Technische Universität Hamburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Marko Lindner

Wintersemester 2017/18

Klausur zur Mathematik I (Veranstaltung: Lineare Algebra I)
06.03.2018

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg.:	**AIW**	**BU**	**BVT**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**MEC**	**SB**	**VT**	**Sonstige**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Lehrveranstaltungen „Analysis I" und „Lineare Algebra I" die Gesamtnote für das Modul „Mathematik I" ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur bewertet wird, wenn das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung bestätigt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben. Es werden insgesamt 20 Punkte vergeben.

Aufgabe	**Punkte**	**Korrektor**
1		
2		
3		
4		
5		

$\sum =$

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr bzw. falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} \right\rangle$ ist linear.

(b) Die Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist bijektiv.

(c) 5 ist eine gerade Zahl $\iff \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar.

(d) Wenn $m \in \mathbb{Z}$ gerade und $n \in \mathbb{Z}$ ist, dann ist $m \cdot n$ gerade.

Lösungshinweise 1

(a) Es gilt $f(\mathbf{x}) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$. Damit ist $f = f_{\mathbf{A}}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ und damit linear. Die Aussage ist also wahr. (1 Punkt)

(b) g ist nicht bijektiv, denn es gilt offenbar $g(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, und für $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{o}$ gilt ebenfalls $g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{o}$. Damit is g nicht injektiv, also auch nicht bijektiv. Die Aussage ist also falsch. (1 Punkt)

(c) Offenbar ist 5 eine ungerade Zahl. Außerdem ist $\mathbf{A}$ nicht invertierbar. Da eine Äquivalenz genau dann wahr ist, wenn auf beiden Seiten die selben Wahrheitswerte stehen, ist somit die Aussage wahr (die Aussagen auf beiden Seiten sind ja falsch). (1 Punkt)

(d) Ist m gerade, dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $m = 2k$. Damit ist $m \cdot n = (2k) \cdot n = 2(kn)$. Da $kn \in \mathbb{Z}$, ist $m \cdot n$ gerade. Die Aussage ist also wahr. (1 Punkt)

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben sei die Ebene E durch die Punkte $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Normalform der Ebene E und einen Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$, so dass $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in E$.

Lösungshinweise 2

Die Ebene E besitzt die beiden Richtungsvektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. (1 Punkt) Ein Normalenvektor der Ebene ist damit gegeben durch

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Wegen $\mathbf{o} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in E$ gilt damit

$$E = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{x} \right\rangle = 0\right\}.$$

Somit können wir $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ wählen. (1 Punkt)

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_1 := \begin{pmatrix} 10 \\ -16 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ und $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$.

Lösungshinweise 3

Wir nutzen den Gauß-Algorithmus mit beiden rechten Seiten gleichzeitig:

$$\begin{array}{cccc|c|c} \mathbf{2} & 1 & -2 & 1 & 10 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -16 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 3 & -2 & -1 \\ \hline \mathbf{2} & 1 & -2 & 1 & 10 & 3 \\ 0 & \mathbf{-3} & 2 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & -6 & 4 & 2 & -12 & -4 \\ \hline \mathbf{2} & 1 & -2 & 1 & 10 & 3 \\ 0 & \mathbf{-3} & 2 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-14} \end{array} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Wir lesen ab: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ist lösbar, während $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ nicht lösbar ist, also eine leere Lösungsmenge besitzt. (1 Punkt) Zur Bestimmung der Lösungsmenge von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ lesen wir weiterhin ab, dass die ersten beiden Spalten der Zeilenstufenform von $\mathbf{A}$ ein Pivotelement besitzen. Damit gelten $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = 2$, die Variablen x_1 und x_2 sind abhängig und die Variablen x_3 und x_4 sind frei. Wir rechnen

$$-3x_2 + 2x_3 + x_4 = -6 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4,$$

und

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 10 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 4 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Somit ist die Lösungsmenge von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ gegeben durch

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Gegeben seien die drei Vektoren $\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen sie das vorzeichenbehaftete Volumen des von $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Spates. Ist die Familie $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ linear abhängig?

Lösungshinweise 4

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Volumen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 3 \\ &\quad - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \cdot 3 - (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) \\ &= -4 + 0 - 3 + 2 - 0 + 3 = -2. \quad \text{(2 Punkte)} \end{aligned}$$

Da $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} \neq 0$ ist, ist die Familie $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ linear unabhängig. (1 Punkt)

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Mit $\mathbf{u}_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 := \begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix}$ und $\mathbf{u}_3 := \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ist $\mathcal{B} := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ eine Basis des Unterraums $U := \operatorname{Span}(\mathcal{B})$ von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, ausgehend von $\mathcal{B}$, eine Orthonormalbasis von U.

Lösungshinweise 5

Wir normieren zunächst $\mathbf{u}_1$. Es gilt $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2$ und damit

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Die Normalkomponente $\mathbf{v}_2$ von $\mathbf{u}_2$ bzgl. $\operatorname{Span}(\mathbf{w}_1)$ ist gegeben durch

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1\rangle\,\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Normierung liefert den zweiten Vektor $\mathbf{w}_2$ der Orthonormalbasis. Es gilt

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2+1^2} = 2$$

und damit

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Die Normalkomponente $\mathbf{v}_3$ von $\mathbf{u}_3$ bzgl. $\operatorname{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1\rangle\,\mathbf{w}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2\rangle\,\mathbf{w}_2\\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)}\end{aligned}$$

Normierung liefert den dritten Vektor $\mathbf{w}_3$ der Orthonormalbasis. Es gilt

$$\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2} = 2$$

und damit

$$\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Die Orthonormalbasis ist gegeben durch $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$.