Vorlesung 4

26. + 29. April

Linearer Ausgleich 1

Wiederholung:

Bei $w^1, ..., w^m, v \in \mathbb{R}^n; \quad (w^1, \ldots, w^m) =: A \in \mathbb{R}^{(n,m)}$
und „inneres Produkt“ = „euklidisches Produkt“

schrieb sich das Approximationsproblem

$$\text{Finde } \tilde{w} = \sum_{k=1}^{m} \zeta_k w^k \text{ mit } \|\tilde{w} - v\|_2 \leq \|w - v\|_2 \quad \forall w \in \text{span}\{w^1, ..., w^m\}$$

so:

$$\text{Minimiere } \|A\zeta - v\|_2 \text{ bezüglich } \zeta.$$

Das Gramsche System

$$\begin{pmatrix} < w^1, w^1 > & \cdots & < w^1, w^m > \\ \vdots & & \\ < w^m, w^1 > & \cdots & < w^m, w^m > \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} < w^1, v > \\ \vdots \\ < w^m, v > \end{pmatrix}$$

wurde zu den

$$A^T A\zeta = A^T v \quad \text{sogenannte Normalgleichungen.}$$

Wiederholung:

Bei $w^1, ..., w^m, v \in \mathbb{R}^n$; $\quad (w^1, \ldots, w^m) =: A \in \mathbb{R}^{(n,m)}$
und „inneres Produkt“ = „euklidisches Produkt“

schrieb sich das Approximationsproblem

$$\text{Finde } \tilde{w} = \sum_{k=1}^{m} \zeta_k w^k \text{ mit } \|\tilde{w} - v\|_2 \leq \|w - v\|_2 \quad \forall w \in \text{span}\{w^1, ..., w^m\}$$

so:

$$\text{Minimiere } \|A\zeta - v\|_2 \text{ bezüglich } \zeta.$$

Das Gramsche System

$$\begin{pmatrix} < w^1, w^1 > & \cdots & < w^1, w^m > \\ \vdots & & \\ < w^m, w^1 > & \cdots & < w^m, w^m > \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} < w^1, v > \\ \vdots \\ < w^m, v > \end{pmatrix}$$

wurde zu den

$$A^T A\zeta = A^T v \quad \text{sogenannte Normalgleichungen.}$$

Wir wollen heute sehen, dass

$$\text{Minimiere } \|A\zeta - v\|_2 \text{ bezüglich } \zeta.$$

sehr wichtig ist und

einen weiteren Zugang zu seiner Lösung neben den Normalgleichungen kennenlernen.

Wir wollen heute sehen, dass

$$\text{Minimiere } \|A\zeta - v\|_2 \text{ bezüglich } \zeta.$$

sehr wichtig ist und

einen weiteren Zugang zu seiner Lösung neben den Normalgleichungen kennenlernen.

Linearer Ausgleich

Seite 219

Aufgabe

Gegeben „Naturgesetz“

$$h(T) = \alpha + \beta\, T \leftarrow \text{ Temperatur}$$

Höhe einer Flüssigkeitssäule abhängig von T.
Bestimme α, β aus Messungen.

Zwei Messungen

$$T_1 \longrightarrow h_1$$

$$T_2 \longrightarrow h_2$$

geben lineares Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta T_1 \overset{!}{=} h_1 \\ \alpha + \beta T_2 \overset{!}{=} h_2 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Schön einfach aber (weil Messungen Fehler haben) oft auch schön falsch!

Linearer Ausgleich

Seite 219

Aufgabe

Gegeben „Naturgesetz“

$$h(T) = \alpha + \beta\, T \leftarrow \text{ Temperatur}$$

Höhe einer Flüssigkeitssäule abhängig von T.
Bestimme α, β aus Messungen.

Zwei Messungen

$$T_1 \longrightarrow h_1$$

$$T_2 \longrightarrow h_2$$

geben lineares Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta T_1 &\overset{!}{=} h_1 \\ \alpha + \beta T_2 &\overset{!}{=} h_2 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Schön einfach aber (weil Messungen Fehler haben) oft auch schön falsch!

Linearer Ausgleich

Seite 219

Aufgabe

Gegeben „Naturgesetz“

$$h(T) = \alpha + \beta\, T \leftarrow \text{ Temperatur}$$

Höhe einer Flüssigkeitssäule abhängig von T.
Bestimme α, β aus Messungen.

Zwei Messungen

$$T_1 \longrightarrow h_1$$

$$T_2 \longrightarrow h_2$$

geben lineares Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta T_1 \stackrel{!}{=} h_1 \\ \alpha + \beta T_2 \stackrel{!}{=} h_2 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Schön einfach aber (weil Messungen Fehler haben) oft auch schön falsch!

Linearer Ausgleich

Seite 219

Aufgabe

Gegeben „Naturgesetz"

$$h(T) = \alpha + \beta\, T \leftarrow \text{ Temperatur}$$

Höhe einer Flüssigkeitssäule abhängig von T.
Bestimme α, β aus Messungen.

Zwei Messungen

$$T_1 \longrightarrow h_1$$

$$T_2 \longrightarrow h_2$$

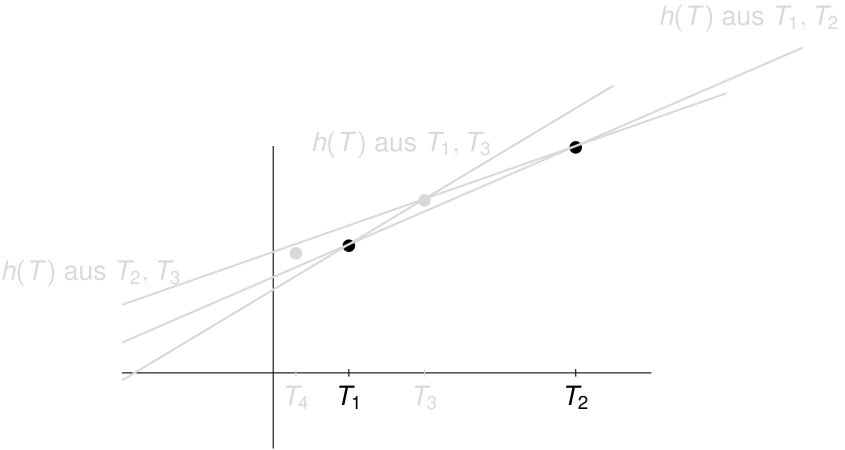
geben lineares Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta T_1 &\stackrel{!}{=} h_1 \\ \alpha + \beta T_2 &\stackrel{!}{=} h_2 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Schön einfach aber (weil Messungen Fehler haben) oft auch schön falsch!

Seite 220

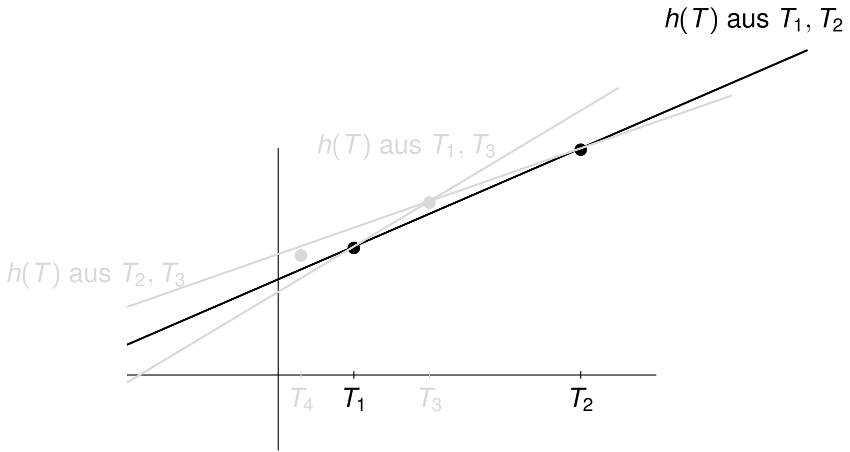
Zur Kontrolle mehr Messungen



Was ist richtig?

Seite 220

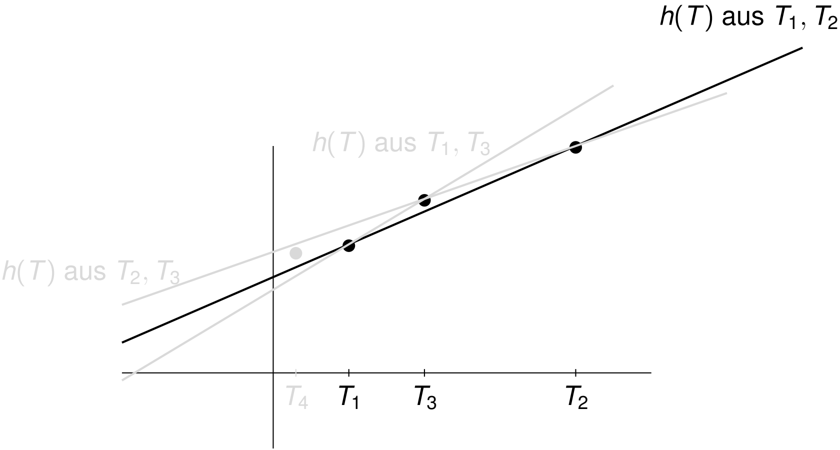
Zur Kontrolle mehr Messungen



Was ist richtig?

Seite 220

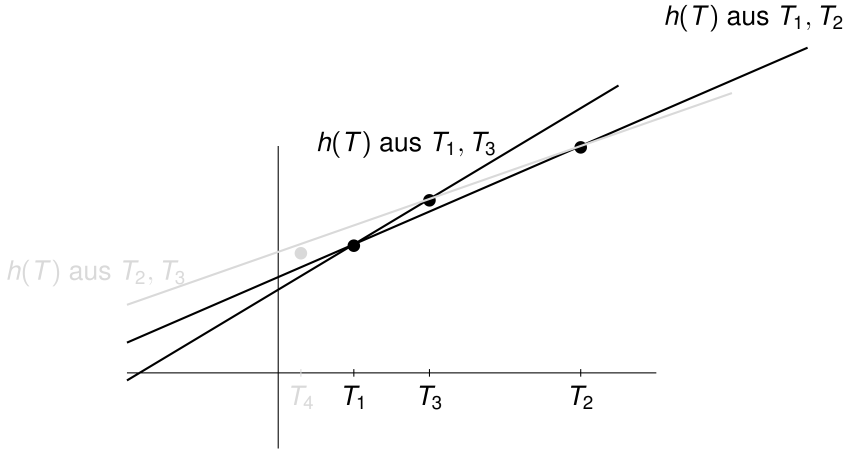
Zur Kontrolle mehr Messungen



Was ist richtig?

Seite 220

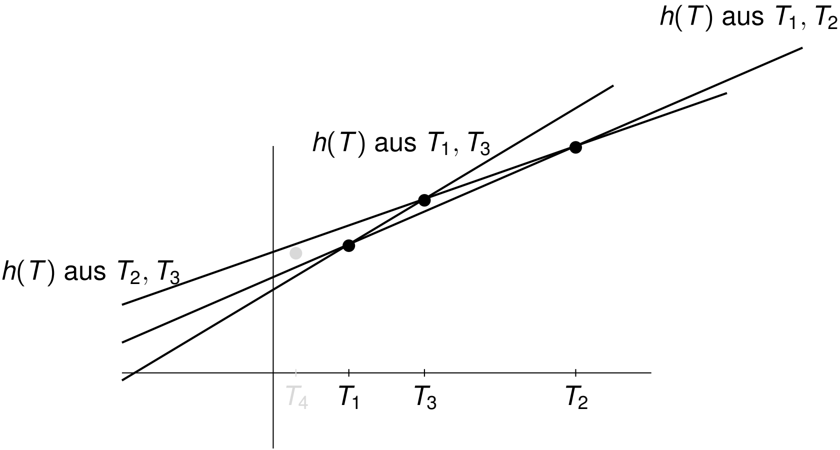
Zur Kontrolle mehr Messungen



Was ist richtig?

Seite 220

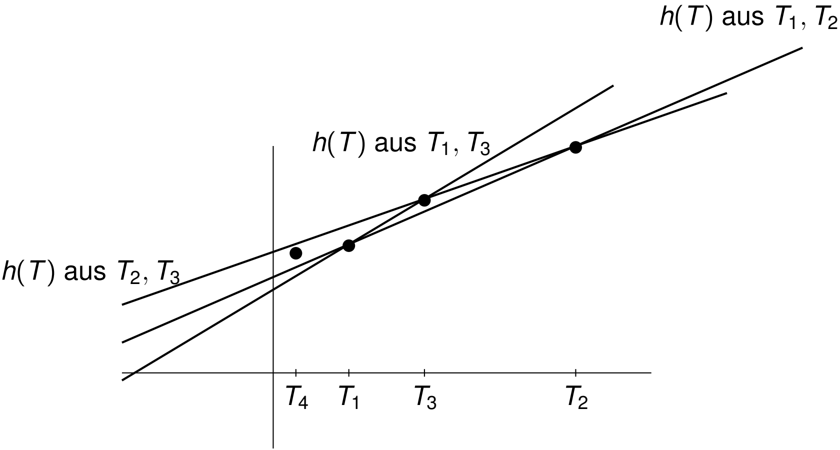
Zur Kontrolle mehr Messungen



Was ist richtig?

Seite 220

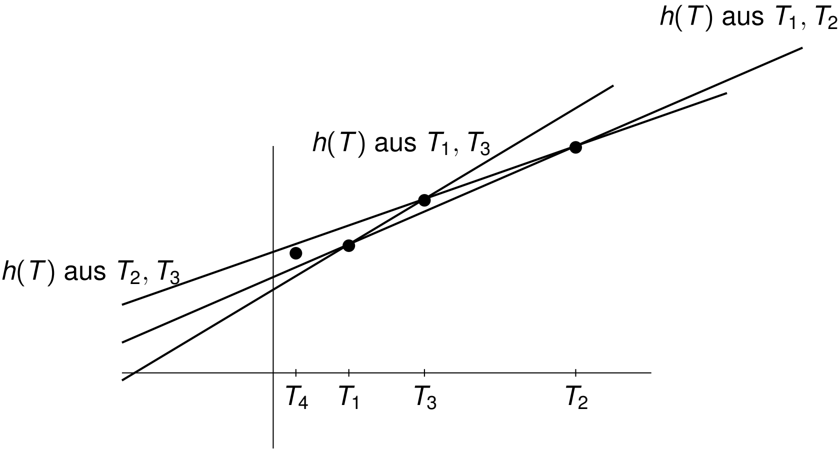
Zur Kontrolle mehr Messungen



Was ist richtig?

Seite 220

Zur Kontrolle mehr Messungen



Was ist richtig?

Seite 220

Nach einer Stunde folgende Situation

$$\begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ 1 & T_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Was tun?

Seite 220

Nach einer Stunde folgende Situation

$$\begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ 1 & T_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Was tun?

Seite 221

Ausweg:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ 1 & T_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben

$$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$$

$$b \in \mathbb{R}^{m}$$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$||A\,x - b||_2 \text{ minimal.}$$

Bemerkung:

Meistens ist $m \gg n$: $\begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \overset{!}{=} min$

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben

$$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$$

$$b \in \mathbb{R}^{m}$$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$||A\,x - b||_2 \text{ minimal.}$$

Bemerkung:

Meistens ist $m \gg n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} min$$

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben

$$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \qquad b \in \mathbb{R}^m$$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\| \left(a^1 x_1 + a^2 x_2 + \cdots + a^n x_n\right) - b\|_2 \quad = \quad \|Ax - b\|_2 \text{ minimal.}$$

$A\,x_{min}$ ist der Punkt in $span\{a^1, \cdots, a^n\}$, der von b den kleinsten Abstand hat.

Ax_{min} ist die Projektion von b auf $span\{a^1, \cdots, a^n\}$.

x_{min} löst das Gramsche System

$$\begin{bmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > & \cdots & < a^1, a^n > \\ \vdots & & & \\ < a^n, a^1 > & < a^n, a^2 > & \cdots & < a^n, a^n > \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} < a^1, b > \\ \vdots \\ < a^n, b > \end{bmatrix}$$

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben

$$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \qquad b \in \mathbb{R}^m$$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\| \left(a^1 x_1 + a^2 x_2 + \cdots + a^n x_n\right) - b\|_2 \qquad = \qquad \|Ax - b\|_2 \text{ minimal.}$$

$A\, x_{min}$ ist der Punkt in $span\{a^1, \cdots, a^n\}$, der von b den kleinsten Abstand hat.

Ax_{min} ist die Projektion von b auf $span\{a^1, \cdots, a^n\}$.

x_{min} löst das Gramsche System

$$\begin{bmatrix} <a^1, a^1> & <a^1, a^2> & \cdots & <a^1, a^n> \\ \vdots & & & \\ <a^n, a^1> & <a^n, a^2> & \cdots & <a^n, a^n> \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} <a^1, b> \\ \vdots \\ <a^n, b> \end{bmatrix}$$

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben

$$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \qquad b \in \mathbb{R}^m$$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|\left(a^1 x_1 + a^2 x_2 + \cdots + a^n x_n\right) - b\|_2 \qquad = \qquad \|Ax - b\|_2 \text{ minimal.}$$

$A\,x_{min}$ ist der Punkt in $span\{a^1, \cdots, a^n\}$, der von b den kleinsten Abstand hat.

Ax_{min} ist die Projektion von b auf $span\{a^1, \cdots, a^n\}$.

x_{min} löst das Gramsche System

$$\begin{bmatrix} <a^1, a^1> & <a^1, a^2> & \cdots & <a^1, a^n> \\ \vdots & & & \\ <a^n, a^1> & <a^n, a^2> & \cdots & <a^n, a^n> \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} <a^1, b> \\ \vdots \\ <a^n, b> \end{bmatrix}$$

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben

$$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \qquad b \in \mathbb{R}^m$$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\| \left(a^1 x_1 + a^2 x_2 + \cdots + a^n x_n\right) - b\|_2 \qquad = \qquad \|Ax - b\|_2 \text{ minimal.}$$

$A\, x_{min}$ ist der Punkt in $span\{a^1, \cdots, a^n\}$, der von b den kleinsten Abstand hat.

Ax_{min} ist die Projektion von b auf $span\{a^1, \cdots, a^n\}$.

x_{min} löst das Gramsche System

$$\begin{bmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > & \cdots & < a^1, a^n > \\ \vdots & & & \\ < a^n, a^1 > & < a^n, a^2 > & \cdots & < a^n, a^n > \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} < a^1, b > \\ \vdots \\ < a^n, b > \end{bmatrix}$$

x_{min} löst das Gramsche System

$$\begin{bmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > & \cdots & < a^1, a^n > \\ \vdots & & & \\ < a^n, a^1 > & < a^n, a^2 > & \cdots & < a^n, a^n > \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} < a^1, b > \\ \vdots \\ < a^n, b > \end{bmatrix}$$

Mit $\langle u, v \rangle = u^T v$ also

$$\begin{bmatrix} \left(a^1\right)^T a^1 & \left(a^1\right)^T a^2 & \cdots & \left(a^1\right)^T a^n \\ \vdots & & & \\ \left(a^n\right)^T a^1 & \left(a^n\right)^T a^2 & \cdots & \left(a^n\right)^T a^n \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \left(a^1\right)^T b \\ \vdots \\ \left(a^n\right)^T b \end{bmatrix},$$

und somit einfach

$$A^T A x = A^T b.$$

x_{min} löst das Gramsche System

$$\begin{bmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > & \cdots & < a^1, a^n > \\ \vdots & & & \\ < a^n, a^1 > & < a^n, a^2 > & \cdots & < a^n, a^n > \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} < a^1, b > \\ \vdots \\ < a^n, b > \end{bmatrix}$$

Mit $\langle u, v \rangle = u^T v$ also

$$\begin{bmatrix} \left(a^1\right)^T a^1 & \left(a^1\right)^T a^2 & \cdots & \left(a^1\right)^T a^n \\ \vdots & & & \\ (a^n)^T a^1 & (a^n)^T a^2 & \cdots & (a^n)^T a^n \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \left(a^1\right)^T b \\ \vdots \\ (a^n)^T b \end{bmatrix},$$

und somit einfach

$$A^T A x = A^T b.$$

Seite 231

Satz 7.12

Die Lösungen von $||A\,x - b|| \stackrel{!}{=} \ min$ sind genau die Lösungen der Normalgleichungen:

$$A^T\,A\,x = A^T\,b$$

Beweis wich vom Skript ab:

$$Ax - b \perp a^1, \ldots, a^n \quad \Longleftrightarrow \quad A^T(Ax - b) = 0.$$

Erinnerung:

$$A^T\,A \text{ regulär } \Leftrightarrow a^1, \ldots, a^n \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow \ Rang\ A = n$$

Dann

$$x_{min} = (A^T\,A)^{-1}A^T\,b$$

und

$$P(b) = Ax_{min} = A(A^T\,A)^{-1}A^T\,b$$

Seite 231

Satz 7.12

Die Lösungen von $||A\,x - b|| \stackrel{!}{=} min$ sind genau die Lösungen der Normalgleichungen:

$$A^T\,A\,x = A^T\,b$$

Beweis wich vom Skript ab:

$$Ax - b \perp a^1, \ldots, a^n \quad \Longleftrightarrow \quad A^T(Ax - b) = 0.$$

Erinnerung:

$$A^T\,A \text{ regulär } \Leftrightarrow a^1, \ldots, a^n \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow Rang\,A = n$$

Dann

$$x_{min} = (A^T\,A)^{-1}A^T\,b$$

und

$$P(b) = Ax_{min} = A(A^T\,A)^{-1}A^T\,b$$

Beispiel

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \overset{!}{=} min$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei Handrechnung für kleine Probleme oft einfach! Bei großen Problemen aber sehr rundungsfehleranfällig, daher für Maschinenrechnung andere Methode:

Beispiel

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \stackrel{!}{=} min$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei Handrechnung für kleine Probleme oft einfach! Bei großen Problemen aber sehr rundungsfehleranfällig, daher für Maschinenrechnung andere Methode:

Beispiel

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \stackrel{!}{=} min$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei Handrechnung für kleine Probleme oft einfach! Bei großen Problemen aber sehr rundungsfehleranfällig, daher für Maschinenrechnung andere Methode:

Beispiel

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \stackrel{!}{=} min$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei Handrechnung für kleine Probleme oft einfach! Bei großen Problemen aber sehr rundungsfehleranfällig, daher für Maschinenrechnung andere Methode:

Beispiel

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \stackrel{!}{=} min$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei Handrechnung für kleine Probleme oft einfach! Bei großen Problemen aber sehr rundungsfehleranfällig, daher für Maschinenrechnung andere Methode:

Beispiel

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \overset{!}{=} min$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei Handrechnung für kleine Probleme oft einfach! Bei großen Problemen aber sehr rundungsfehleranfällig, daher für Maschinenrechnung andere Methode:

Seite 224

Erinnerung:

$$||z||_2 = ||Qz||_2$$

wenn Q orthogonal.
$\Rightarrow$ Bei orthogonalem Q

$$||Ax - b|| = min \Leftrightarrow ||Q(Ax - b)|| = min$$

IDEE:
Wähle sukzessive Householder-Matrizen für Q, so dass A auf Dreiecksgestalt $\frac{R}{0}$ gebracht wird.

$$||Q(Ax-b)||^2 = ||\underbrace{QA}_{\frac{R}{0}}x - \underbrace{Qb}_{\left(\frac{y}{z}\right)}||^2$$

$$= \underbrace{||Rx-y||_2^2}_{\text{Lösung aus } Rx-y=0} + \underbrace{||z||^2}_{\text{Minimalwert}}$$

Seite 224

Erinnerung:

$$||z||_2 = ||Qz||_2$$

wenn Q orthogonal.
$\Rightarrow$ Bei orthogonalem Q

$$||Ax - b|| = min \Leftrightarrow ||Q(Ax - b)|| = min$$

IDEE:
Wähle sukzessive Householder-Matrizen für Q, so dass A auf Dreiecksgestalt $\frac{R}{0}$ gebracht wird.

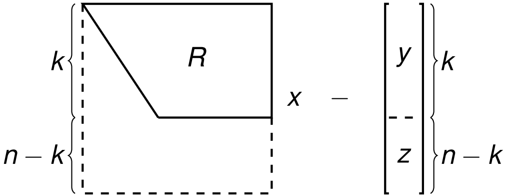
$$||Q(Ax - b)||^2 = ||\underbrace{QA}_{\frac{R}{0}}x - \underbrace{Qb}_{\left(\frac{y}{z}\right)}||^2$$

$$= \underbrace{||Rx - y||_2^2}_{\text{Lösung aus } Rx-y=0} + \underbrace{||z||^2}_{\text{Minimalwert}}$$

Genauer: Transformiere orthogonal

$$A^{(0)}x - b^{(0)} \qquad A^{(0)} = A = (a_0^1, \cdots, a_0^n)$$

auf



Im Einzelnen:

1. Schritt: $a^1 \neq 0?$ $\to$ Nein $A^{(0)} \neq 0?$ $\to$ Nein STOP
Wenn JA: Tausche (längste) Spalte $\neq 0$ nach vorn
Wähle Householder-Matrix Q_1 mit $Q_1\, a_0^1 = \pm||a_0^1||e^1$

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{Q_1 A^{(0)}}_{\begin{array}{c} \\ 0\neq \end{array}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}} \qquad \underbrace{Q_1\, b}_{b^{(1)}}$$

2.Schritt = 1.Schritt für $A^{(1)}$

2.Schritt:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & H_2 \end{array}\right)\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_m^{(1)} \end{pmatrix}$$

$A^{(1)} = (a_1^1, a_1^2, \cdots, a_1^{n-1}) = 0 \Rightarrow$ STOP

Sonst $\Rightarrow$ Tausche Spalte $\neq 0$ nach vorn (1. Zeile mittauschen)

Householder H_2 so dass $H_2\, a_1^1 = \underbrace{\pm||a_1^1||}_{r_{22}}\, e^1, \quad e^1 \in \mathbb{R}^{m-1}$.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & H_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \hline 0 & & A^{(1)} & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \hline 0 & & H_2\, A^{(1)} & \end{array}\right) =$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A^{(2)} & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right|$$

3. Schritt: $A^{(2)} = 0$? usw. usw

Nach k Schritten erhält man

$$Q_k\, Q_{k-1} \cdots Q_1 (A\,x - b)$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & \cdots & r_{1k} & r_{1,k+1} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & r_{kk} & r_{k,k+1} & \cdots & r_{kn} \\ \vdots & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ b_m^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} b \\ \vdots \\ b \end{matrix}}\right\} y \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} b \\ \vdots \\ b \end{matrix}}\right\} z \end{matrix}$$

$$\underbrace{\overset{Q_k}{\text{orthog}}\ \overset{Q_{k-1}}{\text{orthog.}} \cdots \overset{Q_1}{\text{orthog.}}}_{=Q \text{ orthogonal}}$$

$$\Rightarrow ||A\,x - b||^2 = ||Q(A\,x - b)||^2$$
$$= ||R\,x - y||^2 + ||z||^2$$

Nach k Schritten erhält man

$$Q_k\,Q_{k-1}\cdots Q_1(A\,x-b)$$

$$=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & \cdots & r_{1k} & r_{1,k+1} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & r_{kk} & r_{k,k+1} & \cdots & r_{kn} \\ \vdots & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ b_m^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} b \\ \vdots \\ b \end{matrix}}\right\} y \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} b \\ \vdots \\ b \end{matrix}}\right\} z \end{matrix}$$

$$\underbrace{\overset{Q_k}{\text{orthog}}\ \overset{Q_{k-1}}{\text{orthog.}}\cdots\overset{Q_1}{\text{orthog.}}}_{=Q\text{ orthogonal}}$$

$$\Rightarrow \|A\,x-b\|^2 = \|Q(A\,x-b)\|^2$$
$$= \|R\,x-y\|^2 + \|z\|^2$$

Nach k Schritten erhält man

$$Q_k\, Q_{k-1} \cdots Q_1 (A\,x - b)$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & \cdots & r_{1k} & r_{1,k+1} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & r_{kk} & r_{k,k+1} & \cdots & r_{kn} \\ \vdots & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ b_m^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} y \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} z \end{matrix}$$

$$\underbrace{\overset{Q_k}{\text{orthog}}\ \overset{Q_{k-1}}{\text{orthog.}} \cdots \overset{Q_1}{\text{orthog.}}}_{=Q \text{ orthogonal}}$$

$$\Rightarrow \|A\,x - b\|^2 = \|Q(A\,x - b)\|^2$$
$$= \|R\,x - y\|^2 + \|z\|^2$$

$$R\,x = y \text{ lösbar, da } r_{11} \neq 0 \ldots r_{kk} \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} & r_{1,k+1} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & r_{kk} & r_{k,k+1} & \cdots & r_{k,n} \end{array}\right) x = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Eindeutig lösbar wenn $k = n$
$\Rightarrow$ Auflösbar nach $x_1, \cdots, x_n$

Wir erhalten nun ein (schon wohlbekanntes) Ergebnis

Satz 7.8

Seien $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, b \in \mathbb{R}^m$

Dann ist das lineare Ausgleichsproblem

$$x \in \mathbb{R}^n : ||A\,x - b|| \stackrel{!}{=} min$$

stets lösbar.

Es ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$Rang\ A = n$$

ist, d.h. Spalten linear unabhängig.

Beispiele

$$\left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rang ist maximal aber } \neq n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} - 1 \right\|_2 = min$$

Lösungen:

$$x = e^1, e^2, \cdots, e^5, \text{ sowie}$$

$$\forall\, x \text{ mit } \sum x_i = 1 \quad \square$$

Beispiele

$$\left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rang ist maximal aber } \neq n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} - 1 \right\|_2 = min$$

Lösungen:

$$x = e^1, e^2, \cdots, e^5, \text{ sowie}$$

$$\forall\, x \text{ mit } \sum x_i = 1 \quad \square$$

$$\left\| \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\|_2 = min$$

$$\begin{array}{ccc} a^1 \; a^2 & \qquad & b \end{array}$$

$$Q_1 : a^1 \rightarrow -||a^1||e^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = E - 2ww^T$$

$$\tilde{w} = a^1 - (-||a||^1 e^1)$$

$$w = \tilde{w}/||\tilde{w}||$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = min$$

$$a^1 \; a^2 \qquad\qquad b$$

$$Q_1 : a^1 \to -||a^1||e^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = E - 2ww^T$$

$$\tilde{w} = a^1 - (-||a||^1 e^1)$$

$$w = \tilde{w}/||\tilde{w}||$$

$$Q_1 = E - 2\frac{\tilde{w}\tilde{w}^T}{\tilde{w}^T\tilde{w}}$$

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1\ a^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1\ a^2 = a^2 - \frac{2}{12}\tilde{w}\ \tilde{w}^T a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = E - 2\frac{\tilde{w}\tilde{w}^T}{\tilde{w}^T\tilde{w}}$$

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1\ a^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1\ a^2 = a^2 - \frac{2}{12}\tilde{w}\ \tilde{w}^T a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = E - 2\frac{\tilde{w}\tilde{w}^T}{\tilde{w}^T\tilde{w}}$$

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1\, a^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1\, a^2 = a^2 - \frac{2}{12}\tilde{w}\, \tilde{w}^T a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$Q_1\, b = b - \frac{2}{12}\tilde{w}\,\underbrace{\tilde{w}^T b}_{=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = min \Leftrightarrow$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4/3 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\|_2 = min$$

$$Q_1\, b = b - \frac{2}{12}\tilde{w}\,\underbrace{\tilde{w}^T b}_{=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = min \Leftrightarrow$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4/3 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\|_2 = min$$

$$Q_1 b = b - \frac{2}{12} \tilde{w} \underbrace{\tilde{w}^T b}_{=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = min \Leftrightarrow$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4/3 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\|_2 = min$$

$$H_2 : \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}^2 = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} ||w^2||^2 = \frac{120}{9}$$

$$H_2 = E_3 - \frac{2}{120} \cdot 9\, \tilde{w}^2\, \tilde{w}^{2\,T}$$

$$H_2 \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} \cdot \frac{60}{9} \begin{pmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -6/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2 \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{3}{20} \frac{78}{9}}_{\frac{13}{10}} \begin{pmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60/30 \\ -6/30 \\ -12/30 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ -60/30 \\ -6/30 \\ -12/30 \end{pmatrix} \right\|_2 = min \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_2\begin{pmatrix}4/3\\2/3\\4/3\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}4/3\\2/3\\4/3\end{pmatrix}-\frac{3}{20}\cdot\frac{60}{9}\begin{pmatrix}10/3\\2/3\\4/3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-6/3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$H_2\begin{pmatrix}7/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}-\underbrace{\frac{3}{20}\frac{78}{9}}_{\frac{13}{10}}\begin{pmatrix}10/3\\2/3\\4/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-60/30\\-6/30\\-12/30\end{pmatrix}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-2&0\\0&-6/3\\0&0\\0&0\end{pmatrix}x-\begin{pmatrix}0\\-60/30\\-6/30\\-12/30\end{pmatrix}\right\|_2=min\quad\Rightarrow\quad x=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$H_2 \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \frac{3}{20} \cdot \frac{60}{9} \begin{pmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -6/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2 \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{3}{20} \frac{78}{9}}_{\frac{13}{10}} \begin{pmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60/30 \\ -6/30 \\ -12/30 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ -60/30 \\ -6/30 \\ -12/30 \end{pmatrix} \right\|_2 = min \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \stackrel{!}{=} min$$

$$A^T A\, x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weg über die Normalgleichungen also für die Handrechnung deutlich angenehmer.
Householder-Zugang aber GANZ DEUTLICH weniger rundungsfehleranfällig.

Beispiel

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \stackrel{!}{=} min$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weg über die Normalgleichungen also für die Handrechnung deutlich angenehmer.
Householder-Zugang aber GANZ DEUTLICH weniger rundungsfehleranfällig.

QR-Zerlegung

Hat $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ l.u. Spalten, so erhält man mit Householder-Matrizen

$$Q_n \cdot Q_{n-1} \cdots Q_1 \, A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Darin ist $R \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und die Q_i sind orthogonal und symmetrisch $\Rightarrow$

Satz 7.9

$$A = \underbrace{Q_1 \, Q_2 \cdots Q_n}_{Q} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{Q}_{\text{orthogonal}} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das heißt QR-Zerlegung von A.

QR-Zerlegung

Hat $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ l.u. Spalten, so erhält man mit Householder-Matrizen

$$Q_n \cdot Q_{n-1} \cdots Q_1 \, A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Darin ist $R \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und die Q_i sind orthogonal und symmetrisch $\Rightarrow$

Satz 7.9

$$A = \underbrace{Q_1 \, Q_2 \cdots Q_n}_{Q} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{Q}_{\text{orthogonal}} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das heißt QR-Zerlegung von A.

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ quadratisch (regulär)

$$\Rightarrow A = \underset{\text{orthogonal}}{Q} \; \underset{\text{Dreiecksmatrix}}{R} \; \text{(regulär)}$$

Löse $A\,x = b$ wie folgt

$$\Updownarrow$$

$$QR\,x = b \qquad Q = Q_1 \cdots Q_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\text{Löse auf}}{R\,x} = \underbrace{Q^T\,b}_{\text{rechne aus}} \qquad Q^T\,b = \underbrace{Q_n \cdots Q_1}_{\text{Kenntnis der Householder-Matrizen reicht}} \; b$$

Achtung!

QR-Zerlegung etwa doppelt so teuer wie LR-Zerlegung. QR-Zerlegung aber etwas stabiler.

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ quadratisch (regulär)

$$\Rightarrow A = \underset{\text{orthogonal}}{Q} \quad \underset{\text{Dreiecksmatrix}}{R} \quad \text{(regulär)}$$

Löse $A\,x = b$ wie folgt

$$\Updownarrow$$

$$QR\,x = b \qquad Q = Q_1 \cdots Q_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\text{Löse auf}}{R\,x} = \underbrace{Q^T\,b}_{\text{rechne aus}} \qquad Q^T\,b = \underbrace{Q_n \cdots Q_1}_{\text{Kenntnis der Householder-Matrizen reicht}} \quad b$$

Achtung!

QR-Zerlegung etwa doppelt so teuer wie LR-Zerlegung. QR-Zerlegung aber etwas stabiler.

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ quadratisch (regulär)

$$\Rightarrow A = \underset{\text{orthogonal}}{Q} \quad \underset{\text{Dreiecksmatrix}}{R} \quad \text{(regulär)}$$

Löse $A\,x = b$ wie folgt

$$\Updownarrow$$

$$QR\,x = b \qquad Q = Q_1 \cdots Q_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\text{Löse auf}}{R\,x} = \underbrace{Q^T\,b}_{\text{rechne aus}} \qquad Q^T\,b = \underbrace{Q_n \cdots Q_1}_{\text{Kenntnis der Householder-Matrizen reicht}} \quad b$$

Achtung!

QR-Zerlegung etwa doppelt so teuer wie LR-Zerlegung. QR-Zerlegung aber etwas stabiler.

Bemerkung

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär

$$||A\,x - b|| = \ min$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = A^{-1}b \text{ (Lösung von } A\,x = b\text{)}$$

$\Rightarrow$ Householder Methode auch für reguläre Gleichungssysteme möglich.

Aufwand $\approx$ zwei Mal Gauss.

Aber bei empfindlichen Gleichungssystemen besser!

Ende der 4. Vorlesung

Vorlesung 5

3. Mai + 6. Mai

Linearer Ausgleich 2

Wiederholung: Ausgleich

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \quad b \in \mathbb{R}^m.$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||A\,x - b||_2$ minimal.

Satz 7.12

Die Lösungen von $||A\,x - b|| \stackrel{!}{=} min$ sind genau die Lösungen der Normalgleichungen:

$$A^T A\,x = A^T b$$

Alternativ:

Orthogonale Transformation auf Dreiecksgestalt.

MATLAB:

`x= A\ b` löst $||A\,x - b||_2$ minimal!

Wiederholung: Ausgleich

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \quad b \in \mathbb{R}^m.$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||A\,x - b||_2$ minimal.

Satz 7.12

Die Lösungen von $||A\,x - b|| \stackrel{!}{=} min$ sind genau die Lösungen der Normalgleichungen:

$$A^T A\,x = A^T b$$

Alternativ:

Orthogonale Transformation auf Dreiecksgestalt.

MATLAB:

`x= A\ b` löst $||A\,x - b||_2$ minimal!

Wiederholung: Ausgleich

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \quad b \in \mathbb{R}^m.$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||A\,x - b||_2$ minimal.

Satz 7.12

Die Lösungen von $||A\,x - b|| \stackrel{!}{=} min$ sind genau die Lösungen der Normalgleichungen:

$$A^T A\,x = A^T b$$

Alternativ:

Orthogonale Transformation auf Dreiecksgestalt.

MATLAB:

`x= A\ b` löst $||A\,x - b||_2$ minimal!

Wiederholung: Ausgleich

Seite 223

Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \quad b \in \mathbb{R}^m.$

Gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||A\,x - b||_2$ minimal.

Satz 7.12

Die Lösungen von $||A\,x - b|| \stackrel{!}{=} min$ sind genau die Lösungen der Normalgleichungen:

$$A^T A\,x = A^T\,b$$

Alternativ:

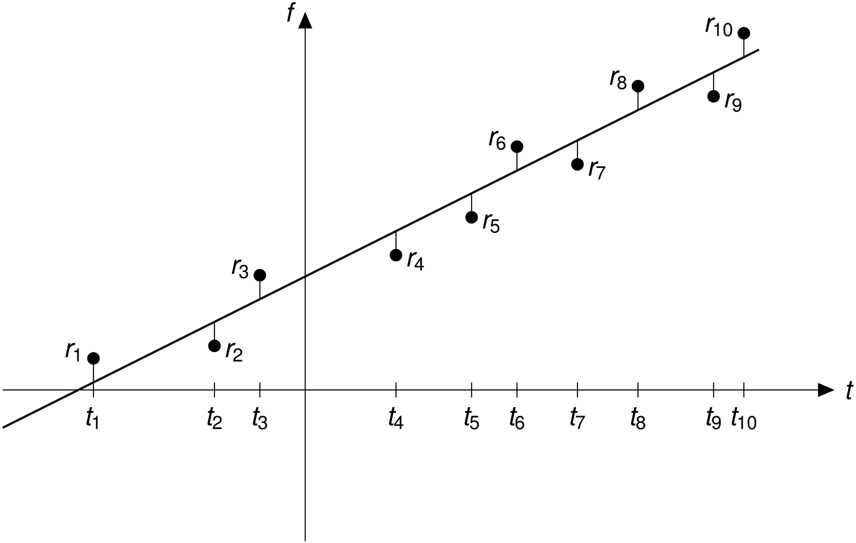
Orthogonale Transformation auf Dreiecksgestalt.

MATLAB:

`x= A\ b` löst $||A\,x - b||_2$ minimal!

Diskrete Approximation durch Ausgleich

Start mit Ausgleichgeraden



Bestimme α, β in

$$f(x) = \alpha + \beta\, t$$

durch Messungen (t_i, b_i), so dass für die Fehler

$$r_i = \alpha + \beta\, t_i - b_i$$

gilt

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}_{\text{„Methode der kleinsten Fehlerquadrate"}} \stackrel{!}{=} min \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - b \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

ist eindeutig lösbar, wenn die Matrix *Rang* 2 hat.

Dies ist genau dann der Fall, wenn unter den t_i-Werten zwei verschiedene sind.

(Man wird nie nur für einen t-Wert messen.)

Denn: Seien dies o.E. $t_1 \neq t_2$

Dann ist in

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ \vdots & \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{vmatrix} = t_2 - t_1 \neq 0$$

Seite 239

Lösung von

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - b \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

über die Normalgleichungen

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > \\ < a^2, a^1 > & < a^2, a^2 > \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} < a^1, b > \\ < a^2, b > \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_i \\ \sum_{i=1}^n t_i\, b_i \end{pmatrix}$$

Lösung von

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - b \right\|_2 \overset{!}{=} min$$

über die Normalgleichungen

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > \\ < a^2, a^1 > & < a^2, a^2 > \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} < a^1, b > \\ < a^2, b > \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_i \\ \sum_{i=1}^n t_i\, b_i \end{pmatrix}$$

Seite 239

Lösung von

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - b \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

über die Normalgleichungen

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > \\ < a^2, a^1 > & < a^2, a^2 > \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} < a^1, b > \\ < a^2, b > \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_i \\ \sum_{i=1}^n t_i \, b_i \end{pmatrix}$$

Seite 239

Lösung von

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - b \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

über die Normalgleichungen

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} < a^1, a^1 > & < a^1, a^2 > \\ < a^2, a^1 > & < a^2, a^2 > \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} < a^1, b > \\ < a^2, b > \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_i \\ \sum_{i=1}^n t_i\, b_i \end{pmatrix}$$

Cramer ⇒

$$\alpha = x_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \sum_{i=1}^{n} t_i \, b_i \sum_{i=1}^{n} t_i \right) / det$$

$$\beta = x_2 = \left(n \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i \, b_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} b_i \right) / det$$

$$\text{mit } det = n \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^2$$

⇒ Kopfschmerzen.

MATLAB

Spaltenvektor `t` enthalte die *t*-Werte, Spaltenvektor `b` die Messwerte. Dann liefert

```
A=[ones(size(t)), t]; x= A\b; alpha=x(1); beta=x(2);
```

die Lösung.

Cramer $\Rightarrow$

$$\alpha = x_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \sum_{i=1}^{n} t_i \, b_i \sum_{i=1}^{n} t_i \right) / det$$

$$\beta = x_2 = \left(n \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i \, b_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} b_i \right) / det$$

$$\text{mit } det = n \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^2$$

$\Rightarrow$ Kopfschmerzen.

MATLAB

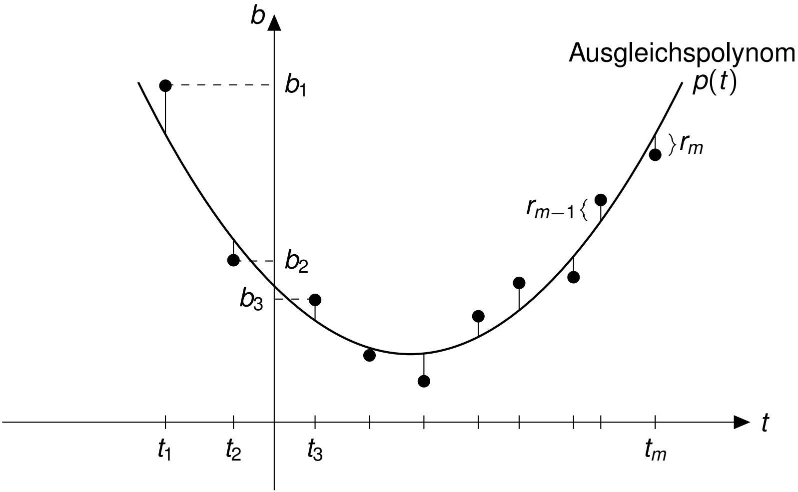
Spaltenvektor `t` enthalte die *t*-Werte, Spaltenvektor `b` die Messwerte. Dann liefert

```
A=[ones(size(t)), t]; x= A\b; alpha=x(1); beta=x(2);
```

die Lösung.

Verallgemeinerung der Ausgleichsgerade

Seite 223



$$\sum_{i=1}^{m} r_i^2 \stackrel{!}{=} min$$ Fehlerquadratsumme minimal!!

Ansatz:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, t^i$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right\|_2 \overset{!}{=} min$$

$$\mathit{Rang} \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{bmatrix} = n+1 = \text{ Anzahl Spalten.}$$

$$\Rightarrow \text{ Mindestforderung } m \geq n+1$$

(Mindestens so viele (m) Messungen wie Unbekannte $\underbrace{a_0, a_1, \cdots, a_n}_{n+1}$)

Behauptung

Sind die t_i alle verschieden, so reicht das!

$$\mathit{Rang}\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{bmatrix} = n+1 = \text{ Anzahl Spalten.}$$

$$\Rightarrow \text{ Mindestforderung } m \geq n+1$$

(Mindestens so viele (m) Messungen wie Unbekannte $\underbrace{a_0, a_1, \cdots, a_n}_{n+1}$)

Behauptung

Sind die t_i alle verschieden, so reicht das!

Satz

Gegeben $(t_j, b_j) \in \mathbb{R}^2; j = 1, \cdots, m$ mit $t_i \neq t_j$ bei $i \neq j$
Dann gibt es für jedes $n < m$ genau ein Polynom

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, t^j$$

welches unter allen Polynomen in Π_n das Funktional

$$\sum_{i=1}^{m} (p(t_i) - b_i)^2 \text{ minimiert.}$$

Beweis

Wir zeigen: Die Spalten von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_m & \cdots & t_m^n \end{bmatrix} \text{ sind linear unabhängig.}$$

Weil $m \geq n+1$, ist die Vandermondesche Matrix

$$V_n := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

in den ersten $n+1$ Zeilen von A enthalten. Es ist aber schon bekannt

Beweis

Wir zeigen: Die Spalten von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_m & \cdots & t_m^n \end{bmatrix} \text{ sind linear unabhängig.}$$

Weil $m \geq n+1$, ist die Vandermondesche Matrix

$$V_n := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

in den ersten $n+1$ Zeilen von A enthalten. Es ist aber schon bekannt

LEMMA

$$\det V_n = \prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n+1} (t_j - t_i) \qquad \square$$

Spezialfall

Für $m = n + 1$ ist:

$$\left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{\text{Quadratisch, regulär}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - b \right\|_2 = min$$

$$\Leftrightarrow$$

äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} a = b$$

Also $\exists!$ Polynom p in Π_n, das an $(n+1)$ paarweise verschiedenen Stellen $t_1, \cdots, t_{n+1}$ vorgegebene Werte annimmt.
Dies Polynom heißt INTERPOLATIONSPOLYNOM

Berechnung: Später! Nicht über das Gleichungssystem !!

Spezialfall

Für $m = n + 1$ ist:

$$\left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{\text{Quadratisch, regulär}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - b \right\|_2 = min$$

$$\Leftrightarrow$$

äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} a = b$$

Also $\exists!$ Polynom p in Π_n, das an $(n+1)$ paarweise verschiedenen Stellen $t_1, \cdots, t_{n+1}$ vorgegebene Werte annimmt.
Dies Polynom heißt INTERPOLATIONSPOLYNOM

Berechnung: Später! Nicht über das Gleichungssystem !!

Spezialfall

Für $m = n + 1$ ist:

$$\left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{\text{Quadratisch, regulär}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - b \right\|_2 = min$$

$$\Leftrightarrow$$

äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} a = b$$

Also $\exists!$ Polynom p in Π_n, das an $(n+1)$ paarweise verschiedenen Stellen $t_1, \cdots, t_{n+1}$ vorgegebene Werte annimmt.

Dies Polynom heißt INTERPOLATIONSPOLYNOM

Berechnung: Später! Nicht über das Gleichungssystem !!

Spezialfall

Für $m = n + 1$ ist:

$$\left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{\text{Quadratisch, regulär}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - b \right\|_2 = min$$

$$\Leftrightarrow$$

äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} a = b$$

Also $\exists!$ Polynom p in Π_n, das an $(n+1)$ paarweise verschiedenen Stellen $t_1, \cdots, t_{n+1}$ vorgegebene Werte annimmt.
Dies Polynom heißt INTERPOLATIONSPOLYNOM

Berechnung: Später! Nicht über das Gleichungssystem !!

Allgemeiner Ausgleich

Finde zu m Daten

$$(t_j, b_j), j = 1, \cdots, m$$

$t_j \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, paarweise verschieden, eine Funktion $(n \leq m)$

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \phi_k(t),\ x_k \text{ variabel}$$

mit

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t_1) - b_1 \\ \vdots \\ \phi(t_m) - b_m \end{pmatrix} \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

Allgemeiner Ausgleich

Finde zu m Daten

$$(t_j, b_j), j = 1, \cdots, m$$

$t_j \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, paarweise verschieden, eine Funktion ($n \leq m$)

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \phi_k(t), x_k \text{ variabel}$$

mit

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t_1) - b_1 \\ \vdots \\ \phi(t_m) - b_m \end{pmatrix} \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t_1) - b_1 \\ \vdots \\ \phi(t_m) - b_m \end{pmatrix} \right\|_2 \stackrel{!}{=} min$$

lautet ausgeschrieben

$$min \stackrel{!}{=} \left\| \begin{pmatrix} \phi_1(t_1)x_1 & +\phi_2(t_1)x_2 & +\cdots+ & \phi_n(t_1)x_n - b_1 \\ \phi_1(t_2)x_1 & +\phi_2(t_2)x_2 & +\cdots+ & \phi_n(t_2)x_n - b_2 \\ \vdots & & & \\ \phi_1(t_m)x_1 & +\phi_2(t_m)x_2 & +\cdots+ & \phi_n(t_m)x_n - b_m \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$\text{oder } \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_2(t_1) & \cdots & \phi_n(t_1) \\ \vdots & & & \\ \phi_1(t_m) & \phi_2(t_m) & \cdots & \phi_n(t_m) \end{pmatrix}} x - b \right\|_2 = min$$

wenn Spalten l.u.
so ist das Problem eindeutig lösbar

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t_1) - b_1 \\ \vdots \\ \phi(t_m) - b_m \end{pmatrix} \right\|_2 \overset{!}{=} min$$

lautet ausgeschrieben

$$min \overset{!}{=} \left\| \begin{pmatrix} \phi_1(t_1)x_1 & +\phi_2(t_1)x_2 & +\cdots+ & \phi_n(t_1)x_n - b_1 \\ \phi_1(t_2)x_1 & +\phi_2(t_2)x_2 & +\cdots+ & \phi_n(t_2)x_n - b_2 \\ \vdots & & & \\ \phi_1(t_m)x_1 & +\phi_2(t_m)x_2 & +\cdots+ & \phi_n(t_m)x_n - b_m \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$\text{oder} \quad \Bigg\| \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_2(t_1) & \cdots & \phi_n(t_1) \\ \vdots & & & \\ \phi_1(t_m) & \phi_2(t_m) & \cdots & \phi_n(t_m) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{wenn Spalten l.u.} \\ \text{so ist das Problem eindeutig lösbar}}} x - b \Bigg\|_2 = min$$

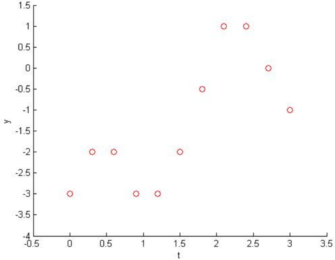
Beispiel

$$\phi(t) = x_1 \sin(3t) + x_2 \cos(3t) + x_3 e^{-t}$$

$\uparrow x_1, x_2, x_3$ zu bestimmen

aus Messungen

```
t = [ 0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1, 2.4, 2.7, 3]'
y = [ -3, -2, -2, -3, -3, -2, -0.5, 1, 1, 0, -1]'
```



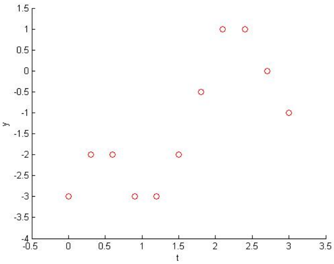
Beispiel

$$\phi(t) = x_1 \sin(3t) + x_2 \cos(3t) + x_3 e^{-t}$$

$\uparrow x_1, x_2, x_3$ zu bestimmen

aus Messungen

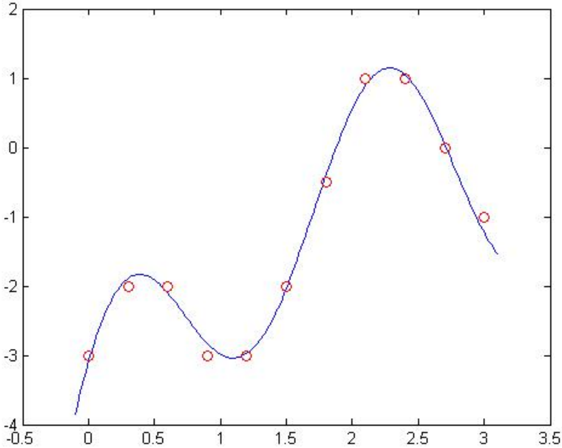
```
t = [ 0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1, 2.4, 2.7, 3]'
y = [ -3, -2, -2, -3, -3, -2, -0.5, 1, 1, 0, -1]'
```



```
A= [ sin(3*t), cos(3*t), exp(-t)]
rank(A)
x = A\y
```

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.7833 & 0.6216 & 0.7408 \\ 0.9738 & -0.2272 & 0.5488 \\ 0.4274 & -0.9041 & 0.4066 \\ -0.4425 & -0.8968 & 0.3012 \\ -0.9775 & -0.2108 & 0.2231 \\ -0.7728 & 0.6347 & 0.1653 \\ 0.0168 & 0.9999 & 0.1225 \\ 0.7937 & 0.6084 & 0.0907 \\ 0.9699 & -0.2435 & 0.0672 \\ 0.4121 & -0.9111 & 0.0498 \end{pmatrix}; ans = 3; x = \begin{pmatrix} 0.7328 \\ 1.4354 \\ -4.5315 \end{pmatrix}$$

```
tt= linspace(-0.1, 3.1),210);
AA= [ sin(3*tt), cos(3*tt), exp(-tt)];
yy= AA*x;
plot(tt,yy); plot(t,y,'or')
```



Tschebyscheff-Systeme

Anmerkung

Sind bei einem Funktionensystem $\phi_1, \cdots, \phi_n$ für beliebig verschiedene n Punkte $t_1, \cdots, t_n \in [a, b]$ stets

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t_1) \\ \vdots \\ \phi_1(t_n) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \phi_n(t_1) \\ \vdots \\ \phi_n(t_n) \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig,}$$

so heißt $\phi_1, \cdots, \phi_n$
ein TSCHEBYSCHEFF-SYSTEM auf $[a, b]$.

Es gibt dicke Bücher über Tschebyscheff-Systeme!!

Ende der 5. Vorlesung