Vorlesung 4

26. + 29. April

Linearer Ausgleich 1

Wiederholung:

Bei $w^1, ..., w^m, v \in \mathbb{R}^n$; $(w^1, \dots, w^m) =: A \in \mathbb{R}^{(n,m)}$
und „inneres Produkt“ = „euklidisches Produkt“

schrieb sich das Approximationsproblem

$$\text{Finde } \tilde{w} = \sum_{k=1}^{m} \zeta_k w^k \text{ mit } \|\tilde{w} - v\|_2 \leq \|w - v\|_2 \quad \forall w \in \text{span}\{w^1, ..., w^m\}$$

so:

$$\text{Minimiere } \|A\zeta - v\|_2 \text{ bezüglich } \zeta.$$

Das Gramsche System

$$\begin{pmatrix} < w^1, w^1 > & \cdots & < w^1, w^m > \\ \vdots & & \\ < w^m, w^1 > & \cdots & < w^m, w^m > \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} < w^1, v > \\ \vdots \\ < w^m, v > \end{pmatrix}$$

wurde zu den

$$A^T A\zeta = A^T v \quad \text{sogenannte Normalgleichungen.}$$

Wir wollen heute sehen, dass

$$\text{Minimiere } \|A\zeta - v\|_2 \text{ bezüglich } \zeta.$$

sehr wichtig ist und

einen weiteren Zugang zu seiner Lösung neben den Normalgleichungen kennenlernen.

Seite 219

Linearer Ausgleich

Aufgabe

Gegeben „Naturgesetz“

$$h(T) = \alpha + \beta\, T \leftarrow \text{ Temperatur}$$

Höhe einer Flüssigkeitssäule abhängig von T.
Bestimme α, β aus Messungen.

Zwei Messungen

$$T_1 \longrightarrow h_1$$

$$T_2 \longrightarrow h_2$$

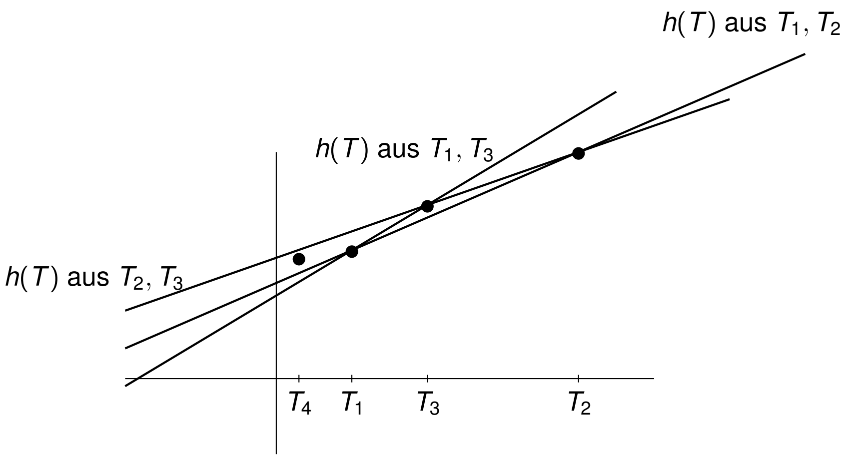
geben lineares Gleichungssystem

$$\left.\begin{matrix} \alpha + \beta T_1 \stackrel{!}{=} h_1 \\ \alpha + \beta T_2 \stackrel{!}{=} h_2 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Schön einfach aber (weil Messungen Fehler haben) oft auch schön falsch!

Seite 220

Zur Kontrolle mehr Messungen



Was ist richtig?

Seite 220

Nach einer Stunde folgende Situation

$$\begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ 1 & T_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Was tun?

Seite 221

Ausweg:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ 1 & T_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben

$$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$$

$$b \in \mathbb{R}^m$$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$||A\,x - b||_2 \text{ minimal.}$$

Bemerkung:

Meistens ist $m \gg n$:
$$\begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} min$$

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben

$$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \qquad b \in \mathbb{R}^m$$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|\left(a^1x_1 + a^2x_2 + \cdots + a^nx_n\right) - b\|_2 \quad = \quad \|Ax - b\|_2 \text{ minimal.}$$

$A\,x_{min}$ ist der Punkt in $span\{a^1, \cdots, a^n\}$, der von b den kleinsten Abstand hat.

Ax_{min} ist die Projektion von b auf $span\{a^1, \cdots, a^n\}$.

x_{min} löst das Gramsche System

$$\begin{bmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > & \cdots & < a^1, a^n > \\ \vdots & & & \\ < a^n, a^1 > & < a^n, a^2 > & \cdots & < a^n, a^n > \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} < a^1, b > \\ \vdots \\ < a^n, b > \end{bmatrix}$$

x_{min} löst das Gramsche System

$$\begin{bmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > & \cdots & < a^1, a^n > \\ \vdots & & & \\ < a^n, a^1 > & < a^n, a^2 > & \cdots & < a^n, a^n > \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} < a^1, b > \\ \vdots \\ < a^n, b > \end{bmatrix}$$

Mit $\langle u, v\rangle = u^Tv$ also

$$\begin{bmatrix} (a^1)^T a^1 & (a^1)^T a^2 & \cdots & (a^1)^T a^n \\ \vdots & & & \\ (a^n)^T a^1 & (a^n)^T a^2 & \cdots & (a^n)^T a^n \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} (a^1)^T b \\ \vdots \\ (a^n)^T b \end{bmatrix},$$

und somit einfach

$$A^TAx = A^Tb.$$

Seite 231

Satz 7.12

Die Lösungen von $||A\,x - b|| \stackrel{!}{=} min$ sind genau die Lösungen der Normalgleichungen:

$$A^T\,A\,x = A^T\,b$$

Beweis wich vom Skript ab:

$$Ax - b \perp a^1, \ldots, a^n \quad \Longleftrightarrow \quad A^T(Ax - b) = 0.$$

Erinnerung:

$$A^T\,A \text{ regulär } \Leftrightarrow a^1, \ldots, a^n \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow Rang\,A = n$$

Dann

$$x_{min} = (A^T\,A)^{-1}A^T\,b$$

und

$$P(b) = Ax_{min} = A(A^T\,A)^{-1}A^T\,b$$

Beispiel

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| \stackrel{!}{=} min$$

$$A^T\,A\,x = A^T\,b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei Handrechnung für kleine Probleme oft einfach! Bei großen Problemen aber sehr rundungsfehleranfällig, daher für Maschinenrechnung andere Methode:

Seite 224

Erinnerung:

$$||z||_2 = ||Qz||_2$$

wenn Q orthogonal.
$\Rightarrow$ Bei orthogonalem Q

$$||Ax-b|| = min \Leftrightarrow ||Q(Ax-b)|| = min$$

IDEE:
Wähle sukzessive Householder-Matrizen für Q, so dass A auf Dreiecksgestalt $\frac{R}{0}$ gebracht wird.

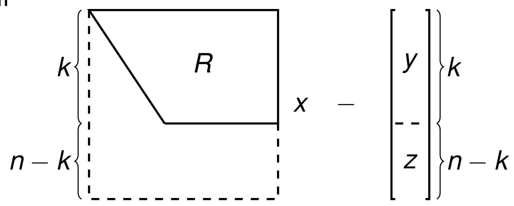
$$||Q(Ax-b)||^2 = ||\underbrace{QA}_{\frac{R}{0}}x - \underbrace{Qb}_{\binom{y}{z}}||^2$$

$$= \underbrace{||Rx-y||_2^2}_{\text{Lösung aus } Rx-y=0} + \underbrace{||z||^2}_{\text{Minimalwert}}$$

Genauer: Transformiere orthogonal

$$A^{(0)}x - b^{(0)} \qquad A^{(0)} = A = (a_0^1, \cdots, a_0^n)$$

auf



Im Einzelnen:

1. Schritt: $a^1 \neq 0?$ $\rightarrow$ Nein $A^{(0)} \neq 0?$ $\rightarrow$ Nein STOP
Wenn JA: Tausche (längste) Spalte $\neq 0$ nach vorn
Wähle Householder-Matrix Q_1 mit $Q_1\, a_0^1 = \pm||a_0^1||e^1$

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{Q_1 A^{(0)}}_{0 \neq \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}} \qquad \underbrace{Q_1\, b}_{b^{(1)}}$$

2.Schritt = 1.Schritt für $A^{(1)}$

2.Schritt:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & H_2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_m^{(1)} \end{pmatrix}$$

$A^{(1)} = (a_1^1, a_1^2, \cdots, a_1^{n-1}) = 0 \Rightarrow$ STOP
Sonst $\Rightarrow$ Tausche Spalte $\neq 0$ nach vorn (1. Zeile mittauschen)
Householder H_2 so dass $H_2\, a_1^1 = \underbrace{\pm||a_1^1||}_{r_{22}}\, e^1, \quad e^1 \in \mathbb{R}^{m-1}$.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & H_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \hline 0 & & A^{(1)} & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \hline 0 & & H_2\, A^{(1)} & \end{array}\right) =$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A^{(2)} & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right|$$

3. Schritt: $A^{(2)} = 0?$ usw. usw

Nach k Schritten erhält man

$Q_k\, Q_{k-1} \cdots Q_1 (A\,x - b)$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & \cdots & r_{1k} & r_{1,k+1} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & r_{kk} & r_{k,k+1} & \cdots & r_{kn} \\ \vdots & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ b_m^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a \end{matrix}}\right\} y \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a \end{matrix}}\right\} z \end{matrix}$$

$$\underbrace{\overset{Q_k}{\text{orthog}}\ \overset{Q_{k-1}}{\text{orthog.}} \cdots \overset{Q_1}{\text{orthog.}}}_{=Q \text{ orthogonal}}$$

$$\Rightarrow ||A\,x - b||^2 = ||Q(A\,x - b)||^2$$
$$= ||R\,x - y||^2 + ||z||^2$$

$R\,x = y$ lösbar, da $r_{11} \neq 0 \ldots r_{kk} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} & r_{1,k+1} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & r_{kk} & r_{k,k+1} & \cdots & r_{k,n} \end{array}\right) x = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Eindeutig lösbar wenn $k = n$

$\Rightarrow$ Auflösbar nach $x_1, \cdots, x_n$

Seite 228

Wir erhalten nun ein (schon wohlbekanntes) Ergebnis

Satz 7.8

Seien $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, b \in \mathbb{R}^m$

Dann ist das lineare Ausgleichsproblem

$$x \in \mathbb{R}^n : ||A\,x - b|| \overset{!}{=} min$$

stets lösbar.

Es ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$Rang\ A = n$$

ist, d.h. Spalten linear unabhängig.

Beispiele

$$\left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rang ist maximal aber } \neq n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} - 1 \right\|_2 = min$$

Lösungen:

$$x = e^1, e^2, \cdots, e^5, \text{ sowie}$$
$$\forall\, x \text{ mit } \sum x_i = 1 \quad \square$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = min$$

$a^1 \; a^2 \qquad\qquad b$

$$Q_1 : a^1 \to -||a^1||e^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = E - 2ww^T$$

$$\tilde{w} = a^1 - (-||a||^1 e^1)$$

$$w = \tilde{w}/||\tilde{w}||$$

$$Q_1 = E - 2\frac{\tilde{w}\tilde{w}^T}{\tilde{w}^T\tilde{w}}$$

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 \, a^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 \, a^2 = a^2 - \frac{2}{12}\tilde{w} \; \tilde{w}^T a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 \, b = b - \frac{2}{12}\tilde{w} \underbrace{\tilde{w}^T b}_{=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = min \Leftrightarrow$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4/3 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\|_2 = min$$

$$H_2 : \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}^2 = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \; ||w^2||^2 = \frac{120}{9}$$

$$H_2 = E_3 - \frac{2}{120} \cdot 9 \, \tilde{w}^2 \, \tilde{w}^{2T}$$

$$H_2 \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \tfrac{3}{20} \cdot \tfrac{60}{9} \begin{pmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -6/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2 \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{3}{20}\,\frac{78}{9}}_{\frac{13}{10}} \begin{pmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60/30 \\ -6/30 \\ -12/30 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ -60/30 \\ -6/30 \\ -12/30 \end{pmatrix} \right\|_2 = min \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \overset{!}{=} min$$

$$A^T A\, x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weg über die Normalgleichungen also für die Handrechnung deutlich angenehmer.
Householder-Zugang aber GANZ DEUTLICH weniger rundungsfehleranfällig.

Seite 229

QR-Zerlegung

Hat $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ l.u. Spalten, so erhält man mit Householder-Matrizen

$$Q_n \cdot Q_{n-1} \cdots Q_1\, A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Darin ist $R \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und die Q_i sind orthogonal und symmetrisch $\Rightarrow$

Satz 7.9

$$A = \underbrace{Q_1\, Q_2 \cdots Q_n}_{Q} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{Q}_{\text{orthogonal}} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das heißt QR-Zerlegung von A.

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ quadratisch (regulär)

$$\Rightarrow A = \underset{\text{orthogonal}}{Q} \; \underset{\text{Dreiecksmatrix}}{R} \; \text{(regulär)}$$

Löse $A\,x = b$ wie folgt

$$\Updownarrow$$

$$QR\,x = b \qquad Q = Q_1 \cdots Q_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\text{Löse auf}}{R\,x} = \underbrace{Q^T b}_{\text{rechne aus}} \qquad Q^T b = \underbrace{Q_n \cdots Q_1}_{\text{Kenntnis der Householder-Matrizen reicht}} \; b$$

Achtung!

QR-Zerlegung etwa doppelt so teuer wie LR-Zerlegung. QR-Zerlegung aber etwas stabiler.

Bemerkung

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär

$$||A\,x - b|| = \ min$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = A^{-1} b \text{ (Lösung von } A\,x = b)$$

$\Rightarrow$ Householder Methode auch für reguläre Gleichungssysteme möglich.

Aufwand $\approx$ zwei Mal Gauss.

Aber bei empfindlichen Gleichungssystemen besser!

Ende der 4. Vorlesung

Vorlesung 5

3. Mai + 6. Mai

Linearer Ausgleich 2

Seite 223

Wiederholung: Ausgleich

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \quad b \in \mathbb{R}^m.$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||A\,x - b||_2$ minimal.

Satz 7.12

Die Lösungen von $||A\,x - b|| \overset{!}{=} min$ sind genau die Lösungen der Normalgleichungen:

$$A^T\,A\,x = A^T\,b$$

Alternativ:

Orthogonale Transformation auf Dreiecksgestalt.

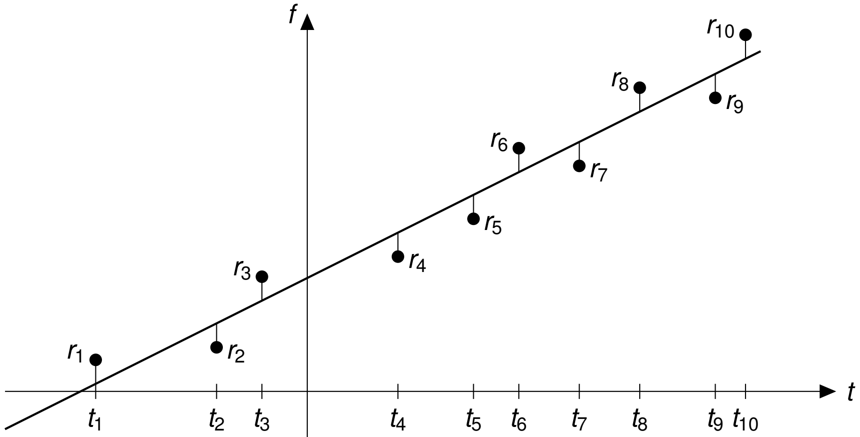
MATLAB:

`x= A\ b` löst $||A\,x - b||_2$ minimal!

Seite 233

Diskrete Approximation durch Ausgleich

Start mit Ausgleichgeraden



Bestimme α, β in

$$f(x) = \alpha + \beta\, t$$

durch Messungen (t_i, b_i), so dass für die Fehler

$$r_i = \alpha + \beta\, t_i - b_i$$

gilt

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}_{\text{„Methode der kleinsten Fehlerquadrate“}} \stackrel{!}{=} min \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - b \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

ist eindeutig lösbar, wenn die Matrix *Rang* 2 hat.

Dies ist genau dann der Fall, wenn unter den t_i-Werten zwei verschiedene sind.

(Man wird nie nur für einen t-Wert messen.)

Denn: Seien dies o.E. $t_1 \neq t_2$

Dann ist in

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{vmatrix} = t_2 - t_1 \neq 0$$

Seite 239

Lösung von

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - b \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

über die Normalgleichungen

$$A^T A\, x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > \\ < a^2, a^1 > & < a^2, a^2 > \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} < a^1, b > \\ < a^2, b > \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_i \\ \sum_{i=1}^n t_i\, b_i \end{pmatrix}$$

Cramer $\Rightarrow$

$$\alpha = x_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \sum_{i=1}^{n} t_i\, b_i \sum_{i=1}^{n} t_i \right) / det$$

$$\beta = x_2 = \left(n \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i\, b_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} b_i \right) / det$$

$$\text{mit } det = n \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^2$$

$\Rightarrow$ Kopfschmerzen.

MATLAB

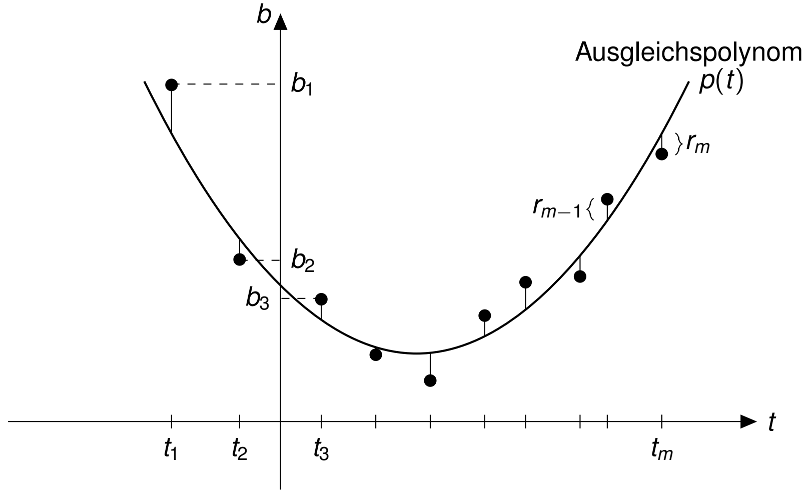
Spaltenvektor `t` enthalte die t-Werte, Spaltenvektor `b` die Messwerte.
Dann liefert

```
A=[ones(size(t)), t]; x= A\b; alpha=x(1); beta=x(2);
```

die Lösung.

Seite 223

Verallgemeinerung der Ausgleichsgerade



$\sum^{m} r_i^2 \stackrel{!}{=} min$ Fehlerquadratsumme minimal!!

Ansatz:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, t^i$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

$$Rang \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{bmatrix} = n+1 = \text{ Anzahl Spalten.}$$

$\Rightarrow$ Mindestforderung $m \geq n+1$

(Mindestens so viele (m) Messungen wie Unbekannte $\underbrace{a_0, a_1, \cdots, a_n}_{n+1}$)

Behauptung

Sind die t_i alle verschieden, so reicht das!

Satz

Gegeben $(t_j, b_j) \in \mathbb{R}^2; j = 1, \cdots, m$ mit $t_i \neq t_j$ bei $i \neq j$
Dann gibt es für jedes $n < m$ genau ein Polynom

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, t^j$$

welches unter allen Polynomen in Π_n das Funktional

$$\sum_{i=1}^{m} (p(t_i) - b_i)^2 \text{ minimiert.}$$

Beweis

Wir zeigen: Die Spalten von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_m & \cdots & t_m^n \end{bmatrix} \text{ sind linear unabhängig.}$$

Weil $m \geq n+1$, ist die Vandermondesche Matrix

$$V_n := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

in den ersten $n+1$ Zeilen von A enthalten. Es ist aber schon bekannt

LEMMA

$$det\ V_n = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n+1} (t_j - t_i) \quad \square$$

Spezialfall

Für $m = n+1$ ist:

$$\left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{\text{Quadratisch, regulär}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - b \right\|_2 = min$$

$$\Leftrightarrow$$

äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} a = b$$

Also $\exists!$ Polynom p in Π_n, das an $(n+1)$ paarweise verschiedenen Stellen $t_1, \cdots, t_{n+1}$ vorgegebene Werte annimmt.
Dies Polynom heißt INTERPOLATIONSPOLYNOM

Berechnung: Später! Nicht über das Gleichungssystem !!

Seite 234

Allgemeiner Ausgleich

Finde zu m Daten

$$(t_j, b_j), j = 1, \cdots, m$$

$t_j \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, paarweise verschieden, eine Funktion ($n \leq m$)

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \phi_k(t), x_k \text{ variabel}$$

mit

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t_1) - b_1 \\ \vdots \\ \phi(t_m) - b_m \end{pmatrix} \right\|_2 \overset{!}{=} min$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t_1) - b_1 \\ \vdots \\ \phi(t_m) - b_m \end{pmatrix} \right\|_2 \overset{!}{=} min$$

lautet ausgeschrieben

$$min \overset{!}{=} \left\| \begin{pmatrix} \phi_1(t_1)x_1 & +\phi_2(t_1)x_2 & +\cdots+ & \phi_n(t_1)x_n - b_1 \\ \phi_1(t_2)x_1 & +\phi_2(t_2)x_2 & +\cdots+ & \phi_n(t_2)x_n - b_2 \\ \vdots & & & \\ \phi_1(t_m)x_1 & +\phi_2(t_m)x_2 & +\cdots+ & \phi_n(t_m)x_n - b_m \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$\text{oder } \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_2(t_1) & \cdots & \phi_n(t_1) \\ \vdots & & & \\ \phi_1(t_m) & \phi_2(t_m) & \cdots & \phi_n(t_m) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{wenn Spalten l.u.} \\ \text{so ist das Problem eindeutig lösbar}}} x - b \right\|_2 = min$$

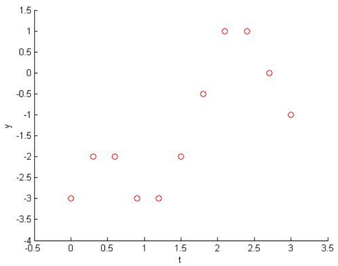
Beispiel

$$\phi(t) = x_1 \sin(3t) + x_2 \cos(3t) + x_3 e^{-t}$$

$\uparrow x_1, x_2, x_3$ zu bestimmen

aus Messungen

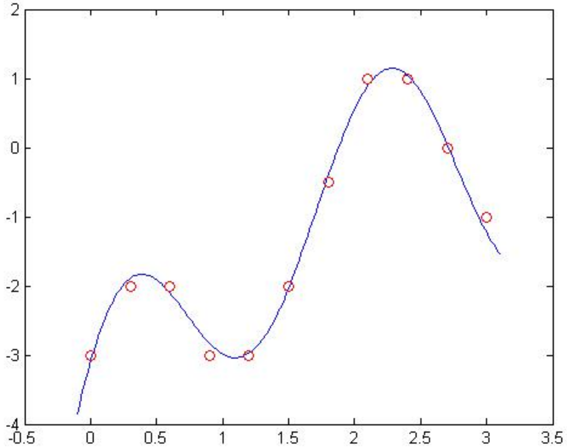
```
t = [ 0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1, 2.4, 2.7, 3]'
y = [ -3, -2, -2, -3, -3, -2, -0.5, 1, 1, 0, -1]'
```




```
A= [ sin(3*t), cos(3*t), exp(-t)]
rank(A)
x = A\y
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.7833 & 0.6216 & 0.7408 \\ 0.9738 & -0.2272 & 0.5488 \\ 0.4274 & -0.9041 & 0.4066 \\ -0.4425 & -0.8968 & 0.3012 \\ -0.9775 & -0.2108 & 0.2231 \\ -0.7728 & 0.6347 & 0.1653 \\ 0.0168 & 0.9999 & 0.1225 \\ 0.7937 & 0.6084 & 0.0907 \\ 0.9699 & -0.2435 & 0.0672 \\ 0.4121 & -0.9111 & 0.0498 \end{pmatrix}; ans = 3; x = \begin{pmatrix} 0.7328 \\ 1.4354 \\ -4.5315 \end{pmatrix}$$

```
tt= linspace(-0.1, 3.1),210);
AA= [ sin(3*tt), cos(3*tt), exp(-tt)];
yy= AA*x;
plot(tt,yy); plot(t,y,'or')
```



Tschebyscheff-Systeme

Anmerkung

Sind bei einem Funktionensystem $\phi_1, \cdots, \phi_n$ für beliebig verschiedene n Punkte $t_1, \cdots, t_n \in [a, b]$ stets

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t_1) \\ \vdots \\ \phi_1(t_n) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \phi_n(t_1) \\ \vdots \\ \phi_n(t_n) \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig,}$$

so heißt $\phi_1, \cdots, \phi_n$
ein TSCHEBYSCHEFF-SYSTEM auf $[a, b]$.

Es gibt dicke Bücher über Tschebyscheff-Systeme!!

Ende der 5. Vorlesung