Vorlesung 1

5. April + 8. April

Basiswechsel

Wiederholung: Matrixdarstellung,

Rotkäppchens Diätplan

	Ananas	Wein	Orangen	Sahne
Preis	2.00	8	0.50	1.39
Fett	0.02	0.01	0.05	30
Zucker	200	30	15	1

Korb mit:

$$\begin{array}{r} \textit{Ananas} \\ \textit{Wein} \\ \textit{Orangen} \\ \textit{Sahne} \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{lllllllll} 2\cdot 2.00 & + & 1\cdot 8 & + & 3\cdot 0.5 & + & 2\cdot 1.39 & & P \\ 2\cdot 0.02 & + & 1\cdot 0.01 & + & 3\cdot 0.05 & + & 2\cdot 30 & & F \\ 2\cdot 200 & + & 1\cdot 30 & + & 3\cdot 15 & + & 2\cdot 1 & & Z \end{array}$$

Seite 125

$$\begin{array}{ccc} \text{Vektorraum} & \text{lin. Abbildung} & \text{Vektorraum} \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{W} \\ \{v^1, \cdots, v^n\} & & \{w^1, \cdots, w^m\} \\ \text{Basis von V} & & \text{Basis von W} \end{array}$$

Aus $\mathcal{A}v^j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w^i$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$

und $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j \in \mathcal{V}$ folgt für die y_i's in $\mathcal{A}(v) = \sum_{i=1}^{m} y_i w^i$

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j v^j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \mathcal{A}(v^j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w^i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\overbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}^{y_i}\Big) w^i$$

Seite 125

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j v^j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \mathcal{A}(v^j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w^i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) w^i$$

Also kann die Abbildung

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j \quad \xrightarrow{\mathcal{A}} \quad w := \mathcal{A}(v) = \sum_{i=1}^{m} y_i w^i$$

in den Koeffizientenvektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ einfach geschrieben werden als

$$y = Ax.$$

Seite 189

A. Matrixdarstellung & Basiswechsel

Vektorraum	lin. Abbildung	Vektorraum
$\mathcal{V}$	$\xrightarrow{\mathcal{A}}$	$\mathcal{W}$
$\{v^1, \cdots, v^n\}$		$\{w^1, \cdots, w^m\}$
Basis von $\mathcal{V}$		Basis von $\mathcal{W}$

$$\mathcal{A}v^j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w^i \text{ mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$$

Neue Basen

$\{\tilde v_1, \cdots, \tilde v_n\}$ $\qquad$ $\{\tilde w_1, \cdots, \tilde w_m\}$

$$\mathcal{A}\tilde v^j = \textstyle\sum_{i=1}^{m} \tilde a_{ij}\, \tilde w^i$$

$\tilde A$ berechenbar aus A?

Einfachster Fall

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^n \qquad\qquad \mathcal{W} = \mathbb{R}^m$$

$$V := (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \text{ regulär} \qquad W := (w^1, \ldots, w^m) \in \mathbb{R}^{(m,m)}, \text{ regulär}$$

$$\tilde V := (\tilde v^1, \ldots, \tilde v^n) \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \text{ regulär} \qquad \tilde W := (\tilde w^1, \ldots, \tilde w^m) \in \mathbb{R}^{(m,m)}, \text{ regulär}$$

$$Vx = v = \tilde V \tilde x \qquad\qquad Wy = w = \tilde W \tilde y$$

$y = Ax$ bekannt.

$\tilde y = \tilde A \tilde x$ gesucht.

$$\tilde y = \tilde W^{-1}\, \overbrace{W\, \underbrace{A\, \overbrace{V^{-1}\, \underbrace{\tilde V \tilde x}_{v}}^{x}}_{y}}^{w}$$

Beispiel

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)} \qquad W := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$$

$$\tilde V := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)} \qquad \tilde W := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$$

$$Vx = v = \tilde V \tilde x \qquad\qquad Wy = w = \tilde W \tilde y$$

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$\tilde A = \tilde W^{-1} W A V^{-1} \tilde V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Test: $\tilde A v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot w_1$

Nächst schwierigerer Fall

Eben hatten wir

$$\tilde A \tilde x = \overbrace{\tilde W^{-1} W}^{\tilde y \leftarrow y} A\, \underbrace{V^{-1} \tilde V}_{x \leftarrow \tilde x}\, \tilde x$$

Nun nehmen wir an:

$$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p,\ p \ge n \qquad\qquad \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^q,\ q \ge m$$

$$V := (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^{(p,n)}, \text{ Rang } n \qquad W := (w^1, \ldots, w^m) \in \mathbb{R}^{(q,m)}, \text{ Rang } m$$

$$\tilde V := (\tilde v^1, \ldots, \tilde v^n) \in \mathbb{R}^{(p,n)}, \text{ Rang } n \qquad \tilde W := (\tilde w^1, \ldots, \tilde w^m) \in \mathbb{R}^{(q,m)}, \text{ Rang } m$$

$$Vx = v = \tilde V \tilde x \qquad\qquad Wy = w = \tilde W \tilde y$$

$y = Ax$ bekannt. $\quad \tilde y = \tilde A \tilde x$ gesucht.

Achtung: V, $\tilde V$, W, $\tilde W$ sind nicht mehr invertierbar. Obige Formel tut's nicht mehr.

Aber in

$$\tilde{A}\tilde{x} = \overbrace{\tilde{W}^{-1} W}^{\tilde{y} \leftarrow y} A \underbrace{V^{-1}\tilde{V}}_{x \leftarrow \tilde{x}} \tilde{x}$$

brauchen wir ja auch nur Operatoren, die $\tilde{x}$ in x transformieren und y in $\tilde{y}$.

Und die erhalten wir so:

Weil die Spalten von V und die Spalten von $\tilde{V}$ Basisvektoren von $\mathcal{V}$ enthalten, gibt es eine reguläre (m, m)-Matrix S mit

$$\tilde{V} = VS.$$

Indem wir $\tilde{x}$ dahinter schreiben

$$\tilde{V}\tilde{x} = VS\tilde{x} \quad (= Vx),$$

sehen wir, dass

$$x = S\tilde{x}.$$

Analog zu

$$\tilde{V} = VS \qquad \Rightarrow x = S\tilde{x}$$

gilt

$$\tilde{W} = WR \qquad \Rightarrow y = R\tilde{y}$$

Und damit erhalten wir nun

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{y} = [\tilde{y} \leftarrow y]\, A\, [x \leftarrow \tilde{x}]\, \tilde{x} = R^{-1}AS\tilde{x}.$$

Beispiel

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V} = V \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \qquad \tilde{W} = WR;\ \text{also } R = W^{-1}.$$

$$\tilde{A} = R^{-1}AS = WAS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Probe: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \tilde{V}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $\tilde{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. - OK

Frage

Wie berechnet man S in $VS = \tilde{V}$?
Antwort: Notfalls mit Gauß-Elimination. (Demonstration an letztem Beispiel.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Löse zwei Gleichungssysteme (für die erste und zweite Spalte von S) simultan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Löse nun

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf zu

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allgemeiner Fall

$$\begin{array}{ccc} \text{Vektorraum} & \text{lin. Abbildung} & \text{Vektorraum} \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{W} \\ \{v^1,\cdots,v^n\} & & \{w^1,\cdots,w^m\} \\ \{\tilde v^1,\cdots,\tilde v^n\} & & \{\tilde w^1,\cdots,\tilde w^m\} \\ \text{Basen von } \mathcal{V} & & \text{Basen von } \mathcal{W} \end{array}$$

Die Beziehungen

$$Vx = v = \tilde V \tilde x \qquad Wy = w = \tilde W \tilde y$$

und

$$\tilde V = VS \qquad \tilde W = WR$$

müssten eigentlich anders geschrieben werden.
Die beiden letzten lauten z.B.

$$\tilde v_j = \sum_{i=1}^n v^i s_{ij}, \quad j = 1,\ldots,n \qquad \tilde w_j = \sum_{i=1}^m w^i r_{ij}, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Die Matrizen S und R gehen aber wie oben in die Transformation ein:

$$\tilde A = R^{-1}AS.$$

Beispiel: $\mathcal{V} \subset \Pi_2, \mathcal{W} = T_1$

$$v^1(x) = x + x^2 \qquad w^1(x) = \sin(x) + \cos(x)$$
$$v^2(x) = x + 2x^2 \qquad w^2(x) = 2\sin(x) - \cos(x) + 1 \;,$$
$$w^3(x) = 2 + \sin(x)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde v^1(x) = x, \qquad \tilde w^1(x) = 1,$$
$$\tilde v^2(x) = x^2 \qquad \tilde w^2(x) = \sin(x),$$
$$\tilde w^3(x) = \cos(x).$$

Praktische Schlamp-Schreibweise:

$$(v^1, v^2) = (\tilde v^1, \tilde v^2)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{S^{-1}}, \quad (w^1, w^2, w^3) = (\tilde w^1, \tilde w^2, \tilde w^3)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{R^{-1}}.$$

$$\tilde A = R^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Abschließendes Beispiel

Für

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$

ist bekannt

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

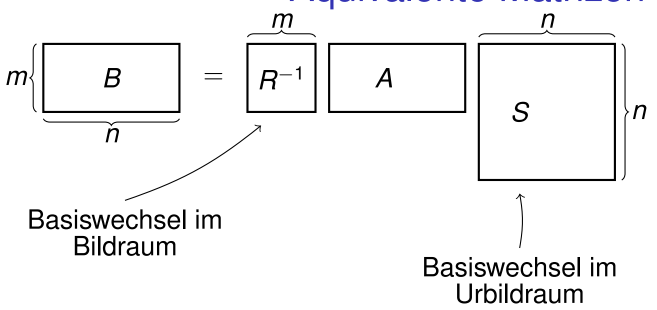
$$VS = \tilde V = E_3 \qquad E_2 = \tilde W = WR$$
$$\Rightarrow S = V^{-1} \qquad \Rightarrow R = W^{-1}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \tilde A &= R^{-1}AS = WAV^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Test!)

Äquivalente Matrizen



Definition 6.6

$A, B \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ sind äquivalent, wenn $\exists$

$$\underbrace{R \in \mathbb{R}^{(m,m)}, S \in \mathbb{R}^{(n,n)}}_{\text{beide regulär}}$$

so dass $B = R^{-1}\, A\, S$

Beschreiben dieselbe Abbildung bzgl. verschiedener Basen.

Normalform

Frage

Gibt es eine besonders einfache äquivalente Matrix zu $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$?

Ja

$A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ habe Rang r

$(r \leq min(m, n))$

$$\Rightarrow$$

A äquivalent zu

$$D_r := \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{Normalform von } A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$$

Folgerung

$$\left.\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\right\} \in \mathbb{R}^{(m,n)} \text{ äquivalent } \Leftrightarrow Rang\ A = Rang\ B$$

Wichtiger Spezialfall: Ähnliche Matrizen

$$V \xrightarrow{T} V \quad dim\ V = n$$

Normal: Verwende in Urbild- und Bildraum gleiche Basis. Darstellung durch Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

Normal: Bei Basis-Wechsel wird man im Bild- und Urbildraum wieder die gleiche Basis wollen.

Übergang:

$$\underbrace{B = S^{-1}\, A\, S}$$

Definition 6.7: A und B heißen ähnlich. (Wichtig!)

Ende der 1. Vorlesung

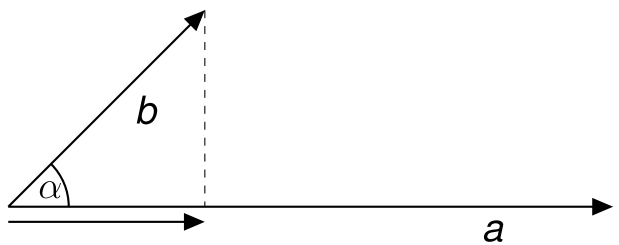
Vorlesung 2

12. April + 16. April

Orthogonale Projektionen

Wiederholung /Fourierentwicklung:

Folie zum Übers-Bett-Hängen



Projektion von b auf a-Richtung

$$= a \cdot \frac{\langle a, b\rangle}{|a| \cdot |a|} = a \cdot \frac{\langle a, b\rangle}{\langle a, a\rangle} = \frac{aa^T}{a^T a} b$$

Seite 86

Orthonormalbasen sind schön!

$\{v^1, \cdots, v^n\}$ ONB von $(V, \langle , \rangle)$.

$v^1, \cdots, v^n$ Basis $\Rightarrow \quad \forall\, x\, \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \, : \, x = \sum_{i=1}^n x_i\, v^i$.

Wie berechnet man x_i ?

$$\begin{aligned} \langle v^j, x\rangle &= \langle v^j, \sum_{i=1}^n x_i\, v^i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\langle v^j, v^i\rangle}_{=\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \delta_{ij} = x_j \end{aligned}$$

$x_j = \langle v^j, x\rangle$ Satz 2.58

Seite 86

$$\begin{array}{rcccccccc}
v & = & \alpha_1\, v_1 & + & \alpha_2\, v_2 & + & \cdots & + & \alpha_n\, v_n \\
\langle v_1, v\rangle & = & \langle v_1, \alpha_1\, v_1 & + & \alpha_2\, v_2 & + & \cdots & + & \alpha_n\, v_n\rangle \\
\langle v_1, v\rangle & = & \alpha_1\underbrace{\langle v_1, v_1\rangle}_{=1} & + & \alpha_2\underbrace{\langle v_1, v_2\rangle}_{=0} & + & \ldots & + & \alpha_n\underbrace{\langle v_1, v_n\rangle}_{=0}
\end{array}$$

also $\langle v_1, v\rangle = \alpha_1$.

Seite 86

Satz 2.58

$v_1, \ldots, v_n$ Orthonormalbasis.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i \quad , \quad \alpha_j = \langle v_j, v\rangle$$

also

$$\underbrace{v = \sum_{i=1}^{n} v_i \langle v_i, v\rangle}_{\text{„Fourierentwicklung“}}$$

$v_1, \ldots, v_n$ Orthonormalbasis, $m < n$

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} v_i \langle v_i, v\rangle}_{\in W := \text{span}\{v_1, \ldots, v_m\}} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n} v_i \langle v_i, v\rangle}_{\text{span}\{v_{m+1}, \ldots, v_n\} \perp W}$$

Seite 202

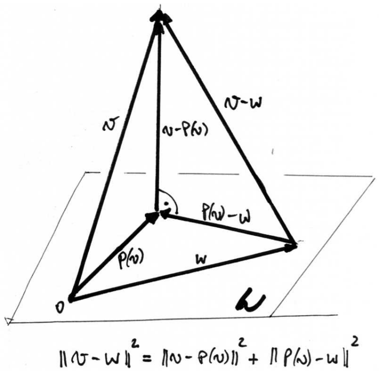
Orthogonale Projektion und beste Approximation im unendlichdimensionalen Raum

$(V, <,>)$ sei euklidischer Vektorraum.

Approximationsproblem

Sei W endlichdimensionaler Teilraum von V. Sei $v \in V$ gegeben. Bestimme $\tilde{v} \in W$ mit

$$||\tilde{v} - v|| \leq ||w - v|| \quad \forall w \in W$$



Wie man vermutet, ist

$\tilde{v} = P(v)$ die orthogonale Projektion von v auf W.

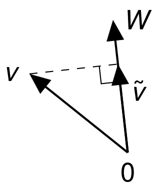
Das soll jetzt festgemacht werden.

Ablauf der heutigen Vorlesung:

- Definiere Projektion auf endlichdimensionalen Teilraum W.
- Zeige Projektion = Beste Approximation
- Berechnung der Projektion
  - Orthonormalisiere Basis
  - Gramsches System
  - Normalgleichungen
- Zwei Anwendungen
- Projektoren
- Orthogonalraum

Seite 202

Satz 6.10 (Projektionssatz)



$(V, <,>)$ sei euklidischer Vektorraum, W endlichdimensionaler Teilraum. Dann hat jedes $v \in V$ eine eindeutige Zerlegung

$$v = w + u \text{ mit } w \in W \;\&\; u \perp W$$

Beweis

Sei $\{w^1, \cdots, w^m\}$ Orthonormalbasis von W. Wir versuchen unser Glück mit

$$w := \sum_{j=1}^{m} < v, w^j > w^j \quad \text{und} \quad u := v - w$$

Dann ist sicher $w = \sum_{j=1}^{m} < v, w^j > w^j \quad \in W$ klar.
Es ist aber auch $u := v - w$ senkrecht zu W, denn für $k = 1, \ldots, m$ ist

$$\begin{aligned} < u, w^k > &= < v - w, w^k > = < v, w^k > - < w, w^k > \\ &= < v, w^k > - \sum_{j=1}^{m} < v, w^j > \underbrace{< w^k, w^j >}_{\delta_{kj}} \\ &= < v, w^k > - < v, w^k > = 0 \end{aligned}$$

Also ist $v = u + w$ eine Zerlegung wie gewünscht. Fehlt noch Eindeutigkeit.
Sei $v = \tilde{w} + \tilde{u}, \tilde{w} \in W, \tilde{u} \perp W$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{w} + \tilde{u} = w + u \Rightarrow \underbrace{\tilde{w} - w}_{\in W} = \underbrace{u - \tilde{u}}_{\perp W} \\ ||w - \tilde{w}||^2 = < w - \tilde{w}, w - \tilde{w} > \\ = < w - \tilde{w}, \tilde{u} - u > = 0 \Rightarrow w = \tilde{w} \end{array}\right\} \Rightarrow u = \tilde{u} \quad \square$$

Seite 203

$v = w + u, w \in W, u \perp W$ Zerlegung eindeutig!

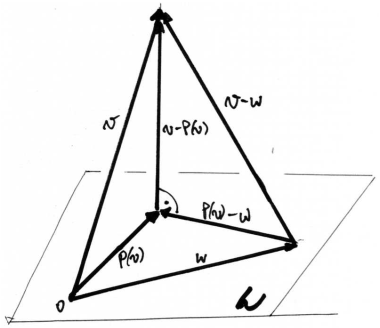
Definition 6.11

$w \stackrel{Def.}{=}$ Orthogonale Projektion $P(v)$ von v auf W.

$P(v)$ ist das eindeutige Element in W, mit dem $v - P(v)$ senkrecht auf W steht.

Seite 204

Damit ist die Geometrie in



$\|v-w\|^2 = \|v-P(v)\|^2 + \|P(v)-w\|^2$

gesichert, und wir haben somit gezeigt, den

Satz 6.16 (Approximationssatz)

Sei $(V, <,>)$ eukl. Vektorraum, W endlichdimensionaler Teilraum und P die orthogonale Projektion auf W. Dann ist $P(v)$ für alle $v \in V$ die eindeutig beste Approximation von v aus W:

$$||v - P(v)|| < ||v - w|| \forall\, w \in W, w \neq P(v)$$

Seite 204

Weitere Wiederholung

Satz von Pythagoras

Für alle $u, w \in V$ mit $< u, w >= 0$ gilt

$$\|u\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$$

Beweis

Ganz einfach:

$$||u + w||^2 =< u + w, u + w >=< u, u > + \underbrace{2 < u, w >}_{=0} + < w, w >$$

Zusammenfassung:

Pythagoras

Pythagoras

$$\|u + w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$$

gilt, wenn die Norm über

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle,$$

mit dem innerem Produkt verbunden ist.

Beste Approximation mit Pythagoras

„Beste Approximation„ $=$ „Projektion“

wenn Pythagoras gilt.

Beste Approximation ohne Pythagoras

Schnellster Weg in Unterraum ohne Pythagoras ist schwieriger zu finden.

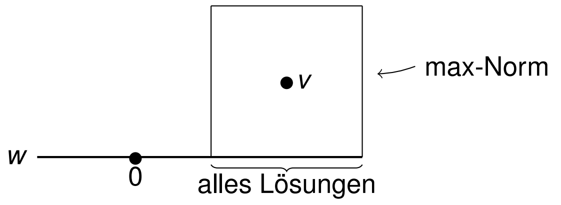
Seite 205

Bemerkung 6.17

Approximationsproblem

$$w^* \stackrel{?}{=} arg\ min\,\{||v-w||\,\big|w\ \in\ W\}$$

ist auch sinnvoll im allgemeinen normierten Raum.
Eine beste Approximation existiert für endlichdim. W ($\Leftarrow$ Analysis)
Aber die Lösung ist oft nicht eindeutig und i.A. keine Projektion.



Seite 203

Berechnung von $P(v)$:

Anmerkung 6.12

Ist $\{w^1,\cdots,w^m\}$ irgendeine Orthonormalbasis von W, so ist

$$P(v)=\sum_{j=1}^{m} <v,w^j>w^j.$$

Bemerkung 6.14

Sei $\{w^1,\cdots,w^m\}$ beliebige Basis von W. Dann hat $P(v)$ eine eindeutige Darstellung

$$P(v)=\sum_{j=1}^{m}\zeta_j\,w^j$$

und $P(v)$ erfüllt

$$v-P(v)\perp\ w\quad\forall\, w\ in\ W$$

$$v-P(v)\perp\ w\quad\forall\, w\ in\ W$$

$$\Leftrightarrow\quad \langle w^i, v-P(v)\rangle=0\quad i=1,\cdots,m$$

$$\Leftrightarrow\quad <w^i, v-\sum_{j=1}^{m}\zeta_j\,w^j>=0\quad ,i=1,\cdots,m$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{j=1}^{m}\zeta_j<w^i,w^j>=<w^i,v>, i=1,\cdots,m$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} <w^1,w^1> & \cdots & <w^1,w^m> \\ \vdots & & \\ <w^m,w^1> & \cdots & <w^m,w^m> \end{pmatrix}}_{\text{regulär, wenn } w^1,\ldots,w^m \text{ linear unabhängig.}}\zeta=\begin{pmatrix} <w^1,v> \\ \vdots \\ <w^m,v> \end{pmatrix}$$

Seite 204

Definition 6.15

Sei $(V,<,>)$ eukl. Vektorraum und $w^1,\cdots,w^m\ \in\ V$ Dann heißt

$$G(w^1,\cdots,w^m):=\begin{pmatrix} <w^1,w^1> & \cdots & <w^1,w^m> \\ \vdots & & \\ <w^m,w^1> & \cdots & <w^m,w^m> \end{pmatrix}$$

Gramsche Matrix zu $w^1,\cdots,w^m$

LEMMA:

$G(w^1,\cdots,w^m)$ ist regulär $\Leftrightarrow$ $\{w^1,\cdots,w^m\}$ sind linear unabhängig.

LEMMA:

$G(w^1,\cdots,w^m)$ ist regulär $\Leftrightarrow$ $\{w^1,\cdots,w^m\}$ sind linear unabhängig.

Beweis:
Sei G regulär. Ist dann $\sum \zeta_i w^i = 0$, so ist

$$0 = \begin{pmatrix} \langle w^1, \sum \zeta_i w^i\rangle \\ \langle w^2, \sum \zeta_i w^i\rangle \\ \vdots \\ \langle w^m, \sum \zeta_i w^i\rangle \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{pmatrix}$$

also $(\zeta_1,..,\zeta_m)^T = 0$, mithin $w^1,\ldots,w^m$ l.u..
Sei umgekehrt G singulär. Dann gibt es $\zeta := (\zeta_1,\ldots,\zeta_m)^T \neq 0$ mit $G\zeta = 0$.
Daher ist

$$\left\|\sum \zeta_i w^i\right\|^2 = \langle \sum \zeta_i w^i, \sum \zeta_j w^j\rangle = \zeta^T G \zeta = 0,$$

also $\sum \zeta_i w^i = 0$, so dass die w^i-Vektoren linear abhängig sind. $\square$

Spezialfall 1:

$w^1,...,w^m, v \in \mathbb{R}^n$; $(w^1,\ldots,w^m) =: A \in \mathbb{R}^{(n,m)}$, inneres Produkt = euklidisches Produkt.
Dann schreibt sich das Approximationsproblem so:

Minimiere $\|A\zeta - v\|_2$ bezüglich ζ.

Das Gramsche System

$$\begin{pmatrix} < w^1, w^1 > & \cdots & < w^1, w^m > \\ \vdots & & \\ < w^m, w^1 > & \cdots & < w^m, w^m > \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} < w^1, v > \\ \vdots \\ < w^m, v > \end{pmatrix}$$

wird zu

$$A^T A\zeta = A^T v \quad \text{(Sogenannte Normalgleichungen)},$$

und die Projektion $P(v) = \sum w^i \zeta_i = A\zeta$ hat die Form

$$P(v) = A(A^T A)^{-1} A^T v.$$

(Dies ist im Skript als Satz 6.20 aufgeschrieben.)

Spezialfall 2:

$w^1,...,w^m$ orthogonal.

Dann wird die Gramsche Matrix im System

$$\begin{pmatrix} < w^1, w^1 > & \cdots & < w^1, w^m > \\ \vdots & & \\ < w^m, w^1 > & \cdots & < w^m, w^m > \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} < w^1, v > \\ \vdots \\ < w^m, v > \end{pmatrix}$$

zur Diagonalmatrix.
Es werden

$$\zeta_i = \frac{< w^i, v >}{< w^i, w^i >}$$

und

$$P(v) = \sum w^i \zeta_i = w^1 \frac{< w^1, v >}{< w^1, w^1 >} + \ldots + w^m \frac{< w^m, v >}{< w^m, w^m >}.$$

Seite 204

Spezialfall 3:

In

$$P(v) = w^1 \frac{< w^1, v >}{< w^1, w^1 >} + \ldots + w^m \frac{< w^m, v >}{< w^m, w^m >}.$$

seien

$w^1,...,w^m \in \mathbb{R}^n$ orthogonal bezüglich euklid. Produkt $\langle w^i, w^j\rangle = (w^i)^T w^j$.

Dann wird

$$P(v) = \underbrace{\left(\frac{w^1(w^1)^T}{(w^1)^T w^1} + \ldots + \frac{w^m(w^m)^T}{(w^m)^T w^m}\right)}_{\text{Summe dyadischer Produkte}} v$$

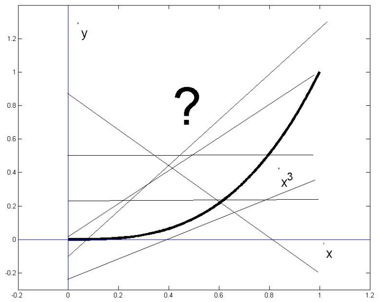
Seite 205

Beispiel 6.18

Betrachte Π_n mit $< p, q >: = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$

Finde Gerade $g(x) = \zeta_0 \cdot 1 + \zeta_1\, x$, die $u(x) := x^3$ bestmöglich nähert.

$$\|u - g\| = < u - g, u - g >^{1/2} \stackrel{!}{=} min.$$



Beispiel 6.18

Lösung mit Gram-System

$$w^1(x) = 1, w^2(x) = x, v(x) = x^3$$

$$\begin{pmatrix} < w^1, w^1 > & < w^1, w^2 > \\ < w^2, w^1 > & < w^2, w^2 > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < w^1, v > \\ < w^2, v > \end{pmatrix}$$

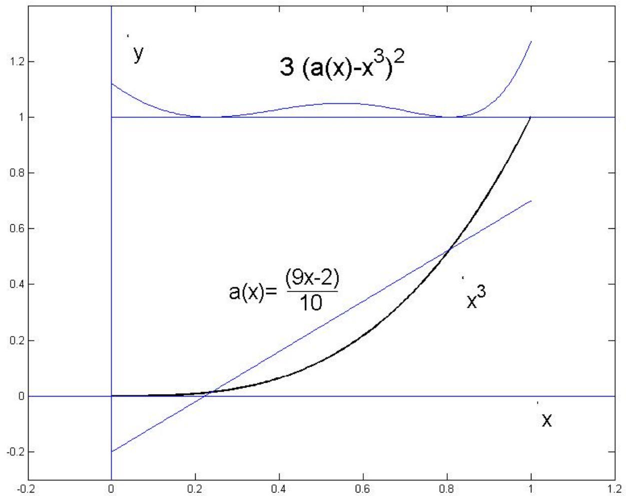
$$\begin{aligned} < w^1, w^1 > &= \int_0^1 1 \cdot 1\, dx = 1 \\ < w^1, w^2 > &= < w^2, w^1 > = \int_0^1 1 \cdot x\, dx = 1/2 \\ < w^2, w^2 > &= \int_0^1 x \cdot x\, dx = 1/3 \\ < w^1, v > &= \int_0^1 1 \cdot x^3\, dx = 1/4 \\ < w^2, v > &= \int_0^1 x \cdot x^3\, dx = 1/5 \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/5 \end{pmatrix} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{5} + \frac{9}{10} x$$

fertig!

Ergebnis



Seite 206

Projektionsmatrizen

Die Projektion ist lineare Abbildung, also im endlichdimensionalen Fall durch Matrizen darstellbar.

Für den Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen inneren Produkt hatten wir diese schon für zwei Fälle aufgeschrieben.

Spezialfall 3: Bei gegebener Orthonormalbasis $w^1, \cdots, w^m$ von W ist:

$$P = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} w^i (w^i)^T\right)}_{\text{Summe dyadischer Produkte}}$$

Spezialfall 1: Bei spaltenweisem Eintrag der linear unabhängigen Basisvektoren $w^1, ..., w^m \in \mathbb{R}^n$ von V in eine Matrix $A := (w^1, \ldots, w^m) \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ ist

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

Seite 208

Satz 6.22 (Charakterisierungssatz)

$P \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ beschreibt (bzgl. Standardbasis) genau dann Projektor $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow W$,

$$W := \{Px : x \in \mathbb{R}^n\},$$

bzgl. eukl. inneren Produktes, wenn

$$P = P^2 = P^T.$$

Beweis

Sei $P = \sum_{i=1}^m w^i\, w^{iT}$, w^i ONS von W
Dann ist

$$\begin{aligned}
P^2 &= \sum_{i=1}^{m} w^i\, w^{iT} \sum_{j=1}^{m} w^j\, w^{jT} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w^i \underbrace{(w^{iT} w^j)}_{\delta_{ij}} w^{jT} \\
&= \sum_{i=1}^{m} w^i\, w^{iT} \\
P^T &= \sum_{i=1}^{m} (w^i\, w^{iT})^T = P
\end{aligned}$$

Sei $P = P^2 = P^T$
Dann $\forall\, v \in V :\ P(v) \in W$
Außerdem gilt $v - Pv \perp W$ wegen

$$\begin{aligned}
(v - Pv)^T Pz &= v^T (E - P)^T Pz \\
&= v^T (P - P^2) z = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^n \quad \square
\end{aligned}$$

Seite 208

Orthogonalräume

Definition 6.23

Sei W Teilraum von $(V, <,>)$
$W^\perp := \{v \in V :< v, w >= 0 \quad \forall\, w \in W\}$
heißt bekanntlich Orthogonalraum von W in V.

Bemerkung 6.25

V endlichdimensional, W Teilraum von V

$$\underbrace{\overbrace{v^1, \cdots v^m}^{\text{ONB von } W}, \Rightarrow \overbrace{v^{m+1}, \cdots, v^n}^{\text{ONB von } W^\perp}}_{\text{ON-Basis von } V}$$

Hier $(W^\perp)^\perp = W$

Im unendlichdimensionalen Fall nur noch
$W \subset (W^\perp)^\perp$
$W \neq (W^\perp)^\perp$ möglich.

Ende der 2. Vorlesung

Vorlesung 3

19. April + 22. April

Orthogonaltransformationen

Seite 153

Wiederholung: (Kongruenztransformationen des $\mathbb{R}^2$)

Ansatz: $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\qquad Q^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q^T = Q^{-1}$ bei

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i) } a = \frac{d}{ad-bc} \\ \text{(ii) } d = \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right\} a = (ad-bc)^2 a \qquad \left.\begin{array}{l} \text{(iii) } c = \frac{-b}{ad-bc} \\ \text{(iv) } b = \frac{-c}{ad-bc} \end{array}\right\} b = (ad-bc)^2 b \qquad \overset{|a|+|b|\neq 0}{\Longrightarrow} ad - bc = \pm 1$$

folglich zwei Fälle

$$\begin{array}{lllll} \alpha) & ad-bc = 1, & a = d, & b = -c \\ \beta) & ad-bc = -1, & a = -d, & b = c \end{array}$$

ALSO:

$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ orthogonal wenn

$\alpha)$ $a = d, \quad b = c \qquad ad - bc = det\ Q = 1$

oder

$\beta)$ $a = -d, \quad b = c \qquad ad - bc = det\ Q = -1$

In beiden Fällen $a^2 + b^2 = 1$, also $a = \cos\phi \quad b = \pm\sin\phi$

Damit entweder

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad \phi \in [0, 2\pi)$$

oder

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \qquad \phi \in [0, 2\pi)$$

Orthogonaltransformationen

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \quad A^T A = E$$

$$\begin{aligned} 1 = det(E) = det(A^T A) &= det(A^T) \cdot det(A) \\ &= (det(A))^2 \end{aligned}$$

Definition 6.27 (verallgemeinerte)

$$\Rightarrow \underbrace{det\ A = 1}_{\text{„Drehung“}} \quad \underbrace{det\ A = -1}_{\text{„Spiegelung“}}$$

$$dim = 2,\ \text{dann} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

$dim = 2$: Namen korrekt

$dim = 3$: Namen fast korrekt, tatsächliche Drehung oder (Drehung nach) Spiegelung

$dim > 3$: Namen entsprechen nicht mehr der Anschauung

Satz 6.28

Für $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$, $A^T A = E$ gelten

(i) $det\ A = 1 \Rightarrow A \sim$ Drehung um eine Achse durch Null.

(ii) $det\ A = -1 \Rightarrow A \sim$ Drehung hinter Spiegelung

Beweis

(ii) $det\ A = -1 \Rightarrow$

$$\underbrace{det\left(A \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\right)}_{\Rightarrow \tilde{A} = \text{ Drehung}} = 1$$

$$A = A \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\tilde{A}}_{\text{Drehung nach (i)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung}}$$

(i) (tricky)

Struktur:

a) Finde Drehachse v^1

b) Stelle A dar bzgl. ONB $\frac{v^1}{||v^1||} = w^1, w^2, w^3$ und zeige

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a) Drehachse bleibt fest unter A
$Av = v$
$\Rightarrow$ Drehachse löst $\underbrace{(A - E)}_{\text{muss singulär sein, damit es } v \text{ gibt}} v = 0$ (natürlich $v \neq 0$).

$$\begin{aligned} det(A-E) &= det(A \cdot (E - A^T)) \\ &= det(A)\, det((E - A^T)^T) \\ &= det(E - A) \\ &= det((-1) \cdot (A - E)) \\ &= (-1)^3 det(A - E) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow det(A - E) = 0 \Rightarrow A - E \text{ singulär}$$

$$\Rightarrow \exists\, v : Av = v, \text{o.E. } ||v|| = 1$$

Ergänze Drehachse v zu ONB (w^1, w^2, w^3) und stelle A dar bzgl. dieser Basis

Übergangsmatrix:

$$\begin{aligned} \text{Basis}_{\text{neu}} &= \text{Basis}_{\text{alt}} \cdot S \\ (w^1, w^2, w^3) &= (e^1, e^2, e^3) \cdot S \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = (w^1, w^2, w^3) \quad S^T = S^{-1}$$

$$\tilde{A} = S^{-1} AS = S^T AS$$

$\tilde{A}$ orthogonal als Produkt orthogonaler Matrizen.

$$Aw^1 = w^1 \sim \tilde{A}e^1 = e^1$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$E = \tilde{A}^T \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \otimes & * & * \\ \otimes & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \otimes & \otimes \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & \\ 0 & & \end{array}\right)$$

$$E_3 = \tilde{A}^T \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B^T B & \\ 0 & & \end{pmatrix} \Rightarrow B^T B = E_2, det\, \tilde{A} = 1 \cdot det\, B \Rightarrow det\, B = 1$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \qquad \square$$

Beispiel (Drehachse und Drehwinkel)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{\sqrt{2} \cdot 3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{10} & \frac{8}{10} & -\frac{\sqrt{2} \cdot 3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

ist orthogonal und hat Determinante $= 1$

Bestimmung der Drehachse aus $(A-E)v=0$

$$10(A-E)v=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2}\cdot 3 & 1 \\ \sqrt{2}\cdot 3 & -2 & -\sqrt{2}\cdot 3 \\ 1 & \sqrt{2}\cdot 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$v=\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Bestimmung des Drehwinkels:

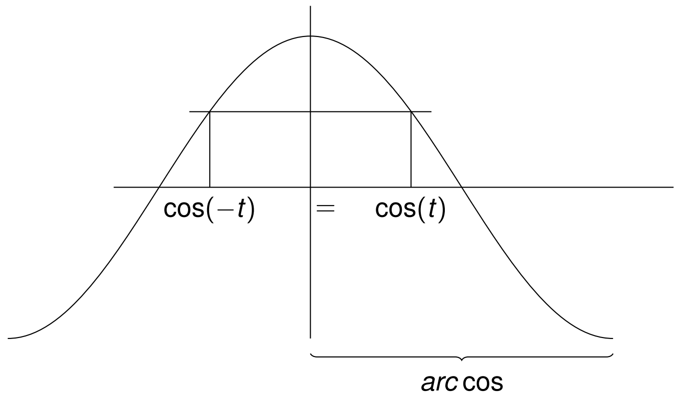
Wähle $z \perp v$ (also in Drehebene), z.B. $z=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Drehe:

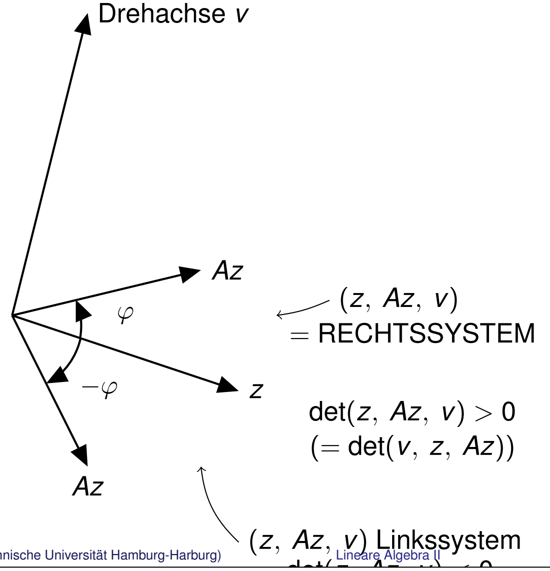
$$Az=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}\cdot 3}{10} \\ \frac{8}{10} \\ \frac{\sqrt{2}\cdot 3}{10} \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{<z, Az>}{||z||\,||Az||} = \frac{8/10}{1\cdot 1} = 0.8$$

Achtung: Mit $\cos(\alpha)$ ist α noch nicht bekannt!



Achtung: Mit $\cos(\alpha)$ ist α noch nicht bekannt!



Seite 212

Wegen

$$det\begin{pmatrix} v \\ z \\ Az \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\cdot 3}{10} & \frac{8}{10} & \frac{\sqrt{2}\cdot 3}{10} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}\cdot 3}{5} > 0$$

liegt ein Rechtssystem vor und aus

$$\cos\alpha = 0.8$$

folgt

$$\alpha = +\mathrm{arc}\cos 0.8 \approx 36,87^o \quad \square$$

Nun noch Bestimmung von Drehachse & Drehwinkel direkt aus Matrix!
Dazu zunächst die

Definition 6.31
Zu $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt

$$Spur(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{jj} \quad Spur \text{ von } A$$

Seite 212

Lemma 6.32

Die Spuren ähnlicher Matrizen sind gleich:
Also

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, T \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ regulär}$$
$$\Longrightarrow$$
$$Spur(A) = Spur(T^{-1}AT)$$

Bemerkung: Es ist immer nützlich Invarianten von Transformationen zu kennen. (vgl. Drehachse von Drehung)

Beweis

Sei $B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} Spur(AB) &= \sum_{j=1}^{n}(AB)_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\, a_{jk} = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk} \\ &= Spur(BA) \text{ Daher ist} \\ Spur(T^{-1}AT) &= Spur(TT^{-1}A) = Spur(A) \quad \square \end{aligned} \tag{1}$$

Seite 213

Satz 6.33

Sei $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ orthogonal mit $det(A) = 1$
Dann gilt für den Drehwinkel von A

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(Spur(A) - 1)$$

und bei $(\cos(\varphi) \neq 1, \varphi \neq 0)$ gilt für die Drehachse v :

$$span\{v\} = \text{Bild}(A + A^T - (Spur(A) - 1)E)$$

Anmerkung: Bild $(b^1, \cdots, b^n) = span\{b^1, \cdots, b^n\}$

Vor dem Beweis eine Anwendung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} ; \cos\varphi = \frac{1}{2}(Spur(A) - 1) = \frac{1}{2}(1 + 2\cos\varphi - 1)$$

$$\begin{aligned} & A + A^T - (Spur(A) - 1)E \\ = & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 2\cos\varphi \end{pmatrix} - (1 + 2\cos\varphi - 1)E \\ = & \begin{pmatrix} 2 - 2\cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beweis

Sei

$$S^T AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =: \tilde{A},$$

S orthogonal, $S = (\text{Drehachse } w^1, w^2, w^3)$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Spur(A) &= Spur(S^T AS) = Spur(\tilde{A}) \\ &= 1 + 2\cos\varphi \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}(Spur(A) - 1) = \cos\varphi$$

Es ist

$$\tilde{A} + \tilde{A}^T - \underbrace{(Spur(A) - 1)}_{2\cos\varphi} E = \begin{pmatrix} 2 - 2\cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit

$$A + A^T - (Spur(A) - 1)E = S(\tilde{A} + \tilde{A}^T - (Spur(A) - 1)E)S^T$$

$$= (2 - 2\cos\varphi)S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^T$$

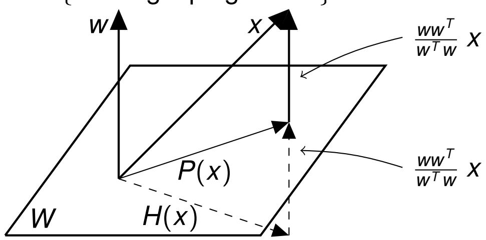
$$= (2 - 2\cos\varphi) \quad S \quad \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = const(S_{11}w_1, S_{21}w_1, S_{31}w_1)\square$$

Seite 214

Householder-Matrizen

$$w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0 \text{ definiert } W := \{x \in \mathbb{R}^n | w^T x = 0\}$$

Ziel: $Hx := \{\text{an } W \text{ gespiegeltes } x\}$



$$\underbrace{Hx = x - 2\frac{ww^T}{w^T w}x}_{\text{Householder-Matrix mal } x} \text{ Zweimal } w - \text{Anteil abziehen Def. 6.35}$$

$$H = E - 2\frac{ww^T}{w^T w}$$

Seite 215

Beispiel 6.36

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$w = (1, 1, 1)^T$$

$$H = E - 2\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1, 1, 1)$$

$$\left(= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

↗Um Gottes Willen nicht ausmultiplizieren.↖

Schon gar nicht in höheren Dimensionen.

Dyadische Produkte sind wunderschön einfach anzuwenden!

Bemerkungen 6.37

Bei Handrechnung verwende $E - 2\frac{ww^T}{w^Tw}$.
Bei Computerrechnung setze $\tilde{w} := \frac{w}{||w||_2}$ und benutze

$$Hy = (E - 2\tilde{w}\tilde{w}^T)y = y \underbrace{-}_{n+} [2 \underbrace{\cdot}_{1+} (\underbrace{\tilde{w}^T y}_{(2n-1)+})] \underbrace{\cdot}_{n \text{ Operationen}} \tilde{w}.$$

Das sind $4n$ Operationen.
w oder $\tilde{w}$ in $H = E - 2\frac{ww^T}{w^Tw} = E - 2\tilde{w}\tilde{w}^T$ brauchen nur n Speicher.
Multipliziert man hingegen ww^T aus, so ist Hy i.A. vollbesetzt.
Dann braucht Hy bei Standardausführung $n(2n-1)$ Operationen.

$$H^T = (E - 2ww^T)^T = E - 2ww^T = H; \qquad HH^T = H^TH = H^2 = E$$

H also symmetrisch & orthogonal.
Lösung von $Hx = b$ ist $x = Hb$ $\square$

Wichtige Anwendung von Householder-Matrizen

Frage

Gibt es eine Householder-Matrix $H = E - 2\frac{ww^T}{w^Tw}$, die $x \in \mathbb{R}^n$ auf λe^1 abbildet?

Zwischenüberlegung:
Wenn das geht, so muss $\lambda = \pm||x||$ sein. (Länge bleibt erhalten)

Endüberlegung:
w zeigt vom Ergebnisvektor Hx nach x.
Also

$$w = +||x||e^1 - x \text{ oder } \quad w = -||x||e^1 - x.$$

Zack! FERTIG!

Welchen wählen?
Den

$$\tilde{w} = x + sign(x_1)||x||e^1$$

Beispiel

Bilde

$$H = E - 2\frac{ww^T}{w^Tw} \text{ mit } Hx = y,$$

wobei

$$x = (3, 4, 0, 0)^T, y = (0, 0, 0, 5)^T$$

Frage

Geht das überhaupt?

Antwort: Ja, $||x|| = ||y||$.

Konstruktion:

w hat Richtung von $x - y$ oder $y - x$. (Ist egal. Wieso?)

Also

$$w = x - y = (3, 4, 0, -5)^T$$

$$H = E - 2\frac{ww^T}{w^T w} = E - \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}(3, 4, 0, -5)$$

Ende der 3. Vorlesung