Vorlesung 6

10. Mai + 13. Mai

Eigenwertaufgaben 1

Eigenwertaufgabe

$$A\,x = \lambda\,x$$

Motivation 1: Schwingungen

$$\begin{pmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \\ y_3''(t) \\ y_4''(t) \\ y_5''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{pmatrix}$$

Ansatz:

$$y(t) = \sin(\omega t)s, \quad s \in \mathbb{R}^5, \text{ zeitunabhängig.}$$

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} (-\omega^2)\sin(\omega t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} \sin(\omega t)$$

Motivation 1: Schwingungen

$$\begin{pmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \\ y_3''(t) \\ y_4''(t) \\ y_5''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{pmatrix}$$

Ansatz:

$$y(t) = \sin(\omega t)s, \quad s \in \mathbb{R}^5, \text{ zeitunabhängig.}$$

Einsetzen:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} \underbrace{(-\omega^2)}_{\lambda}\sin(\omega t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} \sin(\omega t)$$

Also

$$\lambda s = As$$

Motivation 2: Vereinfache lineare Systeme

Normalform einer Matrix:

$$R^{-1} \quad A \quad S \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{beschreibt Problem}}{A} \quad \longrightarrow \quad \underset{\text{beschreibt dasselbe Problem viel einfacher; SCHÖÖÖN!}}{D_r}$$

Leider Basiswechsel im Urbild und Bild erforderlich!

Hauptanwendung $(n \times n)$ - Matrizen. Dort am Liebsten gleicher Basiswechsel in Bild- und Urbild!

Frage

A hässlich! (angenommen)

Gibt es einen Basis-Wechsel?

$$X^{-1} \quad A \quad X = D$$

$$\uparrow$$

DIAGONAL!

Warum ist eine Diagonalmatrix schön?

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{aligned} d_1 x_1 &= b_1 \\ d_2 x_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ d_n x_n &= b_n \end{aligned}$$

Eine Diagonalmatrix „ist gar keine richtige Matrix.“

Also

$$X^{-1} \quad A \quad X = \underset{\text{diagonal}}{D} \quad ?$$

$$\iff$$

$$A\,X = X\,D$$

$$\iff$$

$$A\,(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^n) \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$$\iff$$

$$Ax^i = d_i x^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$A\,x^i = d_i\,x^i; i = 1, \cdots, n$$

Leider geht das nicht immer reell.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = d \cdot x = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} x \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -d & 1 \\ -1 & -d \end{pmatrix}}_{\Rightarrow d^2+1=0} x = 0\,.$$

Offenbar geht's aber wohl immer komplex!

Definition 8.2

Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$.
$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A, wenn $\exists\, x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ mit

$$A\,x = \lambda\,x.$$

x ist ein zu λ gehöriger Eigenvektor von A.

$A\,x = \lambda\,x \Leftrightarrow (A - \lambda\,E)x = 0.$
$\Rightarrow$ Alle Eigenvektoren zu λ bilden (mit Null dazu) einen Vektorraum.

$$E_\lambda := \{x \in \mathbb{C}^n | A\,x = \lambda\,x\} \text{heißt Eigenraum zu } \lambda.$$

Das Paar (x, λ) mit $Ax = \lambda x$ $(x \neq 0)$ heißt ein Eigenpaar von A.

Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und der EW λ auch in $\mathbb{R}$, so gibt es auch reelle Lösungen von

$$(A - \lambda\,E)x = 0,$$

also reelle Eigenvektoren.

Tatsächlich sind Real- und Imaginärteil eines komplexen Eigenvektors

$$\mathbb{C}^n \ni z = x + i\,y$$

dann wegen

$$\underbrace{(A - \lambda\,E)z}_{=0} \underset{\Rightarrow}{=} \underbrace{(A - \lambda\,E)x}_{=0} + i\,\underbrace{(A - \lambda\,E)y}_{=0}$$

auch Eigenvektoren (reelle) von A zum Eigenwert λ.

Bei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit EW $\lambda \in \mathbb{R}$ ist deshalb

$$\begin{aligned} E_\lambda &:= \{z \in \mathbb{C}^n | (A - \lambda\,E)z = 0\} \\ &= E_\lambda^{\mathbb{R}} + i\,E_\lambda^{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

mit

$$E_\lambda^{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda\,E)x = 0\}$$

Um den komplexen E_λ zu kennen, genügt hier die Kenntnis des reellen Eigenraumes

$$E_\lambda^{\mathbb{R}}.$$

Wir schreiben deshalb auch

$$E_\lambda \text{ für } E_\lambda^{\mathbb{R}}.$$

Aus

$$A\,x = \lambda\,x$$

sieht man:

„Die reellen Eigenvektoren (einer reellen Matrix A) ändern bei Abbildung durch A (eventuell abgesehen vom Vorzeichen) ihre Richtung nicht.“

Und umgekehrt ist jeder solcher Vektor reeller Eigenvektor.

Beispiele

a)

$$A = E \qquad E\,x = 1 \cdot x.$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \quad \text{ist EW.}$$

$$E_1 = \mathbb{R}^n.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_1 = 1 \quad E_1 = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 2 \quad E_2 = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 3 \quad E_3 = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Jeder Vektor nicht in E_1, E_2, E_3 ist kein EV.

$$\text{Vgl.} : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & x \\ 2 & \cdot & y \\ & 0 & \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0.$$

Seite 243

c) 8.3 aus Skript

$$w \in \mathbb{R}^n \quad ||w|| = 1$$

$$A = H = E - 2ww^T$$

$$A\,w = (-1)w \quad \lambda_1 = -1, E_{-1} = span\{w\}$$

$$A\,x = 1 \cdot x \quad \text{bei } x \perp w$$

$$\lambda_2 = 1, E_0 = \{w\}^{\perp}$$

d) 8.4 aus Skript

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi = 0 \quad A = E \quad \text{klar}$$

$$\varphi = \pi \quad A = -E \quad \text{auch klar}$$

$$\varphi \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$$

(„Richtige anständige Drehung") Anschaulich: kein reeller Vektor behält seine Richtung.

d) Bedingung für Eigenwert (und Eigenvektor):

$$x \neq 0: \qquad A\,x = \lambda\,x \quad \Leftrightarrow \quad A\,x = \lambda\,Ex$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(A - \lambda\,E)}_{det(A-\lambda\,E)=0}\; x = 0$$

$$det\begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = 0$$

$$\lambda = \cos\varphi \pm i\,\sin\varphi = e^{\pm i\,\varphi}$$

Satz 8.5

Für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ gelten:

(i)

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ ist EW von } A \Longleftrightarrow det(A - \lambda\,E) = 0$$

(ii)

$$\phi(\lambda) := det(A - \lambda\,E)$$

(das charakteristisches Polynom von A) ist ein Polynom vom Grad n. In $\phi(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\,\lambda^i$ sind $\alpha_n = (-1)^n, \alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ und $\alpha_0 = det\ A$.

(iii)

$$A \text{ besitzt } \begin{cases} \text{höchstens } n \text{ Eigenwerte,} \\ \text{mindestens einen.} \end{cases}$$

(iv) $\lambda = 0$ ist EW von $A \quad \Leftrightarrow A \quad$ ist singulär.

Beweis: (i) ✓
(iii) Fundamentalsatz der Algebra und (ii)
(iv) ✓

Zu (ii)

$$„det(A - \lambda\,E) = (-1)^n\lambda^n + \text{ niedrigere Terme"}$$

Sei $S_n :=$ Menge aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$.

Sei $B := A - \lambda\,E \quad$ (λ- tritt nur in der Diagonale auf). Dann ist

$$det\ B = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n} sign(i_1,\cdots,i_n) \qquad \underbrace{b_{i_1,1}\cdots b_{i_n,n}}_{\text{jeder Faktor höchstens linear in } \lambda}$$

Nur für $(i_1,\cdots,i_n) = (1,\cdots,n)$ ist in **jedem** Faktor λ.
In allen anderen mindestens jeweils zwei Elemente $b_{i_k,k}$ frei von λ.

$\Rightarrow \phi(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) + \psi(\lambda)$ mit $\psi(\lambda) \in \Pi_{n-2}$. fertig $\square$

Beispiele

a)

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}; \; det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} r_{11}-\lambda & 0.. & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & r_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(r_{ii}-\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_i = r_{ii}; \; i = 1, \cdots, n$$

Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix stehen in der Diagonale.

a) Mit $\lambda = r_{ii}$

$$(A-\lambda E) = \begin{bmatrix} r_{11}-r_{ii} & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & r_{i-1,i-1}-r_{ii} & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & r_{i+1,i+1}-r_{ii} & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & r_{nn}-r_{ii} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-\lambda E)e^i = 0.$$

$\Rightarrow$ Ein Eigenvektor zu $\lambda = r_{ii}$ ist e^i

Seite 246

b) Skript Beispiel 8.8.

$$A = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} r_{11}-\lambda & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & r_{n-1,n} \\ & & & r_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(r_{ii}-\lambda)$$

Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix (entlang Hauptdiagonale) sind die Diagonalelemente.

b) Die Eigenvektoren sind aber (i.a.) nicht mehr die Einheitsvektoren.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$

$0 \overset{!}{=} (A-2E)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Aber $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist kein Eigenvektor mehr!

Ende der 6. Vorlesung

Vorlesung 7

17. Mai + 27. Mai

Eigenwertaufgaben 2

Seite 242

Wiederholung

$$X^{-1} \quad A \quad X = \underbrace{\Lambda}_{\text{diagonal}} \quad ?$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A\,X = X\,\Lambda$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A\,(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Ax^i = \lambda_i x^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Immer noch Wiederholung

Bedingung für Eigenwert (und Eigenvektor):

$$x \neq 0 : \qquad A\,x = \lambda\,x \quad \Leftrightarrow \quad A\,x = \lambda\,Ex$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(A - \lambda\,E)}_{det(A - \lambda\,E) = 0}\; x = 0$$

$\Phi(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ heißt charakteristisches Polynom von A.

λ Nullstelle von $\Phi \qquad \Longrightarrow \qquad (A - \lambda E)x = 0$ nichttrivial lösbar.

c) A Block-Dreiecksmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_{11}} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \boxed{A_{22}} & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{A_{33}} & \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{A_{kk}} \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda E) = \prod_{i=1}^{k} det(A_{ii} - \lambda\, E_{n_i})$$

$$\Longrightarrow$$

Die Eigenwerte von A sind die Vereinigung der Eigenwerte der $A_{ii}, i = 1, \cdots, k$

d) Wenn die Matrix nicht in expliziter Matrixform vorliegt, ist

$$\phi(\lambda)$$

oft schwer berechenbar.

Beispiel: $H = E - 2ww^T$.

Anmerkung: Tatsächlich berechnet man in echten Anwendungsfällen $\phi(\lambda)$ fast nie!

Seite 245

e) 8.6 aus Skript

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\lambda) = det \begin{pmatrix} 8-\lambda & 8 & 4 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda - 4)^2$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4.$$

$$E_0 = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad E_4 = span\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e)

$$(A - 4E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E4 = span \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Skript 8.7

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}; \phi(\lambda) = -\lambda(\lambda-4)^2$$

$$(B-4E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1,2,3)x = 0$$

$$\Rightarrow dim\, E_4 = 2$$

Übereinstimmung von EWen sagt nichts über EVen.

f) 8.10 in Skript: Geg. $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\phi_A(x) = det(A-\lambda E) = (-1)^n \underbrace{(1\,\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\,\lambda^1 + a_0)}_{p(\lambda)}$$

A heißt Frobenius - oder Begleitmatrix von $p(\lambda)$.

Fazit: Jedes Polynom kann charakteristisches Polynom sein.

Definition 8.11

$$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}, \quad \phi(\lambda) := det(A-\lambda E)$$

$\tilde\lambda$ sei EW von A, $E_{\tilde\lambda}$ zugehöriger Eigenraum. Dann

$$\gamma(\tilde\lambda) := dim\, E_{\tilde\lambda}$$

heißt geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\tilde\lambda$

$$\alpha(\tilde\lambda) := \text{ Potenz von } (\lambda-\tilde\lambda) \text{ in } \phi(\lambda)$$

heißt algebraische Vielfachheit von $\tilde\lambda$

Also: $\phi(\lambda)$ teilbar durch $(\lambda-\tilde\lambda)^k \quad k \in \mathbb{N}$,
aber nicht durch $(\lambda-\tilde\lambda)^{k+1} :\Rightarrow \alpha(\tilde\lambda) = k$.

Beispiel 8.12 Skript

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \phi(\lambda) = -\lambda(\lambda-4)^2 = -(\lambda-0)^1(\lambda-4)^2$$

$\Rightarrow \alpha(0) = 1 \qquad \alpha(4) = 2$

$$E_0 = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, E_4 = span\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\gamma(0) = 1 \qquad \gamma(4) = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \phi(\lambda) = -(\lambda-0)^1(\lambda-4)^2$$

$\alpha(0) = 1 \qquad , \alpha(4) = 2$

$$E_0 = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, E_4 = span\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\gamma(0) = 1 \qquad \gamma(4) = 2$

Fundamentalsatz der Algebra

Zählt man die Nullstellen eines Polynoms VOM GRADE n mit ihren Vielfachheiten, so gibt es genau n Stück.

Satz 8.13

Zählt man die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ mit ihren algebraischen Vielfachheiten, so hat die $(n \times n)$-Matrix genau n Eigenwerte in $\mathbb{C}$, also $\sum_{\lambda \text{ EW}} \alpha(\lambda) = n$.

Definition

$$Spec(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \middle| \lambda \text{ EW von } A\right\}$$

heißt „das Spektrum von A“.

Erinnerung (Def. 8.14)

1. A ähnlich B $:\Longleftrightarrow$ $\exists S \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ regulär so dass $A = S^{-1} BS$. (A & B vermitteln dieselbe Abb. bzgl. versch. Basen)
2. Ziel war: Finde X mit $X^{-1} AX = \underset{\text{schön}}{D}$ („A diagonalisieren.“) Ist B ähnlich zu A so ist mit A auch schon B diagonalisiert; denn

$$X^{-1} AX = \underset{\text{schön}}{D} \Rightarrow \underbrace{X^{-1} S^{-1}}_{Y^{-1}} B \underbrace{SX}_{Y} = D$$

$Y^{-1} BY = D$ bleibt gleich!
$A = S^{-1} BS$
$X \longrightarrow SX$ D bleibt.

Satz 8.15

A und B ähnlich
$\Longrightarrow$

(i)

$$\phi_A(\lambda) = \phi_B(\lambda)$$

(ii)

$$spec(A) = spec(B)$$

(iii)

$$\lambda \in spec(A) \quad (= spec(B))$$

$$\alpha_A(\lambda) = \alpha_B(\lambda)$$

und

$$\gamma_A(\lambda) = \gamma_B(\lambda).$$

Beweis

$B = S^{-1} AS$

(i)

$$\begin{aligned} det(B - \lambda E) &= det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) \\ &= det(S^{-1}(A - \lambda E)S) \\ &= det(S^{-1}det(A - \lambda E)det(S) \\ &= det(A - \lambda E).\checkmark \end{aligned}$$

(ii) ✓

(iii) $u^1, \cdots, u^k$ l.u. $\in E_\lambda$ von A
$\Rightarrow S^{-1}u^1, \cdots, S^{-1}u^k$ l.u. und

$$\begin{aligned} BS^{-1}u^j &= S^{-1}AS\,S^{-1}u^j \\ &= S^{-1}\,Au^j = \lambda\,S^{-1}u^j \end{aligned}$$

also

$$S^{-1}u^j \text{ EV zu } \lambda \text{ und } B.$$

Umgekehrt
$v^1, \cdots, v^m$ l.u. $\in E_\lambda$ von B
$\Rightarrow Sv^1, \cdots, Sv^m$ l.u. und

$$\begin{aligned} A\,Sv^i &= SBS^{-1}Sv^i = SBv^i \\ &= \lambda\,Sv^i. \quad \square \end{aligned}$$

Demnach: A und B aus Beispiel S.385 nicht ähnlich, weil Eigenräume nicht übereinstimmen.

MERKE ALSO!

$$B = S^{-1}\,AS$$

$$y \text{ EV von } B \text{ zu } \lambda \in spec(B)$$

$$\lambda y = By = S^{-1}\,A\,\underbrace{S\,y}_{z}$$

$$\lambda z = \lambda\,Sy = A\,z$$

$$z = Sy \text{ EV von } A \text{ zu } \lambda \in spec(A)$$

Seite 249

Satz 8.18

$$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}, \tilde\lambda \in spec(A)$$

dann

$$\alpha(\tilde\lambda) \geq \gamma(\tilde\lambda)$$

Beweis

Sei $\gamma := \gamma(\tilde\lambda)$ und $u^1, \cdots, u^\gamma$ unitäre Basis von $E_{\tilde\lambda}$;

also $< u^i, u^j >= \delta_{ij}$ mit $< u, v >= \sum_{i=1}^n u_i\,\bar v_i$

Wir wollen zeigen, dass $(\lambda - \tilde\lambda)$ in $\phi_A(\lambda)$

mindestens γ-mal als Faktor auftritt; also $\alpha(\tilde\lambda) \geq \gamma(\tilde\lambda)$.

Ergänze dazu $u^1, \cdots, u^\gamma$ zu unitärer Basis des $\mathbb{C}^n : u^1, \cdots, u^\gamma, u^{\gamma+1}, \cdots, u^n$.
Dann hat man

$$\mathbb{C}^{(n,n)} \ni U := (\overbrace{u^1, \cdots, u^\gamma}^{\text{Basis } E_{\tilde\lambda}}, u^{\gamma+1}, \cdots, u^n)$$

$$U^*\,U = E,\; U^* = U^{-1}$$

$$Au^1 = \tilde\lambda u^1, \cdots,\; Au^\gamma = \tilde\lambda u^\gamma$$

$$U^{-1} = U^*,\; U^*\,U = E \text{ bedeutet } U^*\,u^i = e^i, i = 1, \cdots, n.$$

Bilde $B := U^{-1}\,A\,U = U^*\,A\,U$, und beachte $\phi_B(\lambda) = \phi_A(\lambda)$

Dann findet man

$$\begin{aligned}
U^{-1}AU &= U^{-1}(Au^1, \cdots, Au^\gamma, Au^{\gamma+1}, \cdots, Au^n) \\
&= U^{-1}(\tilde{\lambda}u^1, \cdots, \tilde{\lambda}u^\gamma, Au^{\gamma+1}, \cdots, Au^n) \\
&= (\tilde{\lambda}U^{-1}u^1, \cdots, \tilde{\lambda}U^{-1}u^\gamma, U^{-1}Au^{\gamma+1}, \cdots, U^{-1}Au^n) \\
&= (\tilde{\lambda}e^1, \cdots, \lambda e^\gamma, * \cdots *) \\
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\tilde{\lambda} & & & * & \cdots & * \\
& \ddots & & \vdots & & \vdots \\
& & \tilde{\lambda} & * & \cdots & * \\
\hline
0 & \cdots & 0 & & & \\
\vdots & & \vdots & & C & \\
0 & \cdots & 0 & & &
\end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$U^{-1}AU = \left(\begin{array}{cccc|ccc}
\tilde{\lambda} & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \tilde{\lambda} & * & \cdots & * \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
\vdots & & & \vdots & & C & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & & &
\end{array}\right) = B$$

$$\phi_A(\lambda) = \phi_B(\lambda) = det(B - \lambda E)$$

$$= det \begin{pmatrix}
\tilde{\lambda}-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \tilde{\lambda}-\lambda
\end{pmatrix} \cdot det(C - \lambda E)$$

$$= (\tilde{\lambda} - \lambda)^\gamma det(C - \lambda E)$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha_B(\tilde{\lambda}) \geq \gamma$$

(„$>$“ ist möglich!)

$$\alpha_B(\tilde{\lambda}) = \alpha_A(\tilde{\lambda}) \qquad \square$$

Ende der 7. Vorlesung

Vorlesung 8

31. Mai + 3. Juni

Eigenwertaufgaben 3

Wiederholung

1. Wenn $X^{-1}A\,X = \Lambda$ (diagonal), so sind

   (x_i, λ_i) aus $X = (x^1, \cdots, x^n)$, und $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} := D$ Lösungen

   von $Ax = \lambda x$.
   Wir suchen also n linear unabhängige Vektoren, die für geeignete λ-Werte $Ax = \lambda x$ erfüllen.
2. Eigenwert $\tilde\lambda \in spec(A)$ erfüllt
   $0 = \phi(\tilde\lambda) = det(A - \tilde\lambda E)$
3. Eigenvektor $\tilde x$ zu $\tilde\lambda$ erfüllt
   $A\tilde x = \tilde\lambda \tilde x \Leftrightarrow (A - \tilde\lambda E)x = 0$.
4. Es gibt (mit algebraischen Vielfachheiten $\alpha(\lambda)$) n Eigenwerte
   $\sum_{\lambda \in spec(A)} \alpha(\lambda) = n$.
5. Es gibt zu jedem $\tilde\lambda \in spec(A)$ mindestens einen Eigenvektor $\tilde x$
6. $\alpha(\tilde\lambda) \geq \gamma(\tilde\lambda)$ ($>$ möglich)

Mehr Beispiele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \phi(\lambda) = (1-\lambda)^4; \quad \text{spec}(A) = \{1\}$$

$$(A - 1\cdot E)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

Rang 3 $\Rightarrow dim\, E_1 = 1$

$$E_1 = \text{span}\left\{e^1\right\}.$$

Noch ein Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \phi(\lambda) = (1-\lambda)^4; \quad \text{spec}(A) = \{1\}.$$

$$(A - 1\cdot E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{Rang} = 2;$$

$$dim\, E_1 = 2, \quad E_1 = \text{span}\left\{e^1, e^3\right\}.$$

Definition

Wenn $\exists\, X \in C^{(n,n)}$ regulär mit $X^{-1} A\, X = D$ (diagonal), so heißt A diagonalisierbar.

Feststellungen

1. X besteht aus Eigenvektoren
2. X regulär $\Rightarrow$ Eigenvektoren in X linear unabhängig.

Also

A ist genau dann diagonalisierbar,
wenn es n linear unabhängige Eigenvektoren gibt.

Beobachtung:
Zu jedem Eigenwert gibt es mindestens einen Eigenvektor.

Sind die zumindest schon mal linear unabhängig?

JA!!!

Satz 8.20

$$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in spec(A)$$

$$x^1, \cdots, x^m \text{ Eigenvektoren zu } \lambda_1, \cdots, \lambda_m.$$

$$\text{mit } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j$$

$$\Rightarrow$$

$$x^1, \cdots, x^m \text{ linear unabhängig}$$

.

Beweis

Vorbetrachtung: Sei $\tilde{\lambda} \in spec(A)$ und $\tilde{x}$ zugehöriger EV.
Dann ist

$$A \cdot \tilde{x} = \tilde{\lambda} \cdot \tilde{x}$$

und daher

$$A^k \cdot \tilde{x} = \tilde{\lambda}^k \tilde{x}$$

als auch

$$(A - \mu_1 E)\tilde{x} = A\tilde{x} - \mu_1 \tilde{x} = (\tilde{\lambda} - \mu_1)\tilde{x}.$$

Somit wird

$$(A - \mu_1 E)(A - \mu_2 E) \cdots (A - \mu_{k-1} E)(A - \mu_k E)\tilde{x}$$
$$= (\tilde{\lambda} - \mu_1)(\tilde{\lambda} - \mu_2) \cdots (\tilde{\lambda} - \mu_{k-1})(\tilde{\lambda} - \mu_k)\tilde{x}$$

Beweis (Fortsetzung)

Seien nun $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in spec(A)$ paarweise verschieden und

$$(A - \lambda_i E)x^i = 0, x^i \neq 0 \qquad i = 1, \cdots, m$$

Dann haben wir zu zeigen, dass

$$\Rightarrow x^1, \cdots, x^m \text{ linear unabhängig sind.}$$

Zu zeigen

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i\, x^i = 0 \Rightarrow \beta_i = 0\ \forall i$$

Annahme: Dies ist nicht der Fall.
Dann $\exists$ ein $\beta_k \neq 0$ in $\sum \beta_i\, x^i = 0$.

Beweis (Fortsetzung)

Sei dies o.B.d.A. β_1

$$\Rightarrow \beta_1 x^1 = -\sum_{i=2}^{m} \beta_i x^i$$

$$\Rightarrow x^1 = \sum_{i=2}^{m} (-\frac{\beta_i}{\beta_1}) x^i = \sum_{i=2}^{m} \eta_i x^i$$

Multipliziere diese Gleichung mit

$$C := (A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E) \cdots (A - \lambda_m E)$$

und beachte

$$Cx^1 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_m)}_{=:\kappa \neq 0} x^1.$$

$$Cx^i = (\lambda_i - \lambda_2) \cdots \underbrace{(\lambda_i - \lambda_i)}_{=0} \cdots (\lambda_i - \lambda_m) x^i \;=\; 0 \quad \text{für } i \geq 2.$$

Das führt auf den Widerspruch $\kappa x^1 = 0$. $\square$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in spec(A) \\ x^1, \cdots, x^m \text{ zugeh. EVen} \end{array}\right\} \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$$

$$\Rightarrow x^1, \cdots, x^m \text{ l.u.}$$

Korollar 8.21

Hat $A \in C^{(n,n)}$ lauter verschiedene Eigenwerte, ist also $\alpha(\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \text{spec}(A)$, so ist A diagonalisierbar.

Aber nicht umgekehrt!

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist natürlich diagonalisierbar, aber

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$$

Noch ein Beispiel

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ist diagonalisierbar.

$$\lambda_1 = 1, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \lambda_2 = 2, x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \lambda_3 = 3, x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Charakterisierungssatz 8.22

$$A \in \mathbb{C}^{(n,n)} \text{ diagonalisierbar}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\gamma(\tilde{\lambda}) = \alpha(\tilde{\lambda}) \quad \forall \tilde{\lambda} \in spec(A)$$

Zusatz: Ist dabei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $spec(A) \subset \mathbb{R}$, so ist

$$X^{-1} A X = D \text{ mit } X \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

möglich.

Beweis

„$\Rightarrow$“:„A diagonalisierbar $\Rightarrow \gamma_i = \alpha_i, \forall\, i$.“

A diagonalisierbar $\Rightarrow \exists$ Basis aus Eigenvektoren; diese liegen in den Eigenräumen E_{λ_i} (Mit $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte.)

$$\Rightarrow n \le \sum_{i=1}^{m} \gamma(\lambda_i) \le \sum_{i=1}^{m} \alpha(\lambda_i) = n$$

$$\Rightarrow \gamma(\lambda_i) = \alpha(\lambda_i) \quad \forall i$$

Beweis (Fortsetzung)

„$\Leftarrow$“: „$\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \quad \forall \lambda \in$ *spec*$(A) \Rightarrow A$ diagonalisierbar.“

Seien $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte von A.

Zu λ_i hat E_{λ_i} die Dimension $\gamma(\lambda_i) = \alpha(\lambda_i)$, kurz γ_i.

Sei $x^{i,1}, \cdots, x^{i,\gamma_i}$ Basis von E_{λ_i}.

Ziel: Zeige die lineare Unabhängigkeit von

$$\underbrace{x^{1,1}, \cdots, x^{1,\gamma_1}}_{E_{\lambda_1}}, \underbrace{x^{2,1}, \cdots, x^{2,\gamma_2}}_{E_{\lambda_2}}, \cdots, \underbrace{x^{m,1}, \cdots, x^{m,\gamma_m}}_{E_{\lambda_m}}$$

Anzahl $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m = n$.
Das reicht!

Beweis

Annahme:

$$0 = \underbrace{\sum_{j=1}^{\gamma_1} \nu_{1j} x^{1,j}}_{\text{EV zu}\lambda_1 \text{ oder Null}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\gamma_2} \nu_{2j} x^{2,j}}_{\text{EV zu}\lambda_2 \text{ oder Null}} + \cdots + \underbrace{\sum_{j=1}^{\gamma_m} \nu_{mj} x^{m,j}}_{\text{EV zu}\lambda_m \text{ oder Null}}$$

Satz 8.20 $\Rightarrow$ $\quad = 0 \quad\quad = 0 \quad\quad = 0$

$$\Rightarrow \nu_{11} = \cdots = \nu_{1\gamma_1} = 0 \qquad \nu_{21} = \cdots = \nu_{2\gamma_2} = 0 \qquad \nu_{m1} = \cdots = \nu_{m\gamma_m} = 0 \qquad \square$$

Also

A diagonalisierbar

$$\Longleftrightarrow$$

$\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \quad \forall \lambda \in$ *spec*(A)

Schön?

Na ja, man weiß nun, woran man ist. Aber

$$\underset{\text{Braucht Eigenvektoren}}{\gamma(\lambda)} = \underset{\text{Braucht Eigenwerte (bzw. Anzahl)}}{\alpha(\lambda)}$$

Sobald man das Kriterium anwenden kann, hat man (fast) schon diagonalisiert.

Gar nicht mal so schön!

Seite 252

Gibt es einfachere Kriterien?

JA! Es gibt Unterklassen diagonalisierbarer Matrizen, für die die Zugehörigkeit einer Matrix leicht zu überprüfen ist. Zusätzlich gehören Matrizen aus vielen Anwendungen zu diesen Klassen.

Definition 8.23

$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißt normal wenn

$$AA^* = A^*A$$

Reeller Fall

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt normal wenn

$$AA^T = A^TA$$

Teilklassen

Hermitesche Matrizen:

$$A^* = A$$

Reelle symmetrische Matrizen:

$$A^* = A^T = A$$

Unitäre Matrizen:

$$U^*U = E = UU^*$$

Reelle orthogonale Matrizen:

$$Q^*Q = Q^TQ = E$$

$$QQ^* = QQ^T = E.$$

Schiefsymmetrische (reelle) Matrizen:

$$A^T = -A \Rightarrow A^TA = -A^2 = AA^T$$

Bevor wir „A normal $\Rightarrow$ diagonalisierbar“ beweisen können, müssen wir etwas arbeiten. (Resultate sind für sich genommen interessant).

Zunächst etwas Ärger:

$$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}, \lambda \in spec(A)$$

$$\Rightarrow (A - \lambda E)x = 0 \text{ für ein } x \neq 0$$

$$\Rightarrow det(A - \lambda E) = 0$$

$$\Rightarrow det(A^* - \lambda^* E) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\lambda} \in spec(A^*)$$

$$\Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{C}^n : (A^* - \bar{\lambda}E)y = 0.$$

Aber leider zwischen x und y i.a. kein Zusammenhang.
Sehr schade! (wie man sehen wird)

Seite 253

Für normales A besser!

Satz 8.25

Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ normal und (λ, x) Eigenpaar

Dann ist $(\bar{\lambda}, x)$ Eigenpaar von A^*.

Wiederholung : (λ, x) ist Eigenpaar von A, wenn λ Eigenwert und x zugehöriger Eigenvektor von A sind.

Beweis

Hilfsaussage 1: A normal $\Rightarrow A - \lambda E$ normal

Beweis:

$$\begin{aligned}(A-\lambda E)^*(A-\lambda E) &= (A^*-\bar\lambda E)(A-\lambda E)\\ &= A^*A-\bar\lambda A-\lambda A^*+|\lambda|^2E\\ &= AA^*-\bar\lambda A-\lambda A^*+|\lambda|^2E\\ = (A-\lambda E)(A^*-\bar\lambda E) &= (A-\lambda E)(A-\lambda E)^*\end{aligned}$$

Hilfsaussage 2: B normal $\Rightarrow$

$$< Bz, Bz >=< z, B^*\,Bz >=< z, B\,B^*\,z >=< B^*z, B^*z > \forall z.$$

Zusammen:

$$\forall z :< (A-\lambda E)z, (A-\lambda E)z >=< (A^*-\bar\lambda E)z, (A^*-\bar\lambda E)z >$$

Insbesondere $(A-\lambda E)x = 0 \Leftrightarrow (A^*-\bar\lambda E)x = 0$. $\square$

Ende der 8. Vorlesung

Vorlesung 9

7. Juni + 10. Juni

Eigenwertaufgaben 4

Seite 253

Wiederholung

Definition

$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißt normal, wenn $A^*A = AA^*$.

Satz 8.25

Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ normal und (λ, x) Eigenpaar

Dann ist $(\bar\lambda, x)$ Eigenpaar von A^*.

Wiederholung : (λ, x) ist Eigenpaar von A, wenn λ Eigenwert und x zugehöriger Eigenvektor von A sind.

Definition 8.29

Sei

$$A \in \begin{cases} \mathbb{R}^{(n,n)} \\ \mathbb{C}^{(n,n)} \end{cases}$$

Ein Unterraum $V \subset \begin{cases} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{cases}$ heißt invarianter Unterraum von A, wenn

$$A\,x \in V \quad \forall\, x \in V.$$

Satz 8.28

Ist $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und $V \neq \{0\} (\subset \mathbb{C}^n)$ invarianter Unterraum von A, so gibt es einen Eigenvektor x von A in V.

Achtung! Wichtiger Hinweis ! Beispiel 8.30

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Aber $\nexists$ EV in $\mathbb{R}^2$.($\mathbb{R}^2$ ist kein Teilraum von $\mathbb{C}^2$)!!!

Beweis (Achtung! Enthält wichtige numerische Technik: Größenreduktion!):

Sei $m = dim\ V$ und $x^1, \cdots, x^m$ Basis von V.
Bilde $X = (x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{C}^{(n,m)}$ (Rang m)

$$A : V \to V \Rightarrow A\,x^i = X \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix}, i = 1, \cdots, m$$

d.h. man hat die

$$\text{(Invarianzbedingung)} \qquad AX = XB, B = (b_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{(m,m)}$$

Sei $(\lambda, \zeta) \in \mathbb{C}x\mathbb{C}^m$ Eigenpaar von B, d.h.

$$B\zeta = \zeta\,\lambda.$$

Dann liefert die Invarianzbedingung sofort

$$AX\zeta = XB\zeta = X\zeta\lambda$$

$\Rightarrow X\zeta \in V$ ist EV von A zu λ. $\square$

Satz 8.31

$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ist genau dann normal, wenn $\exists\, U \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ unitär mit

$$U^*\,AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} =: D$$

Beweis

„$U^*AU = D \Rightarrow A$ normal „

$$A = U\,D\,U^* \Rightarrow A\,A^* = (U\,D\,U^*)(U\,D^*\,U^*)$$

$$= U\,D\,D^*\,U^* = U\,D^*\,D\,U^* = U\,D^*\,U^*\,U\,D\,U^* = A^*\,A.$$

„normal $\Rightarrow U^*\,AU = D$“

Beweis-Fortsetzung: „A normal $\rightarrow U^*AU = D$“

Struktur des Beweises:

1. A hat ein Eigenpaar (λ_1, x^1)
2. $\{x^1\}^\perp$ ist invarianter Teilraum
3. A hat ein weiteres Eigenpaar (λ_2, x^2) mit $x^2 \perp x^1$.
4. $(span\{x^1, x^2\})^\perp$ invariant.

Allgemein zu zeigen:
$x^1, \cdots, x^i$ orthogonale EVen $\Rightarrow (span\{x^1, \cdots, x^i\})^\perp$ ist invariant.

Nichts einfacher als das: Sei $x \perp x^j, j = 1, \cdots, i$, dann

$$\begin{aligned} < Ax, x^j > \quad &= \quad < x, A^*x^j > = < x, \bar{\lambda}_j x^j > \\ &= \quad \lambda_j < x, x^j > = 0 \end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung):

Also $A\,x \perp x^j, j = 1, \cdots, i.$

$$\Rightarrow (span\{x^1, \cdots, x^i\})^\perp \text{ ist invariant.}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ Eigenpaar } (\lambda_{i+1}, x^{i+1})$$
$$x^{i+1} \perp x^j, j = 1, \cdots, i.$$

Nach n Schritten hat man n Eigenvektoren

$$U = (x^1, x^2, \cdots, x^n). \text{ Fertig } \square$$

Entscheidender Schluß:

$$\begin{aligned} < A\,x, x^j > &= < x, A^* x^j > = < x, \bar{\lambda}_j x^j > \\ &= \lambda_j < x, x^j > = 0 \end{aligned}$$

Satz

$$A \in \mathbb{C}^{(n,n)} \text{ normal}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$((\lambda, x) \text{ ist Eigenpaar zu } A \quad \Rightarrow \quad (\bar{\lambda}, x) \text{ ist Eigenpaar zu } A^*.)$$

Bemerkung

diagonalisierbar $\not\Rightarrow$ normal

normal = unitär diagonalisierbar.

Seite 255

Satz 8.32 (Spektralsatz)

Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ normal mit Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ und zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren $x^1, \cdots, x^n$. Dann gilt

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j (x^j)^*$$

sog. Spektralzerlegung

Beweis

$$U^* AU = D \Rightarrow A = U\,D\,U^*$$

$$= (x^1, \cdots, x^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x^1)^* \\ \vdots \\ (x^n)^* \end{pmatrix}$$

$$= (x^1, \cdots, x^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 (x^1)^* \\ \vdots \\ \lambda_n (x^n)^* \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j (x^j)^* \quad \square.$$

Beispiele: Beispiel 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ symmetrisch $\Rightarrow$ normal.

$$\begin{aligned} \phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 0 & -4 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ -4 & 0 & (4-\lambda) \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)^2(1-\lambda) - 16(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 8.$$

Beispiel 1 - Fortsetzung

$$\lambda_1 = 0 \Big| \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} x = 0 \quad \tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \Big| \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} x = 0 \quad \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = x_2$$

$$\lambda_3 = 8 \Big| \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -7 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \quad \tilde{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A = 0 \cdot x_1\, x_1^T + 1 \cdot x_2\, x_2^T + 8 \cdot x_3\, x_3^T$$

Spektralzerlegung und Fourier-Zerlegung

Einfache reelle Version - komplex genau so:

Sei $x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^n$ Orthonormalbasis.
Dann gilt die Fourierzerlegung

$$E = \sum_{i=1}^{n} x^i \left(x^i\right)^T.$$

Spektralzerlegung aus Fourier-Zerlegung

Sei $x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^n$ Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit

$$Ax^i = \lambda_i x^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Anwenden von A auf die Fourierzerlegung

$$E = \sum_{i=1}^{n} x^i \left(x^i\right)^T$$

gibt

$$A = AE = \sum_{i=1}^{n} Ax^i \left(x^i\right)^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i \left(x^i\right)^T$$

Fortsetzung

$$\begin{array}{llll}
A = AE & = \sum_{i=1}^n Ax^i\left(x^i\right)^T & = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i\left(x^i\right)^T \\
A^k & = \sum_{i=1}^n A^k x^i\left(x^i\right)^T & = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k x^i\left(x^i\right)^T \\
a_k A^k & = \sum_{i=1}^n a_k A^k x^i\left(x^i\right)^T & = \sum_{i=1}^n a_k \lambda_i^k x^i\left(x^i\right)^T \\
\sum_{k=0}^m a_k A^k & = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m a_k A^k x^i\left(x^i\right)^T & = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m a_k \lambda_i^k x^i\left(x^i\right)^T \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
p(A) & & = \sum_{i=1}^n p(\lambda_i) x^i\left(x^i\right)^T \\
\\
\sum_{k=0}^\infty \frac{(tA)^k}{k!} & & = \sum_{k=0}^\infty \frac{(t\lambda_i)^k}{k!} x^i\left(x^i\right)^T \\
\exp(tA) & & = \sum_{i=1}^n \exp(t\lambda_i) x^i\left(x^i\right)^T
\end{array}$$

Beispiel 1; Fortsetzung

$$\text{Zu } A = \sum \lambda_i x^i\left(x^i\right)^T$$

$$\text{Setze } B = \sum (\lambda_i)^{1/3} x^i\left(x^i\right)^T.$$

Dann ist $B^3 = A$.

Konkret

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot x^1\left(x^1\right)^T + 1 \cdot x^2\left(x^2\right)^T + 8 \cdot x^3\left(x^3\right)^T$$

mit

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Dann

$$B = 0 \cdot x^1\left(x^1\right)^T + 1 \cdot x^2\left(x^2\right)^T + 2 \cdot x^3\left(x^3\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seite 256

$$A \in \mathbb{C}^{(n,n)} \text{ normal}$$

$$\Longrightarrow$$

Zu $\lambda_i \in spec(A)$ existiert orthonormale Basis $u^{i,1}, \cdots, u^{i,\alpha_i}$ von E_{λ_i}:

$$\sum_{j=1}^{\alpha_i} u^{i,j}(u^{i,j})^* = P_{E_{\lambda_i}}$$

Satz 8.34

$$A \in \mathbb{C}^{(n,n)} \text{ normal}$$

$$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\} = spec(A), \lambda_i \neq \lambda_j.$$

$$P_{E_{\lambda_i}} = \text{ Projektor auf } E_{\lambda_i}.$$

Dann

$$A = \sum_{j=1}^m \lambda_j P_{E_{\lambda_j}}.$$

Hat A nicht n linear unabhängige Eigenvektoren, so kann A nicht diagonalisiert werden, es gibt keine Spektraldarstellung.

Das ist dann sehr traurig.

Vorsichtige Frage:
Kann man A dann nicht durch

Ähnlichkeitstransformation

$$A \to X^{-1} AX$$

wenigstens ein wenig einfacher machen?

JA? - Wie einfach?

Achtung: Sprung im Skript um 16 Seiten

Ende der 9. Vorlesung

Vorlesung 10

14. Juni + 17. Juni

Jordan-Normalform

Seite 242

Wiederholung

$$X^{-1} \quad A \quad X = \underset{\text{diagonal}}{\Lambda} \quad ?$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A\,X = X\,\Lambda$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A\,(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Ax^i = \lambda_i x^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Jordan - Normalform

Satz 8.66 (ohne Beweis)

Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}, \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\} = spec(A), \lambda_i \neq \lambda_j$.

$$\Longrightarrow$$

$\exists X \in \mathbb{C}^{(n,n)}$, X regulär mit

$$J = X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix}$$

Jordan - Normalform

Satz 8.66 (ohne Beweis) Fortsetzung

Dabei besteht jeder einem Eigenwert λ_k zugeordnete $\alpha(\lambda_k) \times \alpha(\lambda_k)$ große Jordan-Block

$$J_k = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} J_{k1} & & & 0 \\ & J_{k2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k,\gamma(\lambda_k)} \end{pmatrix}}_{\alpha(\lambda_k)}\right\} \alpha(\lambda_k)$$

aus $\gamma(\lambda_k)$ Jordankästchen

$$J_{ki} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m_{ki}, m_{ki})} \text{ mit } \sum_{i=1}^{\gamma(\lambda_k)} m_{ki} = \alpha(\lambda_k).$$

Beispiele 1 und 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Zwei Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$

Drei Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

Vier Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$

Ein Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$

Zwei Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$

Beispiel 3

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & \\ & 4 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

Keine Jordan – Normalform!

3-Stufen-Struktur der Jordan-Normalform J

$$J = X^{-1}AX \qquad (1)$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{bmatrix} ; \quad m = \sharp\, spec(A) \qquad (2)$$

$$J_k = \begin{bmatrix} J_{k1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k\,\gamma_k} \end{bmatrix} \gamma_k := \gamma(\lambda_k) \qquad (3)$$

$$J_{ki} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix} \qquad (4)$$

3-Stufen-Struktur der Transformationmatrix X

$$X = (X_1, \cdots, \underbrace{X_k}_{\uparrow}, \cdots, X_m) \quad X_k \in \mathbb{C}^{(n,\alpha_k)}$$

$$X_k = (X_{k1}, \cdots, \underbrace{X_{ki}}_{\uparrow}, \cdots X_{k,\gamma_k}), X_{kl} \in \mathbb{C}^{(n,m_{kl})}$$

$$X_{ki} = (\underbrace{x_1^{ki}}_{\uparrow}, \underbrace{x_2^{ki}, \cdots, x_{m_{ki}}^{ki}}_{\uparrow})$$

Eigenvektor Hauptvektoren
von A zum Eigenwert λ_k

Eigenvektor von A zu λ_k erfüllt:

$$(A - \lambda_k E)x = 0, (x \neq 0)$$

Hauptvektor der Stufe j von A zum Eigenwert λ_k erfüllt:

$$(A - \lambda_k E)^j x = 0, (A - \lambda_k E)^{j-1} x \neq 0.$$

$(x_1^{ki}, x_2^{ki}, \cdots, x_{m_{ki}}^{ki})$ erfüllen:

$$(A - \lambda_k)x_j^{ki} = x_{j-1}^{ki}, j = 2, \cdots, m_{ki}$$

Zugegeben: Das sieht kompliziert aus.
(Leider wird dies später benötigt)

Beispiel

$$J = \left|\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{array}\right|$$

$$J_1 \begin{pmatrix} J_{11} & \vline & \\ \hline & \vline & J_{12} \end{pmatrix} \qquad J_2 \begin{pmatrix} J_{21} & \vline & \\ \hline & \vline & J_{22} \end{pmatrix}$$

$$X = \left|\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right|$$

$$(J - \lambda_1 E)e^1 = 0$$
$$(J - \lambda_1 E)e^2 = e^1$$
$$(J - \lambda_1 E)e^3 = e^2$$

Bestimmungsgleichungen!

Beispiel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\underbrace{(x_1^{11})x_2^{11}\,x_3^{11}}_{x_{11}}\,\underbrace{(x_1^{12})x_2^{12}}_{x_{12}}}_{x_1}\,\underbrace{\underbrace{(x_1^{21})x_2^{21}}_{x_{21}}\,\underbrace{(x_1^{22})}_{x_{22}}}_{x_2}$$

$$(J-\lambda_1\,E)e^1 = 0$$
$$(J-\lambda_1\,E)e^2 = e^1$$
$$(J-\lambda_1\,E)e^3 = e^2$$

() = Eigenvektoren

$$J(span\{x_{11}\}) \subset span\{x_{11}\}$$
$$J(span\{x_1^{11}, x_2^{11}\}) \subset span\{x_1^{11}, x_2^{11}\}$$

Beispiel

X regulär vorgegeben: $X = (x^1, \cdots, x^8)$.Gewünscht A mit $X^{-1}\,AX = J$
Nichts einfacher als das

$$A = X\,J\,X^{-1}$$

Dann

$$\begin{aligned} (A-\lambda_1\,E)x^1 &= (X\,J\,X^{-1} - \lambda_1\,X\,X^{-1})x^1 \\ &= X(J-\lambda_1\,E)X^{-1}\,x^1 \\ &= X(J-\lambda_1\,E)e^1 = 0 \\ (A-\lambda_1\,E)x^2 &= X(J-\lambda_1\,E)X^{-1}\,x^2 \\ &= X(J-\lambda_1\,E)e^2 \\ &= X\cdot e^1 = x^1 \end{aligned}$$

Einfaches Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \phi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-4)^2$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \alpha(\lambda_1) = 1 = \gamma(\lambda_1)$$

Problemlos! Netter Eigenwert!

$$\lambda_2 = 4, \alpha(\lambda_2) = 2 \qquad \gamma(\lambda_2)?$$

noch unbekannt, ob nett.

$$0 = (A-4\,E)x$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

Es gibt nur einen eindimensionalen Lösungsraum. $\gamma(\lambda_2) = 1 < 2$.
Eigenwert ist böse!

$$(A-4E)x = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \quad x^2 \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.\ \text{EV.}$$

Jagd auf Hauptvektor:
(Einer reicht, daher noch nicht schwierig.) $\alpha - \gamma = 1$

$$(A-\lambda_2\,E)x^{2,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} x^{2,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} x^{2,1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x^{2,1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$x^{2,1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\ \text{auch möglich.}$$

WARNUNG!

Die Jordan-Normalform ist (praktisch) unberechenbar.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Tun wir mal so, als sähen wir die Jordan-Form nicht.

$$E(1) = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Starte Hauptvektorberechnung mit

$$x^{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \underbrace{\lambda}_{=1} E)x^{1,2} = x^{11}$$

$$\text{Die Bedingung} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} x^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{liefert } x^{1,2} = \begin{bmatrix} \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Start-Wahl $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bereitete einen der vielen Wege zur obigen Zerlegung.

Aber!

$$\text{Start mit} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} x^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^{1,2} = \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & \color{red}{0} \end{bmatrix} x^{1,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \color{red}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Mix der E-Vektoren zu versch. Kästchen führt zum vorzeitigen Abbruch!

Weitere Beispiele: Unstetigkeit der Jordan-Nomalform

Matrix | Jordan-Normal-Form

$$A = \begin{pmatrix} 1+0 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1+0 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & \varepsilon & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Also

Jordan-Normalform ist i.A. nicht stabil berechenbar.

Lösung von Differentialgleichungen im dritten Semester über Jordan: Nur zur Demonstration möglicher Effekte.
Numerisch gelöst werden Dgln ohne Jordan ganz anders.

Ende der 10. Vorlesung

Vorlesung 11

21. Juni + 24. Juni

Symmetrische und hermitesche Matrizen

Wiederholung

Motivation 1: Schwingungen

$$\begin{pmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \\ y_3''(t) \\ y_4''(t) \\ y_5''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{pmatrix}$$

Ansatz:

$$y(t) = \sin(\omega t)s, \quad s \in \mathbb{R}^5, \text{ zeitunabhängig.}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} \underbrace{(-\omega^2)}_{\lambda} \sin(\omega t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} \sin(\omega t)$$

Also

$$\lambda s = As$$

Motivation 1: Schwingungen

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \\ y_3''(t) \\ y_4''(t) \\ y_5''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} \underbrace{(-\omega^2)}_{\lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix}$$

Also

$$\lambda Bs = As$$

Dabei A und B symmetrisch.

Die Vorlesung klärt die Frage:

Allgemeine Eigenwertaufgabe

Wann ist die „Allgemeine Eigenwertaufgabe"

$$Ax = \lambda Bx$$

gut behandelbar?

Seite 257

Zurück zu diagonalisierbaren Matrizen!

Satz 8.36

$$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}, A^* = A$$
$$\Rightarrow \mathit{spec}\,(A) \subset \mathbb{R}.$$

Beweis

$$A\,x = \lambda\,x$$
$$\lambda < x, x > = < A\,x, x > = < x, A^*\,x > = < x, A\,x > = \bar{\lambda} < x, x > \square.$$

Korollar

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, A = A^T$$
$$\Rightarrow spec\,(A) \subset \mathbb{R}, A = \sum \underbrace{\lambda_i\, x_i\, x_i^T}_{\text{reell}}$$
$$< x_i, x_j >= 0 \text{ bei } \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Beweis

A ist Hermitesch. Also ist sein Spektrum reell.
A ist reell also sind die Eigenvektoren reell.
Somit ist auch die Spektralzerlegung reell. □

Kleine Anwendungen

1.

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \text{Eigenvektor}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad EW_1 = 2$$
$$\text{symmetrisch: } EV_2 \perp \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\text{also } EV_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow EW_2 = 0.$$

2.

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2\\2a+2\\a+2\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a+2 &= \lambda \\ 2a+2 &= \lambda a = a(a+2) \\ a^2+2a &= 2a+2 \\ a &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$EV_1 = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} \quad EV_2 = \begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\ ,\\1\end{pmatrix}, \lambda = 2 \pm \sqrt{2}.$$
$$EV_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$\lambda = 2$$

Bemerkung:

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ symmetrisch} \quad \xrightarrow[\text{durch „Blickanpassung"}]{} \quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$A = A^T \in \mathbb{R}^{(n,n)} \Rightarrow \begin{cases} spec(A) \subset \mathbb{R} \\ \text{EVen } u^1, \cdots, u^n \in \mathbb{R}^n \text{ und orthonormal} \end{cases}$$
$$U^T AU = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$
$$\text{mit } U = (u^1, \cdots, u^n)$$

$$U^T U = E \Rightarrow det(U) = \pm 1$$

Z.B. durch Vorzeichenwechsel bei einem u^k erreichbar $det\ U = 1$.
$\Rightarrow U$ Drehung!

Seite 307

Eigenwertaufgaben in Anwendungen

Allgemeine Eigenwertaufgabe : AEA

$$(AEA)\quad \underset{\text{Steifigkeitsmatrix } A=A^T}{Ax} = \underset{\text{Massenmatrix } B=B^T\text{, i.a. } \neq E}{\lambda Bx}$$

$$\underbrace{B^{-1}Ax}_{\text{nicht symmetrisch . Weiah!}} = \lambda\, E\, x \quad \text{übliche Form}$$

Mit $B = C\,C^T$, $\quad C$ regulär

$$\text{ist } (AEA) \Leftrightarrow C^{-1}\,A\,x = \lambda\,\underbrace{C^T\,x}_{y}, \quad x = C^{-T}\,y$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow \underbrace{C^{-1}\,A\,C^{-T}}_{\text{symmetrisch}}\,y = \lambda\,\underbrace{E}_{\text{Identität}}\,y}_{\text{symmetrische Standardaufgabe}}$$

Wann ist

$$B = C\,C^T \text{ mit regulärem } C$$

möglich?

1. B muss sicher symmetrisch sein: $(CC^T)^T = CC^T$
2. B muss mit C regulär sein.
3. Sei $Bu = \lambda u$. Dann ist
$$\lambda u^T u = u^T Bu = u^T CC^T u = \|C^T u\|_2^2 > 0.$$
Also muss spec$(B) \subset \mathbb{R}_+$ sein.
4. Dann wäre $C := \sqrt{B} = \sum \sqrt{\lambda_i} u^i\, u^{iT}$ möglich.

Kann man CC^T bei $spec(B) \subset \mathbb{R}_+$ billiger berechnen als mit Spektralzerlegung?

Und dabei auch noch $spec(B) \subset \mathbb{R}_+$ prüfen?

Seite 271

Definition 8.58

$$A \in \underset{\mathbb{C}^{(n,n)}}{\mathbb{R}^{(n,n)}} \text{ mit } \underset{A^*=A}{A^T = A}$$

heißt

- positiv definit
  wenn $\lambda > 0 \quad \forall\,\lambda \in spec(A)$
- positiv semidefinit
  wenn $\lambda \geq 0 \quad \forall\,\lambda \in spec(A)$
- negativ definit
  wenn $\lambda < 0 \quad \forall\,\lambda \in spec(A)$
- negativ semidefinit
  wenn $\lambda \leq 0 \quad \forall\,\lambda \in spec(A)$
- indefinit
  wenn $\exists\,\lambda_1, \lambda_2 \in spec(A) : \lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Seite 271

Satz 8.59

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, A^T = A$$

Dann sind äquivalent

(i) *A ist positiv definit*

(ii) $x^T\,A\,x > 0 \quad \forall\, x \neq 0$

(iii) $det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots, n$

(iv) *In der LDL^T - Zerlegung ist* $d_{ii} > 0 \quad \forall\, i = 1, \cdots, n$

(v) *In der LR-Zerlegung ist* $r_{ii} > 0 \quad \forall\, i = 1, \cdots, n$

(vi) *(...)*

Beweis

$$\begin{array}{ccccc} & & (i) & \Rightarrow & (ii) \\ & & \Uparrow & & \Downarrow \\ (v) & \Longleftrightarrow & (iv) & \Leftarrow & (iii) \end{array}$$

Beweis

„$(i) \Rightarrow (ii)$“ „$spec(A) > 0 \Rightarrow x^T A\, x > 0 \quad \forall x \neq 0$“

Idee: Wenn A diagonal, dann $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $x^T Ax = \sum \underbrace{\lambda_i}_{>0} x_i^2 > 0$

Wenn nicht diagonal, diagonalisiere! Und das geht so:

Seien $(\lambda_1, u_1), (\lambda_2, u_2), \ldots, (\lambda_n, u_n)$ Eigenpaare von A mit orthonormalen Eigenvektoren $u^1, \cdots, u^n$, so dass für $U := (u^1, \cdots, u^n)$ gilt $U^T U = UU^T = E$.

Sei $x \in \mathbb{R}^n \neq 0$ und $\zeta = U^T x$, so dass $x = U\zeta$.

Beachte $x \neq 0 \Leftrightarrow \zeta \neq 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} x^T Ax &= (U\zeta)^T AU\zeta = \zeta^T U^T AU\zeta \\ &= \zeta^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \zeta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \zeta_i^2 > 0 \end{aligned}$$

Beweis

„$(ii) \Rightarrow (iii)$: $x^T A\, x > 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow det(A_i) := det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0 \,\forall\, i$“

Wir nehmen dazu an, dass $\det(A_i) < 0$ und zeigen, dass dann ein $x \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $x^T Ax < 0$.
Da A_i symmetrisch ist, gilt $spec(A_i) =: \{\lambda_1^i, \cdots, \lambda_i^i\} \subset \mathbb{R}$.

Wegen
$0 > det(A^i) = det(A_i - \lambda E)_{|\lambda=0} = \left[(\lambda_1^i - \lambda) \cdots (\lambda_i^i - \lambda)\right]_{|\lambda=0} = \prod_{j=1}^{i} \lambda_j^i$
ist $\lambda_k^i < 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, i\}$.

Sei $\tilde{y}$ zugehöriger Eigenvektor, so dass $A_i\, \tilde{y} = \lambda_k^i \tilde{y}$.

Mit $x = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ 0 \end{pmatrix}$ ist dann

$$\Rightarrow x^T Ax = \tilde{y}^T A_i\, \tilde{y} < 0 \quad ↯$$

Beweis

„$(iii) \Rightarrow (iv)$“ also „$det(A_i) > 0 \,\forall i \Rightarrow d_{ii} > 0$ in LDL^T “

Erinnerung:

Mit $L_i = \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \cdots & l_{1i} \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & l_{i-1,i} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_i = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{ii} \end{pmatrix}$
war induktiv gezeigt worden
$A_i = L_i\, D_i\, L_i^T$
Es ist somit $det\, A_i = d_{11} \cdots d_{ii}$

Daher $det\, A_i > 0 \,\forall i$
$\Rightarrow d_{11} > 0, \cdots, d_{ii} > 0 \,\forall\, i$ fertig.

Beweis

„$(iv) \Rightarrow (i)$“, also „$d_{ii} > 0\,\forall\, i \Rightarrow \lambda_i > 0\,\forall\, i$“

Sei (λ, u) Eigenpaar von A
Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda ||u||_2^2 = \lambda\, u^T\, u = u^T\, \lambda\, u & \\ &= u^T\, A\, u = u^T\, LDL^T\, u \\ &= (L^T\, u)^T\, D\, \underbrace{(L^T\, u)}_{y \neq 0} = y^T\, D\, y \\ &= \prod_{i=1}^{u} d_{ii}\, y_i^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0. \quad \square\end{aligned}$$

$(iv) \Leftrightarrow (v)$ trivial! (wieso?)

Anmerkungen

1. Variante für semidefinite Matrizen (Bem. 8.60) A positiv semidefinit

$$A \text{ positiv semidefinit } \Leftrightarrow x^T\, A\, x \geq 0\,\forall x$$

$$\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \det A_i \geq 0\,\forall i$$

2.

$$\forall\, d_{ii} > 0 \text{ in } LDL^T$$

$$\sqrt{D} := \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix} \text{ existiert reell.}$$

$$\Rightarrow LDL^T = L\,\sqrt{D}(L\sqrt{D})^T = C\,C^T$$

Cholesky-Zerlegung

Berechnung i.a. direkt. Nicht über LDL^T-Umweg.

Anmerkungen

3. Zu Aussage (v).

$$LDL^T = L(DL)^T = LR$$

$$LDLT - \text{Zerlegung} \quad LR - \text{Zerlegung}$$

von A
Diagonale von R = Diagonale von D.

Test auf „ A positiv definit “:

Wenn „Gauss ohne Pivotisierung“ erfolgreich $A = LR$ bildet, und wenn $r_{ii} > 0 \quad \forall i$, so ist A *SPD*.

SPD = Symmetrisch Positiv Definit.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} = L \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ & 3/2 & -1 & \\ 0 & & \ddots & -1 \\ & & & \frac{n+1}{n} \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ ist } SPD.$$

Noch einmal zurück zu

Seite 307

„Allgemeinen Eigenwertaufgabe“

$A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gegeben; gesucht $x \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$Ax = \lambda\, Bx$$

In Ing-Aufgaben zum Glück oft

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, A = A^T \\ B \in \mathbb{R}^{(n,n)}, B\ SPD \end{array}\right\} \text{prima.}$$

Mit $B = C\,C^T$, $\quad C$ regulär, dann

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{C^{-1}\,AC^{-T}}_{\text{symmetrisch}} x = \lambda\, E\, x$$

Achtung: Allgemeiner Fall (B nicht SPD) kann fies sein.

$$A\,x = \lambda\, B\,x \Leftrightarrow (A - \lambda\, B)x = 0$$

Nichttrivial lösbar, wenn

$$det(A - \lambda B) = 0$$

r

Charakteristisches Polynom:

$$\Phi(\lambda) := \ det(A - \lambda B)$$

Allgemein sicher $\Phi \in \Pi_n$, aber der Grad von Φ kann kleiner als n sein.

Seite 308

Sei

$$\Phi(\lambda) = a_n\,\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Dann ist

$$det(\frac{1}{\lambda}A - B) = \frac{det(A - \lambda B)}{\lambda^n}$$

$$= \frac{a_n\,\lambda^n}{\lambda^n} + a_{n-1}\frac{\lambda^{n-1}}{\lambda^n} + \cdots + \frac{a^0}{\lambda^n}$$

$$= a_n + (\frac{1}{\lambda})a_{n-1} + \cdots + (\frac{1}{\lambda})^n a_0$$

Also

$$det(\mu\,A - B) = a_n + \mu a_{n-1} + \cdots + \mu^n\,a_0$$

und somit

$$det(-B) = a_n.$$

Daher

$$\Phi(\lambda) = (-1)^n det(B)\lambda^n + \cdots$$

$\Rightarrow$ Bei $det(B) = 0$ hat $\Phi(\lambda)$ weniger als n-Nullstellen.

$\Rightarrow$ ganze Theorie im Eimer!

Schnell zurück zum netten Fall

$$A\,x = \lambda\, B\,x$$

$$\text{mit } A = A^T \quad B = CC^T\ SPD$$

und einer letzten Aussage über die zugehörigen Eigenpaare.

$$\underbrace{C^{-1}A\,C^{-T}}_{F=F^T}\underbrace{C^T x}_{y} \underset{=\lambda}{=} \lambda\,\underbrace{C^T x}_{y}$$

Seite 309

$$F\,y = \lambda\,y, y = C^T\,x$$

$$y^r = C^T\,x^r, y^r \text{ orthonormal}$$
$$x^r = C^{-T}y^r \quad B = CC^T$$

$$\begin{aligned}(x^r)^T B\,x^s &= y^{rT}\,C^{-1}\,B\,C^{-T}\,y^s = y^{rT}\,C^{-1}\,CC^T\,C^{-T}\,y^s \\ &= (y^r)^T y^s = \delta^{rs}\end{aligned}$$

Satz 8.110
Bei $A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch und B SPD hat

$$Ax = \lambda\,Bx \text{ n reelle Eigenwerte}$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

mit zugehörigen Eigenvektoren

$$u^1, u^2, \cdots, u^n,$$

die $B-$ orthogonal gewählt werden können.

Ende der 11. Vorlesung

Vorlesung 12
28. Juni + 1. Juli
Elementarnumerik der Eigenwertaufgaben

Etwas Numerik der Eigenwertaufgaben

$$\Phi_A(\lambda) = 0$$

i.a.

- nicht exakt lösbar
- gar nicht erst (verlässlich) bildbar

$\Rightarrow$ Approximative Verfahren für $A\,x = \lambda\,x$.

(i) *Bestimme Näherungen $(\tilde\lambda, \tilde x)$*
(ii) *Schätze Fehler $|\tilde\lambda - \lambda|, \|\tilde x - x\|$ (ab).*
(iii) *Verbessere Näherungen*
(iv) *Beurteile Algorithmen*

Satz 8.84 (Gerschgorin)

Für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ mit $A = (a_{ij})$ seien

$$K_i := \{\mu \in \mathbb{C} \,\Big|\, |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\}$$

$$\tilde{K}_j := \{\mu \in \mathbb{C} \,\Big|\, |\mu - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|\}$$

Dann gelten

$$spec(A) \begin{cases} \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i \\ \subset \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{K}_j \end{cases}$$

Zusatz:

In jeder Zusammenhangskomponente

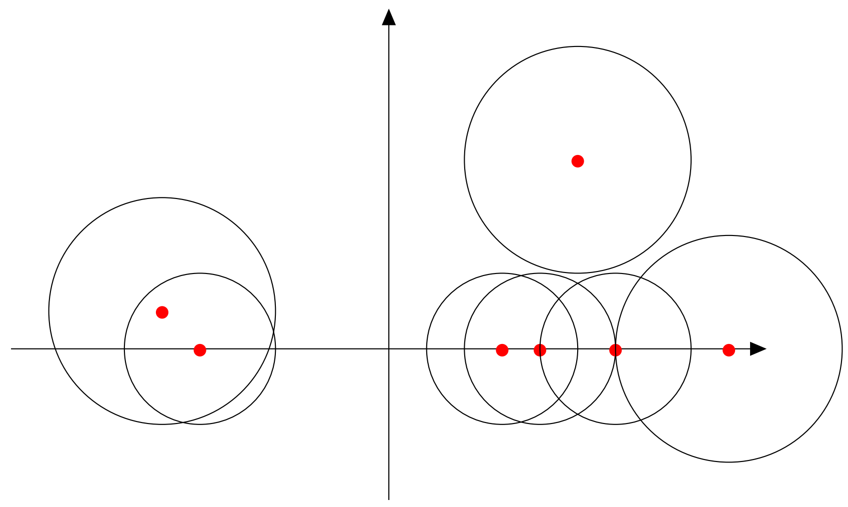
$$\bigcup_{s=1}^{k} K_{i_s} \text{ von } \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

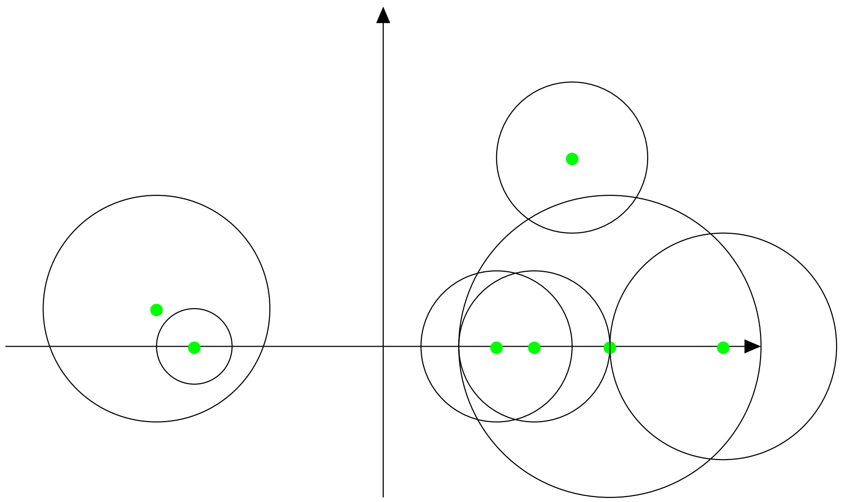
liegen genau k Eigenwerte.

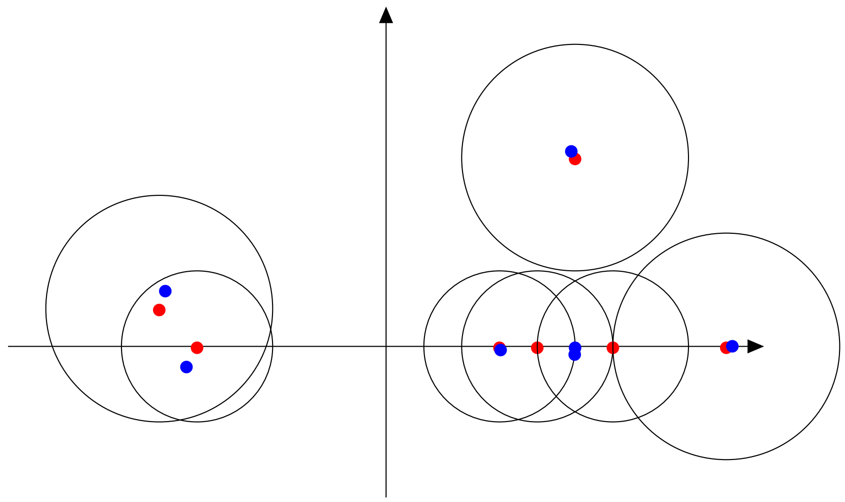
Beispiele

Beispiel 1:

$$A = \begin{array}{ccccccc|c} & & & & & & & r_i \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 5+5_i & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6+i & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 9 & 3 \\ \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & \end{array}$$







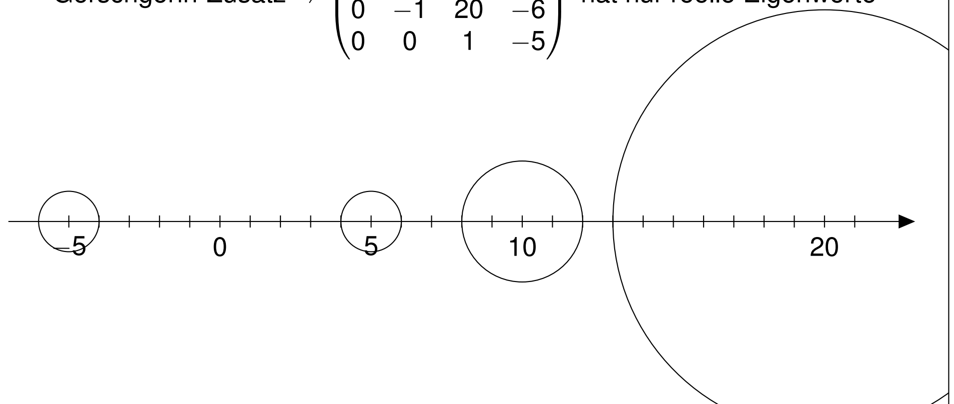
Beispiel 2

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ ist SPD.}$$

Alle Eigenwerte liegen im Kreis um 4 mit $r = 2$.

Beispiel 3

$$\text{Gerschgorin-Zusatz} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 20 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ hat nur reelle Eigenwerte}$$



Es müssen alle Eigenwerte reell sein, da mit λ auch $\bar{\lambda}$ EW ist.

Beweis von Gerschgorin:

Wegen $spec(A^T) = spec(A)$ genügt der Nachweis von $spec(A) \subset \bigcup K_i$

Sei $Ax = \lambda x, x \neq 0$ und $i \in \{1, \cdots, n\}$ so, dass $|x_i| \geq |x_j| \; \forall j$.
Hieraus folgt sofort

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{ii}||x_i| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \underbrace{\frac{|x_j|}{|x_i|}}_{\leq 1} \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \square$$

Beweisskizze für der Zusatz

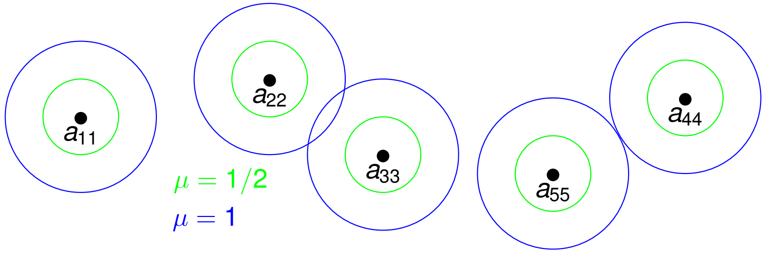
Eigenwerte sind stetige Funktionen der Matrixwerte !

Betrachte dann

$$M(\mu) = \begin{bmatrix} a_{11} & \mu a_{12} & \mu a_{13} & \cdots & \mu a_{1n} \\ \mu a_{21} & a_{22} & \mu a_{23} & \cdots & \mu a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mu a_{n1} & \cdots & \cdots & \mu a_{n-1,n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$spec(M(0)) = \{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$$

$$spec(M(1)) = spec(A).$$



Wie gewinnt man Eigenpaar-Näherungen? In fast allen Algorithmen steckt ein

wenig

Potenzmethode

Sei $x^0 \in \mathbb{R}^n \neq 0$, Eigenpaar zu $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gewünscht

Repeat until convergence

$$\hat{x}^{n+1} = Ax^n;$$

$$\xrightarrow[\text{Vermeide overflow}]{} \quad x^{n+1} = \hat{x}^{n+1} / \max_i |\hat{x}_i^{n+1}|;$$

end;

$$\text{Idee: Spektralzerlegung: } x^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, u_j \leftarrow \text{EVen}$$

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|$$

$$A^k x^0 = \sum \lambda_j^k \alpha_j u_j. \qquad \longleftarrow |\lambda_n| \text{ gewinnt.}$$

$$\begin{aligned} x^0 &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \\ Ax^0 &= \lambda_1 \alpha_1 u_1 + \lambda_2 \alpha_2 u_2 + \cdots + \lambda_n \alpha_n u_n \\ A^m x^0 &= \lambda_1^m \alpha_1 u_1 + \lambda_2^m \alpha_2 u_2 + \cdots + \lambda_n^m \alpha_n u_n \end{aligned}$$

Der betragsgrößte Eigenwert wird „seinen Vektor herausheben“.

Wenn man nun eine Schätzung für ein Eigenpaar $(\tilde{\lambda}, \tilde{u})$ hat, wie prüft man dessen Güte?
Sicher wird man prüfen, „wie Null“ der Residual-Vektor

$$r := A \underbrace{\tilde{u}}_{\uparrow} - \tilde{\lambda} \underbrace{\tilde{u}}_{\uparrow} \qquad \text{ist.}$$

Klar, dass $\|\tilde{u}\| = 1$ sein sollte.

Was sagt nun z.B. $\|A\tilde{u} - \tilde{\lambda}\tilde{u}\|_2 = 10^{-3}$ aus ?

Satz 8.88 (Krylov - Bogolinbov)

Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, A = A^T$, und seien eine Eigenvektor-Näherung $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|w\|_2 = 1$ und eine Eigenwertnäherung $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben.

Mit dem Residuum $r := Aw - w\mu$ gilt dann:

Es gibt ein $\lambda \in spec(A)$ mit $|\mu - \lambda| \leq \|r\|_2$

Beweis

$u^1, \cdots, u^n$ ONS von Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. (eventuell Wiederholungen)

$$w = \sum_{i=1}^{n} < w, u^i > u^i$$

$$A\,w - \mu w = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu) < w, u^i > u^i$$

$$||Aw - \mu w||^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu)^2 < w, u^i >^2 \geq \min_j (\lambda_j - \mu)^2 \sum_{i=1}^{n} < w, u^i >^2$$

Beweis

$$||Aw - \mu w||^2 \geq \min_{j=1,\cdots,n} (\lambda_j - \mu)^2 \sum_{i=1}^{n} < w, u^i >^2$$

$$w = \sum < w, u^i > u^i$$

$$\begin{aligned} < w, w > &= \sum_{i,j} < w, u^i >< w, u^j >< u^i, u^j >= \sum_{i=1}^{n} < w, u^i >^2 \\ ||w|| &= 1 \end{aligned}$$

$$||Aw - \mu w||_2^2 \geq min_j (\lambda_j - \mu)^2. \qquad \square$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & +1 & & \\ +1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & +1 \\ & & +1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(10,10)}$$

$w = (1, 1, 1 \cdots, 1)$ EV-Schätzung

Suche μ mit $\|Aw - w\mu\|_2 = \min$. (Ausgleichsproblem!)
Achtung! Vorsichtig vergleichen

Allg. Ausgleichproblem	Spezielles Ausgl.problem
$\|Ax - b\|_2 = \min$	$\|Aw - w\mu\|_2 = \min$
Matrix $=A$, Unbek.$=x$ rechte Seite $=b$	Matrix = w, Unbek.$=\mu$ rechte Seite = Aw
Normalgleichung $A^TAx = A^Tb$	Normalgleichung $w^Tw\mu = w^TAw$

Satz 8.90

$\mu = \frac{w^TAw}{\ldots}$ bestes μ

Anmerkung

$$\frac{w^T\,A\,w}{w^T\,w} \text{ heißt Rayleigh - Quotient}$$

A und w von oben.

$$Aw = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad w^T\,A\,w = 38$$

$$\mu = \frac{w^T\,A\,w}{w^T\,w} = \frac{38}{10} = 3.8$$

Krylov - Bogolinbov braucht $||w|| = 1$.

$$r = \left|\left|A\frac{w}{||w||} - \mu\frac{w}{||w||}\right|\right| = \frac{1.2649}{10} = 0.126\cdots$$

...mäßig!

$$v = \frac{A^{10}w}{||A^{10}w||} = (0.1389, 0.2547, 0.3348, 0.3810, 03991, \text{... symmetr.})$$

$$R(v) = \frac{v^T\,A\,v}{v^T\,v} = 3.9169345...$$

$$||A\,v - R(v)v|| = 0.03530...$$

Es gibt viel raffiniertere Methoden...

Inverse Iteration

$$\begin{array}{ll} \text{Schreibweise:} & x^{n+1} = A^{-1}x^n \\ \text{Ausführung:} & Ax^{n+1} = x^n \end{array} \quad \rightarrow \text{kleinster Eigenwert}$$

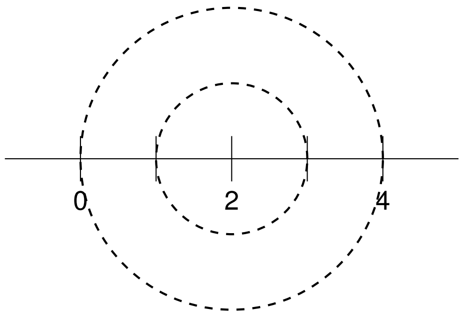
Inverse Iteration mit Shift

$$\begin{array}{ll} \text{Schreibweise:} & x^{n+1} = (A - \mu\,E)^{-1}x^n \\ \text{Ausführung:} & (A - \mu\,E)x^{n+1} = x^n \end{array} \quad \rightarrow \text{Eigenwert bei } \mu$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gerschgorin:

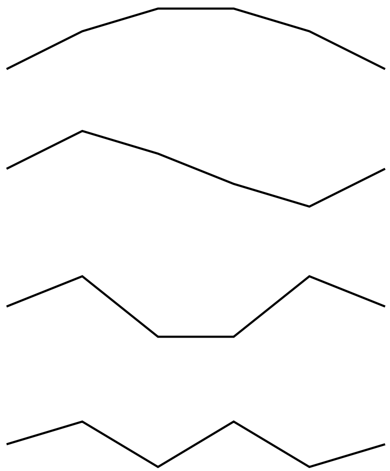


$0 \le \lambda_j \le 4$

Matrix ist zuständig für Schwingung von 4 mit Federn gekoppelten Massen.

Eigenvektoren = Schwingungsformen

Ideen:



$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

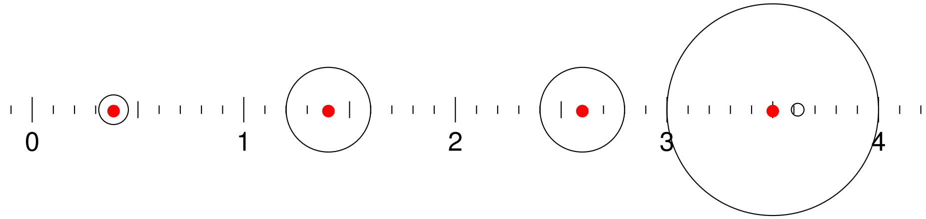
$$w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = R(w_1) = \frac{w_1^T A w_1}{w_1^T w_1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{4+9+9+4} = \frac{10}{26}$$

$$\left|spec(A) - \frac{10}{26}\right| \leq \frac{||Aw_1 - w_1 \frac{10}{26}||}{\sqrt{w_1^T w_1}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} /26 \right\|_2}{\sqrt{26}}$$



$$|spec(A) - 1.4| \leq \frac{||Aw_2 - w_2 \cdot 1.4||_2}{\sqrt{10}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.8 \\ 1.4 \\ -1.4 \\ -2.8 \end{pmatrix} \right\|_2}{\sqrt{10}} = 0.1$$

Dito
$R(w_3) = \frac{26}{10}$ mit Fehler ≤ 0.2
$R(w_4) = 3.5$ mit Fehler ≤ 0.5

Es ist gut, Vorwissen einzubringen.

Ende der 12. Vorlesung

Vorlesung 13

5. Juli + 8. Juli

Operator-Normen

Seite 280

Matrix - & Operator - Normen

Definition 8.72

Ist

$$|| \; || : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longrightarrow ||x|| \end{cases}$$

eine Vektor - Norm. Dann heißt für $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ die Zahl

$$||A|| := \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

die zugehörige Matrix- oder Operator - Norm von A.

$||A||$ misst die Abbildungsstärke von A.

Bemerkungen & Motivation

1. Für $A, x \in \mathbb{R}^1$ ist $|A\,x| = |A| \cdot |x|$
2. Für $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $|| \; || =$ Norm gegeben; finde $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass

$$||Ax|| \leq \gamma ||x|| \, \forall \, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{||Ax||}_{\text{Länge des Bildes}} \leq \underset{\text{Verlängerungs-Schranke}}{\gamma} \underbrace{||x||}_{\text{Länge des Urbildes}}$$

$$\overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{||Ax||}{||x||} \leq \gamma \quad \forall \, x \neq 0; \text{Suche kleinstes } \gamma.$$

$$\overset{\text{Existenz später}}{\max_{x \neq 0}} \frac{||Ax||}{||x||} = \gamma_{\text{min}} =: ||A||$$

3. Daher

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$$

und $||A||$ ist die kleinste Zahl, mit der diese Ungleichung $\forall x$ gilt.

4. Bem. 8.74: Die Operator-Norm $A \longmapsto ||A||$ ist Norm auf $\mathbb{R}^{(n,n)}$. D.h. es gelten

(i) $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$
(ii) $||\lambda A|| = |\lambda|\, ||A||$
(iii) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
zusätzlich submultiplikativ
(iv) $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

Beweis von (iv):
$||AB||$ ist die kleinste Zahl γ mit

$$||(AB)x|| \leq \gamma ||x|| \quad \forall x.$$

Es ist aber

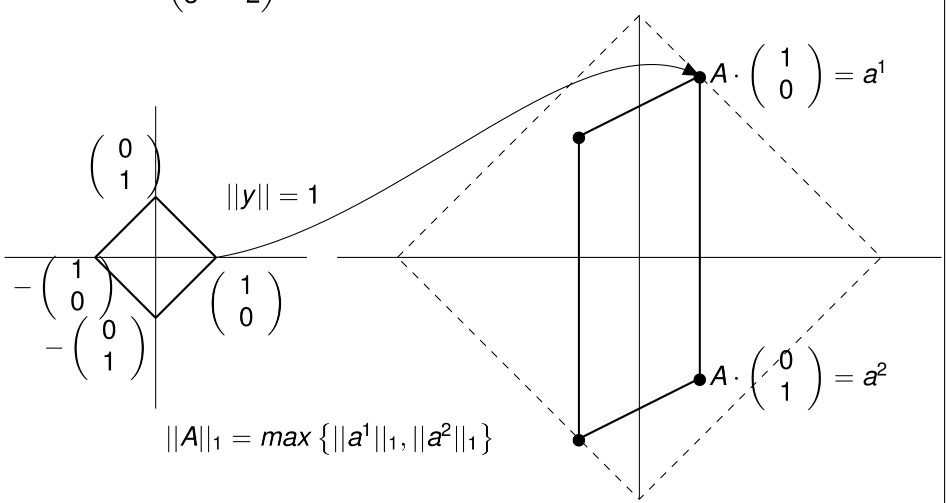
$$\begin{aligned} ||ABx|| &= ||A(Bx)|| \leq ||A|| \cdot ||Bx|| \\ &\leq ||A|| \cdot ||B|| \cdot ||x|| \\ &= (||A|| \cdot ||B||) \cdot ||x|| \quad \forall x \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Beh. $\square$

5. Bem. 2.73:

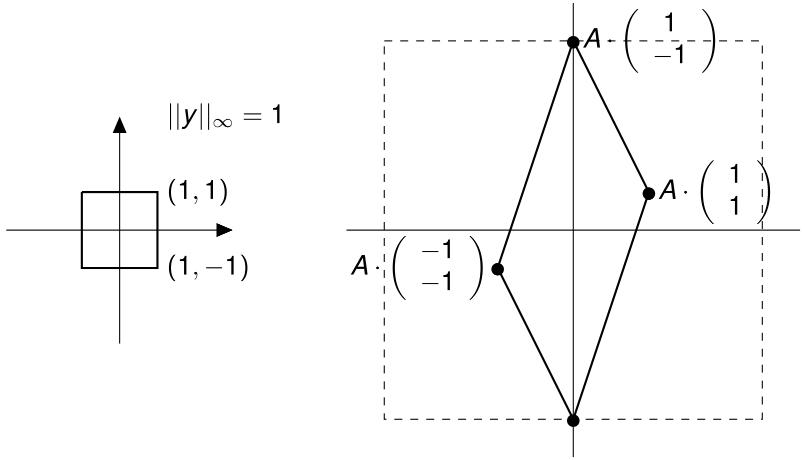
$$\begin{aligned} ||A|| &= \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \\ &= \max_{x \neq 0} \frac{1}{||x||} ||Ax|| \\ &= \max_{x \neq 0} \left|\left| A \frac{x}{||x||} \right|\right| \\ &= \max_{||y||=1} ||Ay|| \end{aligned}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $||\ || = ||\ ||_1$



$$||A||_1 = \max \left\{ ||a^1||_1, ||a^2||_1 \right\}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $||\ || = ||\ ||_\infty$



$$\begin{aligned} &||A|| \cdot \left\{ x \,\middle|\, ||x||_\infty = 1 \right\} \\ &= \left\{ x \,\middle|\, ||x||_\infty = ||A||_\infty \right\} \end{aligned}$$

Seite 281

Satz 8.76

$$||A||_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{Zeilensummen-Norm}$$

$$||A||_1 = \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{Spaltensummen-Norm}$$

$$||A||_2 = \max\left\{|\lambda|^{1/2} \middle| \lambda \in spec(A^T A)\right\}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{cc} A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 8 \quad ||A||_1 \\ 3 \\ 6 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 4 & 7 & 6 \end{array} & \\ ||A||_1 & \end{array}$$

$$||A||_2 = \max\left\{\sqrt{\lambda} \middle| \lambda \in spec(A^T A)\right\}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 26 & -5 & 4 \\ -5 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{arbeitsaufwendig!}$$

Seite 283

Zur Abschätzung der Spektralnorm:

Satz 8.78

$\forall A \in \underset{\mathbb{C}^{(n,n)}}{\mathbb{R}^{(n,n)}}$:

$$||A||_2 \le ||A||_s := \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

$||A||_s$ heißt Schur - Norm oder Schmidt - Norm oder Frobenius - Norm (anglo - amer.)

Achtung: $||A||_s$ ist keiner Vektor-Norm zugeordnet.

Beweis

$$||Ax||_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \underset{CSU}{\le} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

$$= ||A||_s^2 \, ||x||_2^2 \qquad \square.$$

Seite 284

Endlich zurück zu den Eigenwerten:

Satz 8.81

Sei $||A||$ Matrixnorm von $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ die einer Vektornorm zugeordnet ist. Dann ist

$$|\lambda| \le ||A|| \quad \forall \lambda \in spec(A).$$

Beweis

Sei $\lambda \in spec(A)$ und $Ax = \lambda x, x \neq 0$

Dann

$$|\lambda| \cdot ||x|| = ||\lambda x|| = ||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x|| \quad \square$$

Definition (8.83)

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}(\mathbb{C}^{(n,n)})$

$$\rho(A) := \max\left\{ |\lambda| \middle| \lambda \in spec(A)\right\} \text{ Spektralradius von } A.$$

Seite 284

Satz 8.81 $\Rightarrow$

$$\rho(A) \leq ||A|| \quad \forall || \, ||$$

umgekehrt:

Zu $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und jedem $\epsilon > 0$ $\exists$ eine Norm $|| \, ||$ mit

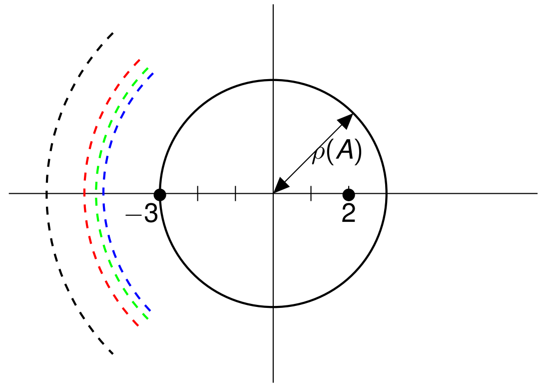
$$||A|| \leq \rho(A) + \epsilon$$

Achtung: $\rho(A)$ ist keine Norm!

Denn für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\rho(A) = 0$ aber nicht $A = 0$!

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$spec(A) = \{-3, 2\}$



$\rho(A) = 3$

$||A||_1 = 5$

$||A||_\infty = 6$

$||A||_2 = 4.4966...$

$||A||_s = 4.690415...$

Ende der Vorlesung

„Lineare Algebra“

Auf Wiedersehen

im Master-Studium