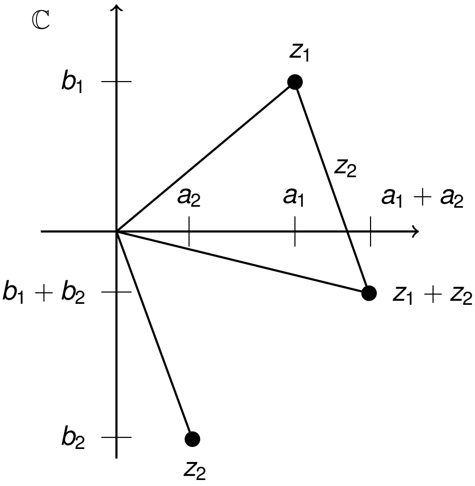
$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

1. Addition wie Vektoraddition in der Ebene



$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

1. Addition wie Vektoraddition in der Ebene



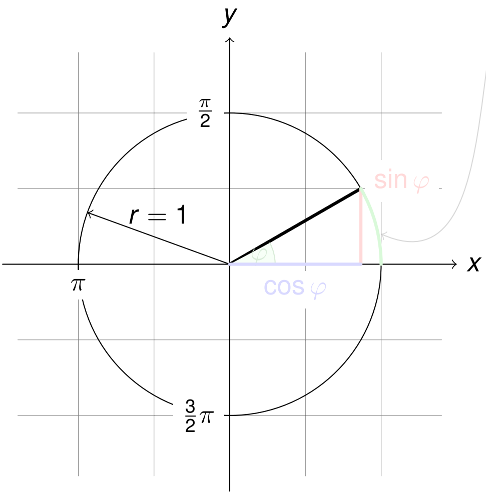
$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

2. Multiplikation und Division mit Polardarstellung komplexer Zahlen

Seite 32

Sinus und Cosinus am Einheitskreis

zu φ gehörige Bogenlänge



$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

$\sin(0) = 0$
$\cos(0) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

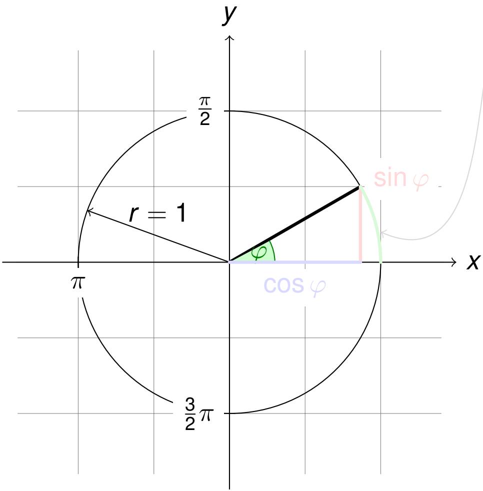
$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
$\sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$

Vollkreis hat 360°
oder eine Bogenlänge von 2π

Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Seite 32

zu φ gehörige Bogenlänge



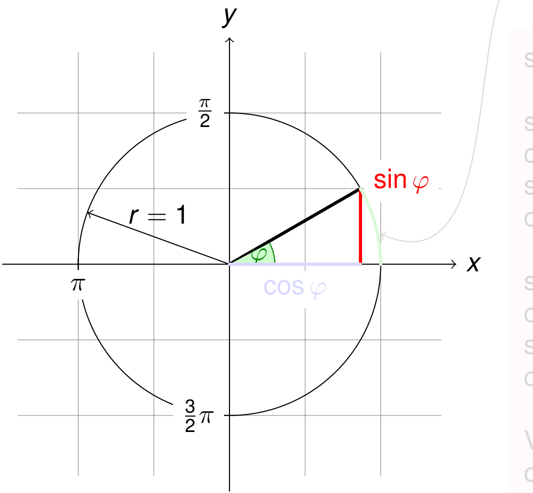
$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

$\sin(0) = 0$
$\cos(0) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
$\sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$

Vollkreis hat 360°
oder eine Bogenlänge von 2π

Sinus und Cosinus am Einheitskreis



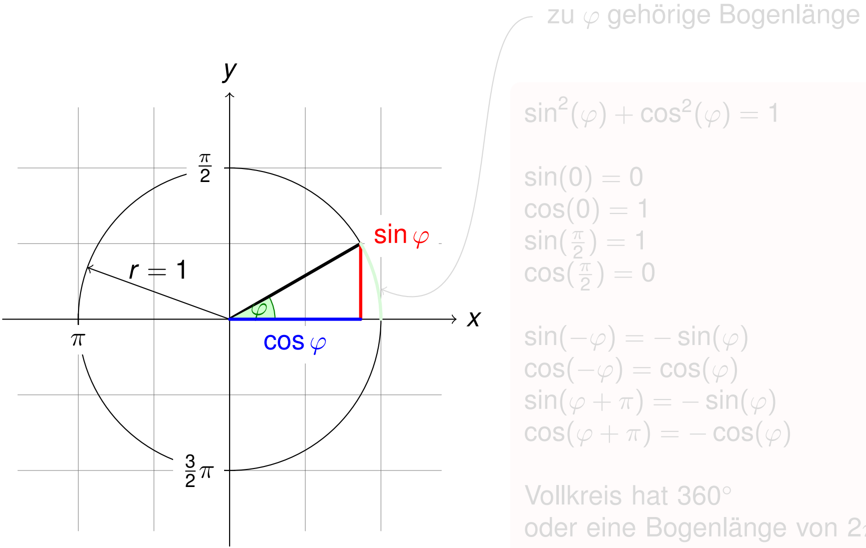
$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

$\sin(0) = 0$
$\cos(0) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
$\sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$

Vollkreis hat 360°
oder eine Bogenlänge von 2π

Sinus und Cosinus am Einheitskreis



$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

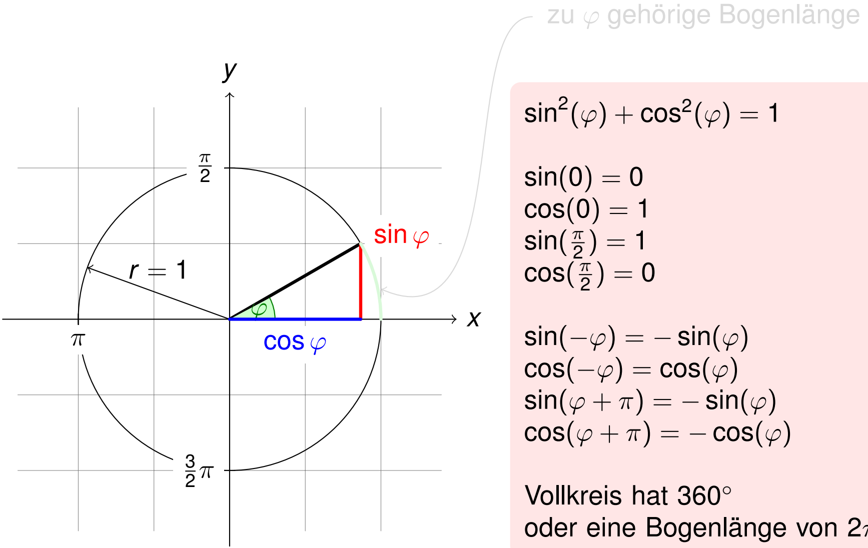
$\sin(0) = 0$
$\cos(0) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
$\sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$

Vollkreis hat 360°
oder eine Bogenlänge von 2π

Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Seite 32



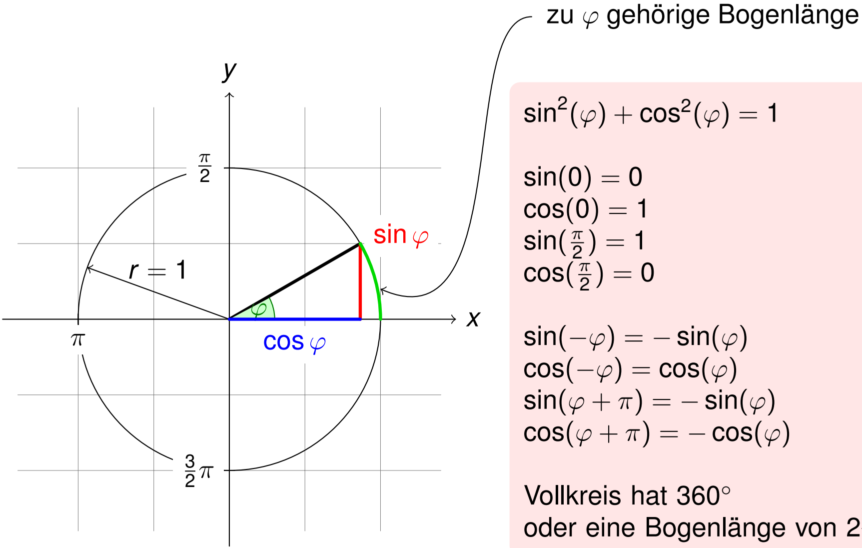
$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

$\sin(0) = 0$
$\cos(0) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
$\sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$

Vollkreis hat 360°
oder eine Bogenlänge von 2π

Sinus und Cosinus am Einheitskreis



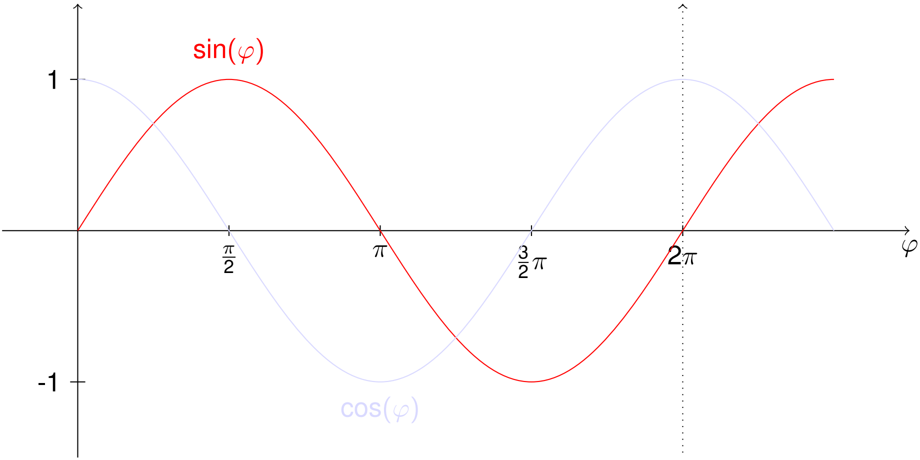
$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

$\sin(0) = 0$
$\cos(0) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
$\sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$
$\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$

Vollkreis hat 360°
oder eine Bogenlänge von 2π

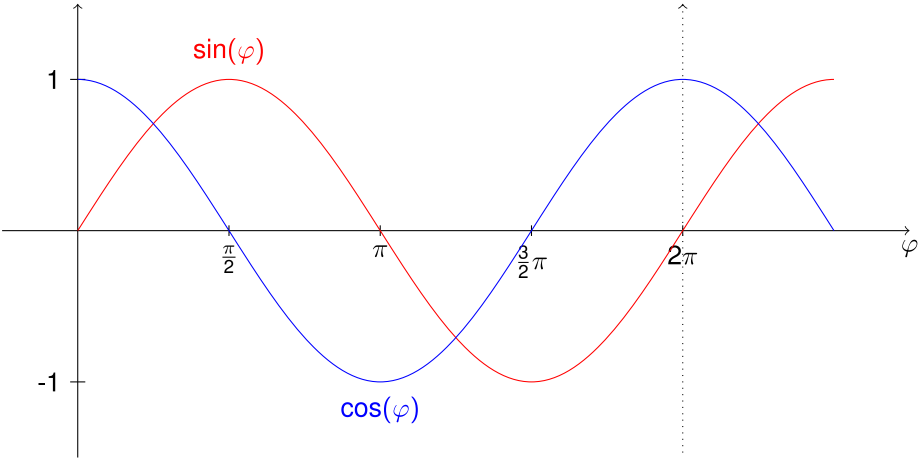
Seite 33



Additionstheoreme für sin und cos

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\psi)\cos(\varphi)$$
$$\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)$$

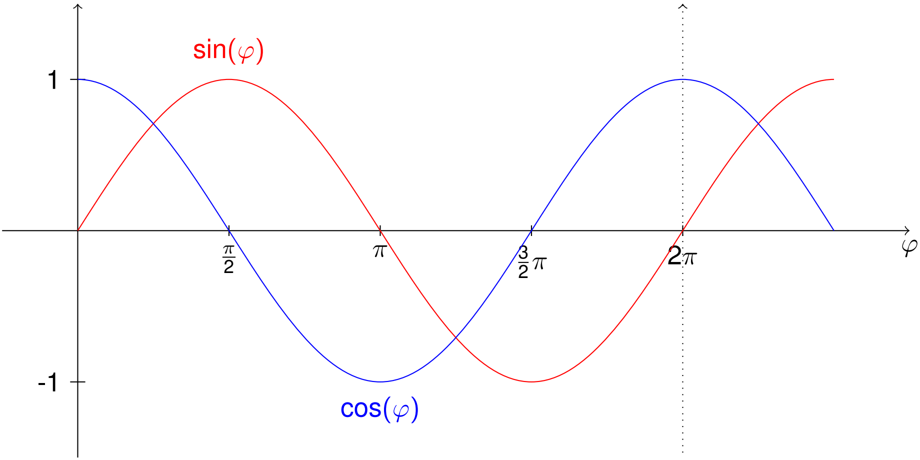
Seite 33



Additionstheoreme für sin und cos

$$\sin(\varphi+\psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\psi)\cos(\varphi)$$
$$\cos(\varphi+\psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)$$

Seite 33



Additionstheoreme für sin und cos

$$\sin(\varphi+\psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\psi)\cos(\varphi)$$
$$\cos(\varphi+\psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)$$

Seite 33

Geometrischer Beweis $\longrightarrow$ Skript.

Analytischer Beweis $\longrightarrow$ nächstes Semester.

Einfache Merkregel: kommt gleich.

Benötigt werden etwas später noch:

$\tan(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, nicht definiert bei $\varphi = \frac{2n+1}{2}\pi, n \in \mathbb{N}$

$\cot(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, nicht definiert bei $\varphi = n\pi, n \in \mathbb{N}$.

Geometrischer Beweis $\longrightarrow$ Skript.

Analytischer Beweis $\longrightarrow$ nächstes Semester.

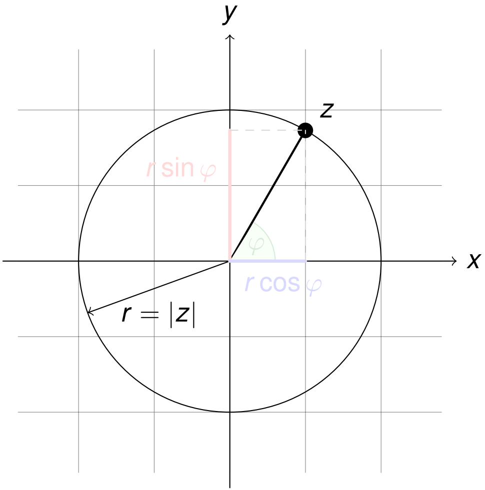
Einfache Merkregel: kommt gleich.

Benötigt werden etwas später noch:

$\tan(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, nicht definiert bei $\varphi = \frac{2n+1}{2}\pi, n \in \mathbb{N}$

$\cot(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, nicht definiert bei $\varphi = n\pi, n \in \mathbb{N}$.

Jetzt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$



$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Kürze ab:

$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$

Abkürzung gut?

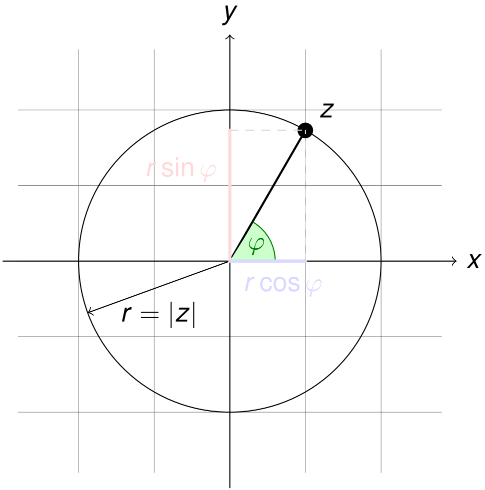
JA:

$e^{i(\varphi+\psi)} =$
$\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)$
$= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi +$
$i(\cos\varphi \sin\psi + \cos\psi \sin\varphi)$
$= (\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\psi + i \sin\psi)$
$= e^{i\varphi} e^{i\psi}$

Dann

$z = re^{i\varphi}$

Jetzt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$



$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Kürze ab:

$$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Abkürzung gut?

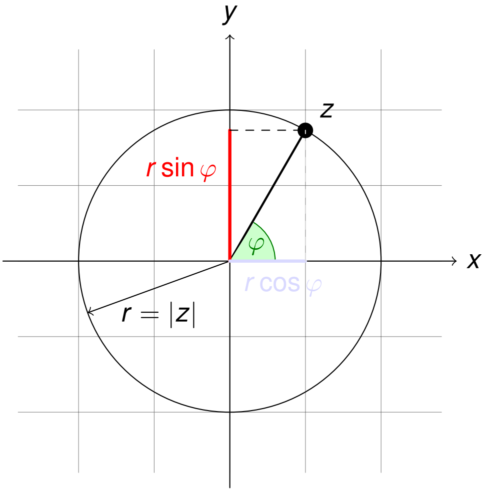
JA:

$e^{i(\varphi+\psi)} =$
$\cos(\varphi+\psi) + i \sin(\varphi+\psi)$
$= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi +$
$i(\cos\varphi \sin\psi + \cos\psi \sin\varphi)$
$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)$
$= e^{i\varphi} e^{i\psi}$

Dann

$$z = re^{i\varphi}$$

Jetzt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$



$$z = r(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi))$$

Kürze ab:

$$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Abkürzung gut?

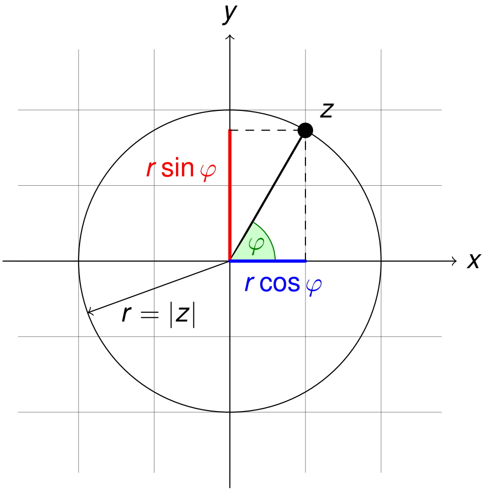
JA:

$$e^{i(\varphi+\psi)} =$$
$$\cos(\varphi+\psi) + i\ \sin(\varphi+\psi)$$
$$= \cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi +$$
$$i(\cos\varphi\ \sin\psi + \cos\psi\ \sin\varphi)$$
$$= (\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\psi + i \sin\psi)$$
$$= e^{i\varphi}\ e^{i\psi}$$

Dann

$$z = re^{i\varphi}$$

Jetzt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$



$$z = r(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi))$$

Kürze ab:

$$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Abkürzung gut?

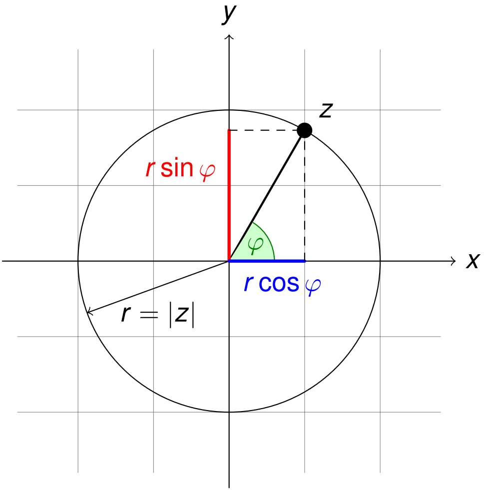
JA:

$$e^{i(\varphi+\psi)} =$$
$$\cos(\varphi+\psi) + i\ \sin(\varphi+\psi)$$
$$= \cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi +$$
$$i(\cos\varphi\ \sin\psi + \cos\psi\ \sin\varphi)$$
$$= (\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\psi + i \sin\psi)$$
$$= e^{i\varphi}\ e^{i\psi}$$

Dann

$$z = re^{i\varphi}$$

Jetzt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$



$$z = r(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi))$$

Kürze ab:

$$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Abkürzung gut?

JA:

$e^{i(\varphi+\psi)} =$

$\cos(\varphi+\psi) + i\ \sin(\varphi+\psi)$

$= \cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi +$

$i(\cos\varphi\ \sin\psi + \cos\psi\ \sin\varphi)$

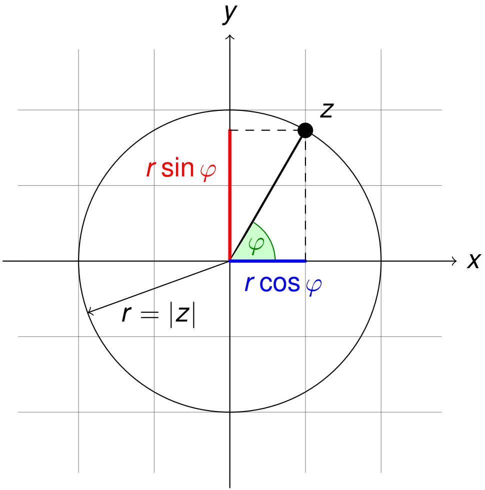
$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)$

$= e^{i\varphi}\ e^{i\psi}$

Dann

$$z = re^{i\varphi}$$

Jetzt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$



$$z = r(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi))$$

Kürze ab:

$$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Abkürzung gut?

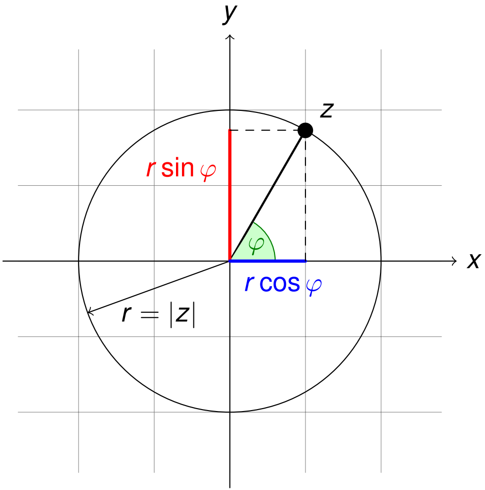
JA:

$e^{i(\varphi+\psi)} =$
$\cos(\varphi + \psi) + i\ \sin(\varphi + \psi)$
$= \cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi +$
$i(\cos\varphi\ \sin\psi + \cos\psi\ \sin\varphi)$
$= (\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\psi + i \sin\psi)$
$= e^{i\varphi}\ e^{i\psi}$

Dann

$$z = re^{i\varphi}$$

Jetzt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$



$$z = r(\cos(\varphi) + i \ \sin(\varphi))$$

Kürze ab:

$$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Abkürzung gut?

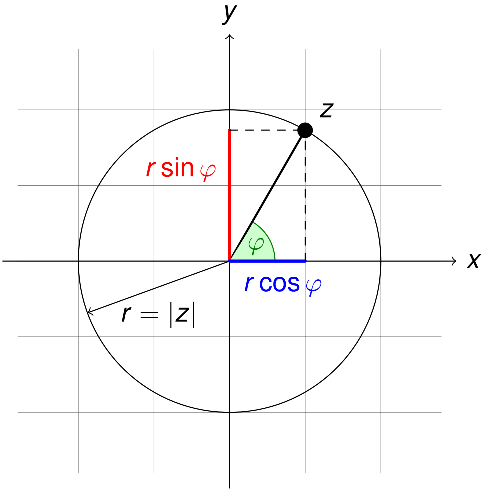
JA:

$e^{i(\varphi+\psi)} =$
$\cos(\varphi + \psi) + i \ \sin(\varphi + \psi)$
$= \cos\varphi \ \cos\psi - \sin\varphi \ \sin\psi +$
$i(\cos\varphi \ \sin\psi + \cos\psi \ \sin\varphi)$
$= (\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\psi + i \sin\psi)$
$= e^{i\varphi} \ e^{i\psi}$

Dann

$$z = re^{i\varphi}$$

Jetzt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$



$$z = r(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi))$$

Kürze ab:

$$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Abkürzung gut?

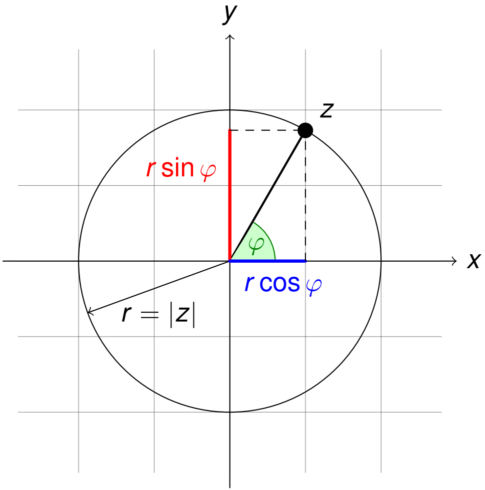
JA:

$$e^{i(\varphi+\psi)} =$$
$$\cos(\varphi+\psi) + i\ \sin(\varphi+\psi)$$
$$= \cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi +$$
$$i(\cos\varphi\ \sin\psi + \cos\psi\ \sin\varphi)$$
$$= (\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\psi + i \sin\psi)$$
$$= e^{i\varphi}\ e^{i\psi}$$

Dann

$$z = re^{i\varphi}$$

Jetzt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$



$$z = r(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi))$$

Kürze ab:

$$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Abkürzung gut?

JA:

$$e^{i(\varphi+\psi)} =$$
$$\cos(\varphi+\psi) + i\ \sin(\varphi+\psi)$$
$$= \cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi +$$
$$i(\cos\varphi\ \sin\psi + \cos\psi\ \sin\varphi)$$
$$= (\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\psi + i \sin\psi)$$
$$= e^{i\varphi}\ e^{i\psi}$$

Dann

$$z = re^{i\varphi}$$

Seite 34

Eulers Formel

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Ist ungeheuer praktisch!

Anwendungsbeispiel: Additionstheoreme vergessen?

Euler liefert:

$$\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) = e^{i(\varphi+\psi)}$$
$$= e^{i\varphi}\, e^{i\psi}$$
$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)$$
$$= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\ sin\psi + \cos\psi\sin\varphi)$$

Vergleiche Real- und Imaginärteile beider Seiten. Fertig!

Seite 34

Eulers Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Ist ungeheuer praktisch!

Anwendungsbeispiel: Additionstheoreme vergessen?

Euler liefert:

$$\cos(\varphi+\psi) + i\,\sin(\varphi+\psi) = e^{i(\varphi+\psi)}$$
$$= e^{i\varphi}\,e^{i\psi}$$
$$= (\cos\varphi + i\,\sin\varphi)(\cos\psi + i\,\sin\psi)$$
$$= (\cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi) + i(\cos\varphi\,\sin\psi + \cos\psi\,\sin\varphi)$$

Vergleiche Real- und Imaginärteile beider Seiten. Fertig!

Seite 34

Eulers Formel

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Ist ungeheuer praktisch!

Anwendungsbeispiel: Additionstheoreme vergessen?

Euler liefert:

$\underline{\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)} = e^{i(\varphi+\psi)}$

$= e^{i\varphi}\, e^{i\psi}$

$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)$

$= \underline{(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\, sin\psi + \cos\psi\sin\varphi)}$

Vergleiche Real- und Imaginärteile beider Seiten. Fertig!

Seite 34

Eulers Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Ist ungeheuer praktisch!

<u>Anwendungsbeispiel:</u> Additionstheoreme vergessen?

Euler liefert:

$$\underline{\cos(\varphi+\psi) + \ i \ \sin(\varphi+\psi)} = e^{i(\varphi+\psi)}$$
$$= e^{i\varphi}\ e^{i\psi}$$
$$= (\cos\varphi + \ i \ \sin\varphi)(\cos\psi + \ i \ \sin\psi)$$
$$= \underline{(\cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi) + \ i(\cos\varphi\ \ sin\psi + \cos\psi\ \sin\varphi)}$$

Vergleiche Real- und Imaginärteile beider Seiten. Fertig!

Seite 34

Eulers Formel

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

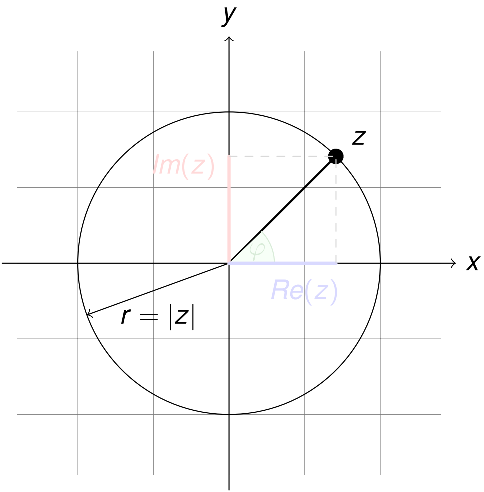
Ist ungeheuer praktisch!

Anwendungsbeispiel: Additionstheoreme vergessen?

Euler liefert:

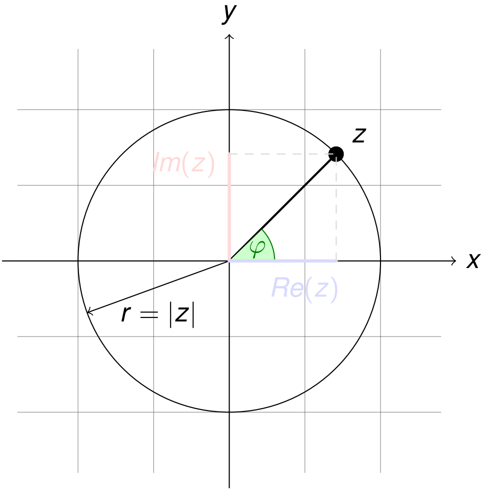
$$\underline{\cos(\varphi+\psi) + i\ \sin(\varphi+\psi)} = e^{i(\varphi+\psi)}$$
$$= e^{i\varphi}\ e^{i\psi}$$
$$= (\cos\varphi + i\ \sin\varphi)(\cos\psi + i\ \sin\psi)$$
$$= \underline{(\cos\varphi\ \cos\psi - \sin\varphi\ \sin\psi) + i(\cos\varphi\ \ sin\psi + \cos\psi\ \sin\varphi)}$$

Vergleiche Real- und Imaginärteile beider Seiten. Fertig!



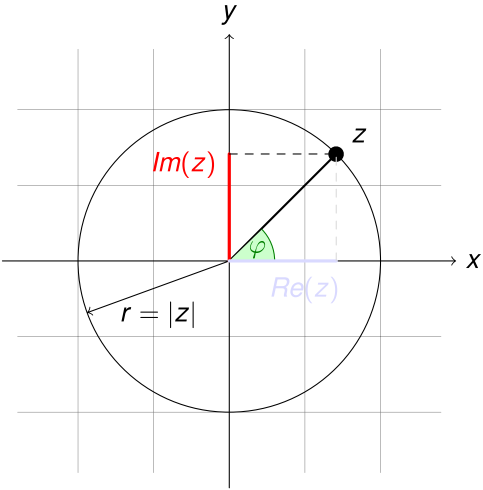
$z = Re(z) + i\, Im(z)$
$= r\, e^{i\varphi}$, $\varphi = arg\, z$.
$arg\, z$ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Praktische Bestimmung von φ aus
$\tan\varphi = \frac{Im(z)}{Re(z)}$
$\left(\varphi = arc\, \tan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)\right)$



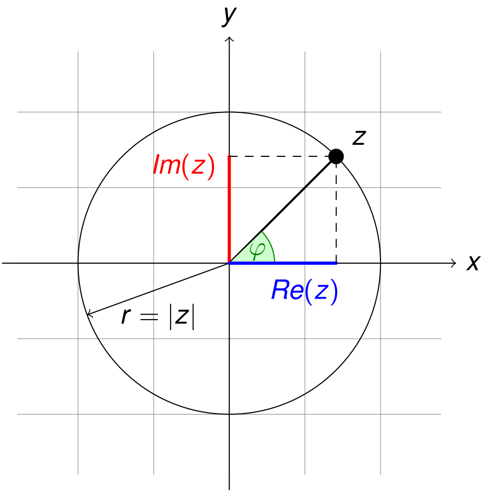
$z = Re(z) + i\, Im(z)$
$= r\, e^{i\varphi}$, $\varphi = arg\, z$.
$arg\, z$ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Praktische Bestimmung von φ aus
$\tan\varphi = \frac{Im(z)}{Re(z)}$
$\left(\varphi = arc\,\tan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)\right)$



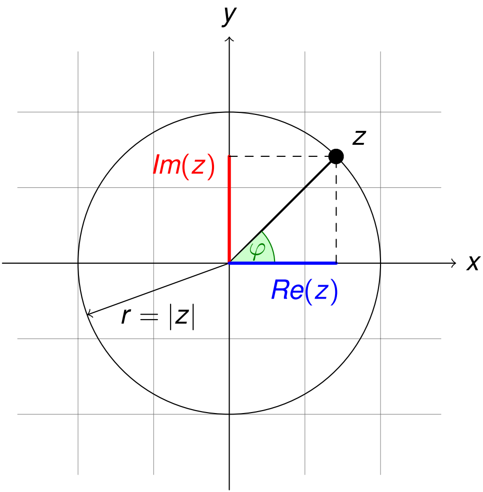
$z = Re(z) + i\, Im(z)$
$= r\, e^{i\varphi}$, $\varphi = arg\ z$.
$arg\ z$ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Praktische Bestimmung von φ aus
$\tan \varphi = \frac{Im(z)}{Re(z)}$
$\left(\varphi = arc\ \tan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)\right)$



$z = Re(z) + i\ Im(z)$
$= r\ e^{i\varphi},\ \varphi = arg\ z.$
$arg\ z$ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Praktische Bestimmung von φ aus
$\tan\varphi = \frac{Im(z)}{Re(z)}$
$\left(\varphi = arc\ \tan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)\right)$



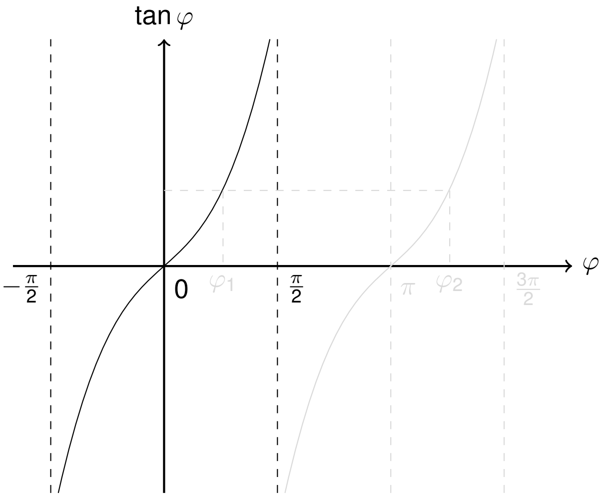
$z = Re(z) + i\ Im(z)$
$= r\ e^{i\varphi},\ \varphi = arg\ z.$
$arg\ z$ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Praktische Bestimmung von φ aus

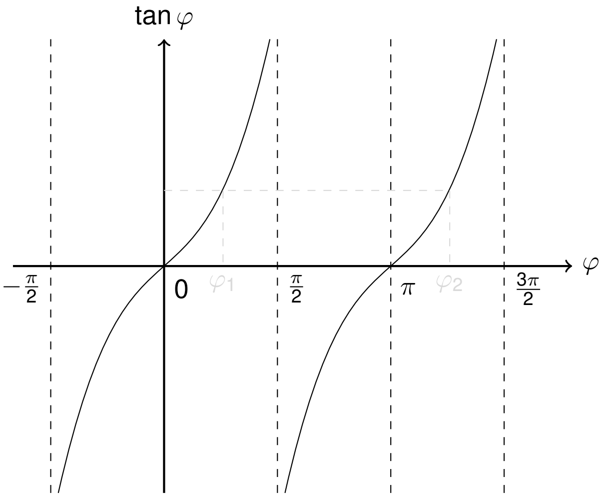
$\tan\varphi = \frac{Im(z)}{Re(z)}$

$\left(\varphi = arc\ \tan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)\right)$

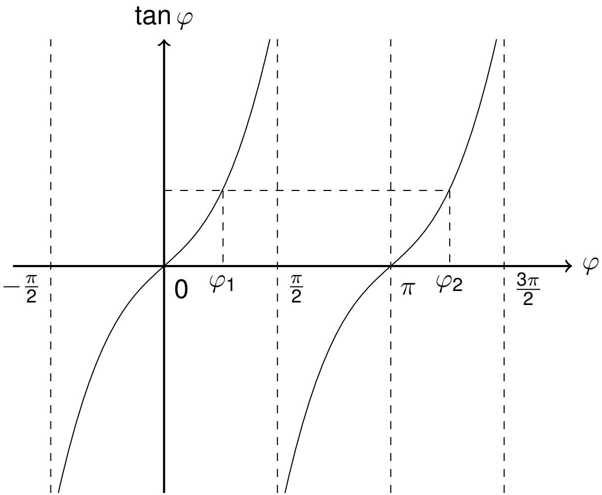
Aber Achtung!

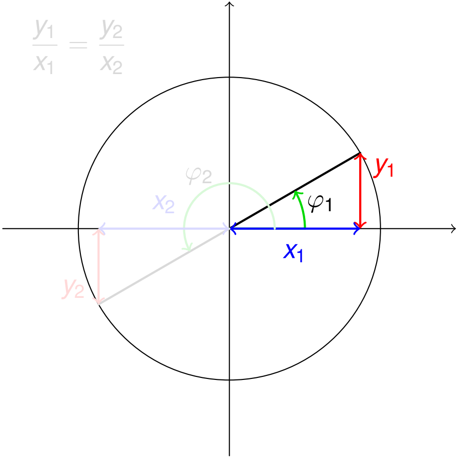


Aber Achtung!



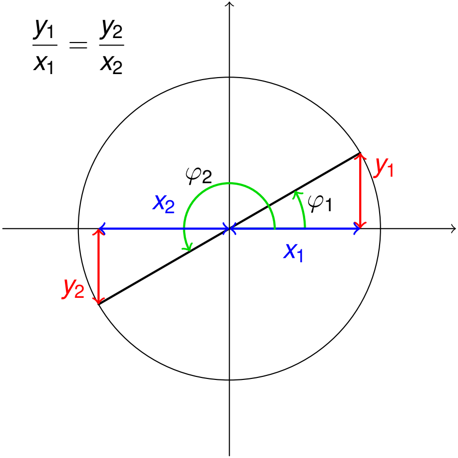
Aber Achtung!





$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$
y_1
φ_1
x_1
φ_2
x_2
y_2

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$



Wozu der Aufstand?

Seite 34

Antwort: Multiplikation und Division werden sehr einfach!

$$(r_1\, e^{i\,\varphi_1})(r_2\, e^{i\,\varphi_2}) = \underbrace{r_1 \cdot r_2}_{\text{multipliziere Beträge}} \cdot \underbrace{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}_{\text{addiere Argumente.}}$$

$$(r_1\, e^{i\,\varphi_1}) \Big/ (r_2\, e^{i\,\varphi_2}) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i\,(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Speziell (Formel von de Moivre)

$$(r\, e^{i\,\varphi})^n = r^n\, e^{i\,n\,\varphi}$$

$$[r(\cos\,\varphi + \,i\,\sin\varphi)]^n = r^n(\cos\,n\,\varphi + \,i\,\sin n\,\varphi) \Rightarrow \text{weitere Additionstheoreme}$$

Wozu der Aufstand?

Antwort: Multiplikation und Division werden sehr einfach!

$$(r_1\, e^{i\,\varphi_1})(r_2\, e^{i\,\varphi_2}) = \underbrace{r_1 \cdot r_2}_{\text{multipliziere Beträge}} \cdot \underbrace{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}_{\text{addiere Argumente.}}$$

$$(r_1\, e^{i\,\varphi_1})\Big/(r_2\, e^{i\,\varphi_2}) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i\,(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Speziell (Formel von de Moivre)

$$(r\, e^{i\,\varphi})^n = r^n\, e^{i\,n\,\varphi}$$

$[r(\cos\,\varphi + \,i\,\sin\varphi)]^n = r^n(\cos\,n\,\varphi + \,i\,\sin n\,\varphi) \Rightarrow$ weitere Additionstheoreme

De Moivre rückwärts:

Seite 45

Gesucht n-te Wurzel aus

$z = r\, e^{i\,\varphi}$

Eine Antwort

$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\, e^{i\,\varphi/n}$

Aber auch

$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\, e^{i(\varphi/n + \frac{2\pi}{n}\cdot k)} \qquad k = 1, \cdots, n-1$

da $\qquad n \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot k = 2\pi \cdot k$

Allgemein:

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\, e^{i\,(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k)}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

De Moivre rückwärts:

Seite 45

Gesucht n-te Wurzel aus

$z = r\, e^{i\,\varphi}$

Eine Antwort

$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\, e^{i\,\varphi/n}$

Aber auch

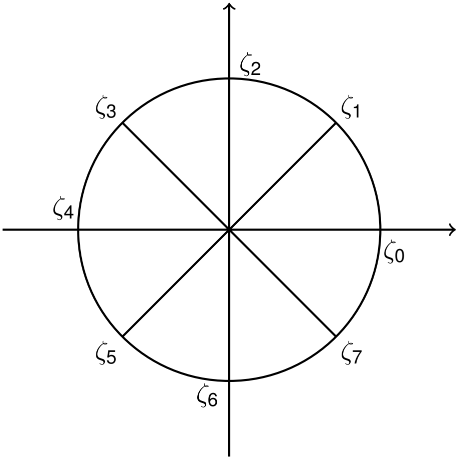
$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\, e^{i(\varphi/n + \frac{2\pi}{n}\cdot k)} \qquad k = 1, \cdots, n-1$

da $\qquad n \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot k = 2\pi \cdot k$

Allgemein:

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\, e^{i\,(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot k)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

Seite 36



Die 8 achten Wurzeln aus 1.
Die 8 achten ““Einheitswurzeln““.

Sind komplexe Zahlen wirklich?

Ende der 1. Vorlesung