Technische Universität Hamburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Marko Lindner

Wintersemester 2018/19

Klausur zur Mathematik I (Veranstaltung: Lineare Algebra I)
05.03.2019

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg.:	**AIW**	**BU**	**BVT**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**MEC**	**SB**	**VT**	**Sonstige**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Lehrveranstaltungen „Analysis I" und „Lineare Algebra I" die Gesamtnote für das Modul „Mathematik I" ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur bewertet wird, wenn das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung bestätigt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben. Es werden insgesamt 20 Punkte vergeben.

Aufgabe	**Punkte**	**Korrektor**
1		
2		
3		
4		
5		

$\sum =$

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Folgende Aussagen sind im Allgemeinen falsch. Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

(a) Sind X, Y Mengen und ist $f\colon X \to Y$ injektiv, dann ist f auch surjektiv.

(b) Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{o}$, dann gilt $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(c) Wenn $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$, so dass die Familie $\mathcal{F} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ linear unabhängig ist, dann gilt $\operatorname{Span}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^3$.

(d) Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha \det(\mathbf{A})$.

Lösungshinweise 1

(a) Z.B. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist f injektiv, aber nicht surjektiv, da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ kein Urbild besitzt. (1 Punkt)

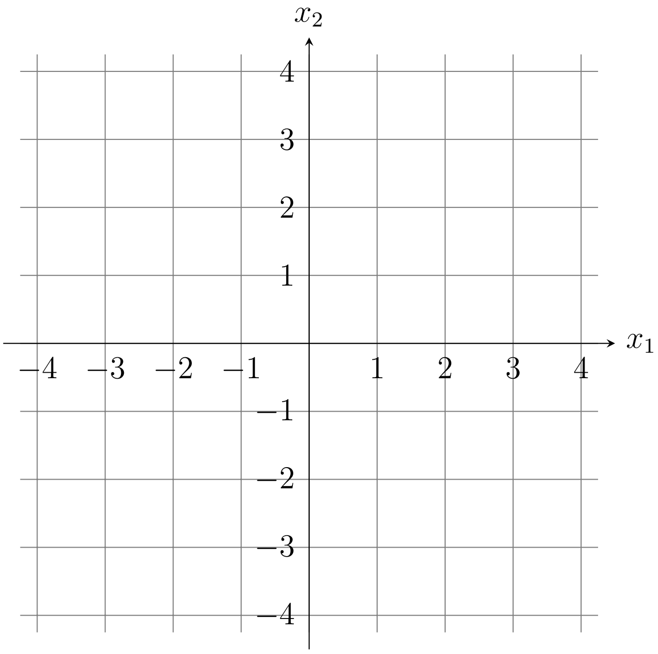
(b) Z.B. $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{o}$, aber $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. (1 Punkt)

(c) Z.B. $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist die Familie $\mathcal{F} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ linear unabhängig, aber $\operatorname{Span}(\mathcal{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \neq \mathbb{R}^3$. (1 Punkt)

(d) Z.B. $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha := 2$. Dann gilt $\det(\alpha\mathbf{A}) = 4$, aber $\alpha \det(\mathbf{A}) = 2$. (1 Punkt)

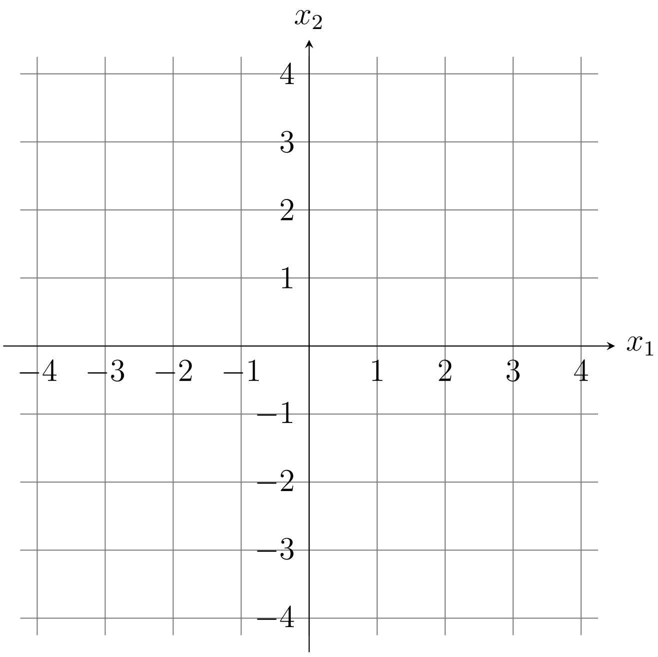
Aufgabe 2 (2 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Menge aller konvexen Kombinationen von $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.



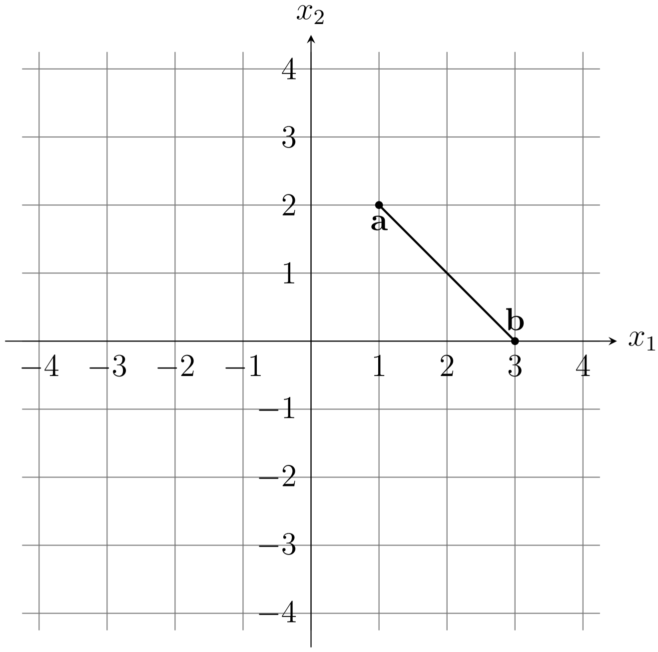
(b) Skizzieren Sie die Gerade

$$g := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$



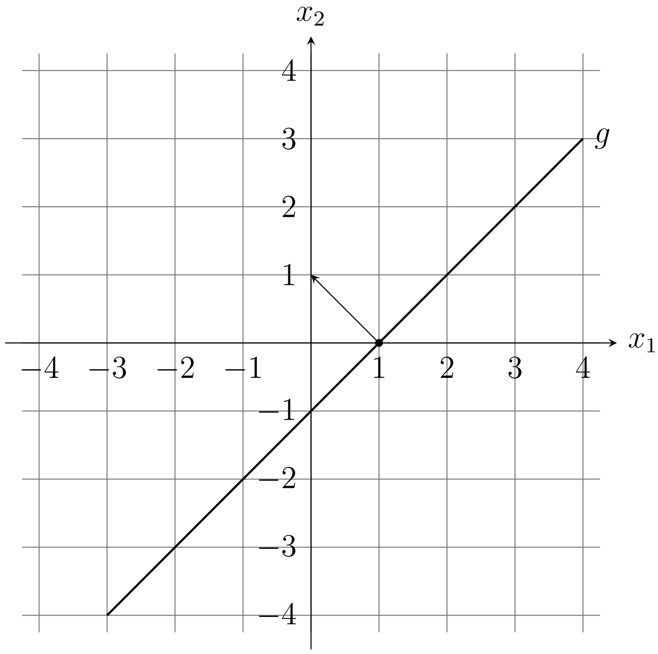
Lösungshinweise 2

(a)



(1 Punkt)

(b)



(1 Punkt)

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}\right)$.

Lösungshinweise 3

Wir nutzen den Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix}0&2&4&4\\2&1&-2&2\\-1&-2&-2&2\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&-2&-2&2\\0&2&4&4\\2&1&-2&2\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&-2&-2&2\\0&\mathbf{2}&4&4\\0&-3&-6&6\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&-2&-2&2\\0&\mathbf{2}&4&4\\0&0&0&\mathbf{12}\end{pmatrix}. \quad \color{red}{(2\,Punkte)}$$

Eine Basis von $V := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}\right)$ ergibt sich aus den Originalvektoren, die zu Spalten gehören, bei denen nach dem Gauß-Algorithmus (also in der Zeilenstufenform) ein Pivotelement zu finden ist. Damit ist $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von V (2 Punkte) und $\dim V = 3$. (1 Punkt)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

(a) Seien $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} := 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

$$\det\Big(\big(\mathbf{A}^\top\big)^{-1}\mathbf{B}\Big).$$

(b) Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Die Familie $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ist genau dann linear abhängig, wenn $\text{Fläche}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ gilt.

Lösungshinweise 4

(a) Es gilt

$$\det\Big(\big(\mathbf{A}^\top\big)^{-1}\mathbf{B}\Big) = \det\Big(\big(\mathbf{A}^\top\big)^{-1}\Big)\det(\mathbf{B}) = \frac{1}{\det\big(\mathbf{A}^\top\big)}\det(\mathbf{B}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\det(\mathbf{B}). \quad \color{red}{(0.5\,\textit{Punkte})}$$

Wir rechnen

$$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -2\cdot\big(2\cdot1 - 1\cdot(-2)\big) = -8, \quad \color{red}{(1\,\textit{Punkt})}$$

und

$$\det(\mathbf{B}) = 2^3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 8\cdot1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 8\cdot1\cdot2\cdot3 = 48. \quad \color{red}{(1\,\textit{Punkt})}$$

Wir erhalten also

$$\det\Big(\big(\mathbf{A}^\top\big)^{-1}\mathbf{B}\Big) = \frac{48}{-8} = -6. \quad \color{red}{(0.5\,\textit{Punkte})}$$

Alternativ können wir die Matrix zunächst ausrechnen und erhalten

$$\big(\mathbf{A}^\top\big)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \color{red}{(1.5\,\textit{Punkte})}$$

$$\big(\mathbf{A}^\top\big)^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad \color{red}{(0.5\,\textit{Punkte})}$$

$$\det\Big(\big(\mathbf{A}^\top\big)^{-1}\mathbf{B}\Big) = \det\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} = -6. \quad \color{red}{(1\,\textit{Punkt})}$$

(b) Sei $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ linear abhängig. Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nicht beide gleich 0, so dass $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{o}$. Ist $\alpha \neq 0$, dann ist $\mathbf{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{v}$ und damit

$$\text{Fläche}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{Fläche}\big(-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{v}, \mathbf{v}\big) = -\frac{\beta}{\alpha}\text{Fläche}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

Ist $\beta \neq 0$, dann gilt analog $\mathbf{v} = -\frac{\alpha}{\beta}\mathbf{u}$ und damit

$$\text{Fläche}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{Fläche}\big(\mathbf{u}, -\frac{\alpha}{\beta}\mathbf{u}\big) = -\frac{\alpha}{\beta}\text{Fläche}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0. \quad (1\,\textit{Punkt})$$

Sei nun Fläche$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, d.h.

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0.$$

Gilt $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{o}$, dann ist $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ linear abhängig. Ist mindestens einer der beiden Vektoren verschieden von $\mathbf{o}$, dann gelten

$$\begin{aligned} v_1 u_1 - u_1 v_1 &= 0, \\ v_1 u_2 - u_1 v_2 &= 0, \end{aligned}$$

also $v_1\mathbf{u} - u_1\mathbf{v} = \mathbf{o}$, bzw.

$$\begin{aligned} v_2 u_1 - u_2 v_1 &= 0, \\ v_2 u_2 - u_2 v_2 &= 0, \end{aligned}$$

also $v_2\mathbf{u} - u_2\mathbf{v} = \mathbf{o}$. Damit ist $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ linear abhängig. (1 Punkt)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Seien $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie $g_1 := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ und $g_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie den Abstand zwischen g_1 und g_2.

(b) Ermitteln Sie die orthogonale Projektion von $\mathbf{x}$ auf g_1.

Lösungshinweise 5

(a) Sei $E := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Dann ist

$$\operatorname{dist}(g_1, g_2) = \operatorname{dist}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E\right).$$

Wir bestimmen eine Hesse'sche Normalenform von E:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &:= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \color{red}{(0.5\,\mathit{Punkte})} \\
\|\mathbf{n}\| &= \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9, \quad \color{red}{(0.5\,\mathit{Punkte})} \\
\mathbf{n}_0 &:= \frac{1}{\|\mathbf{n}\|}\mathbf{n} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \\
E &= \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{n}_0, \mathbf{v} - \mathbf{o} \rangle = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(g_1, g_2) &= \operatorname{dist}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E\right) \quad \color{red}{(0.5\,\mathit{Punkte})} \\
&= \left|\left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right| = \left|\frac{1}{3}\big(-1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1\big)\right| = \frac{4}{3}. \quad \color{red}{(0.5\,\mathit{Punkte})}
\end{aligned}$$

(b) Die orthogonale Projektion von $\mathbf{x}$ auf g_1 ist gegeben durch

$$\frac{\left\langle \mathbf{x}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-9}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \color{red}{(2\,\mathit{Punkte})}$$