Technische Universität Hamburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Marko Lindner

Sommersemester 2019

Klausur zur Mathematik I (Veranstaltung: Lineare Algebra I)
30.08.2019

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Name:															
Vorname:															
Matr.-Nr.:															

Stg.:	**AIW**	**BU**	**BVT**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**MEC**	**SB**	**VT**	**Sonstige**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Lehrveranstaltungen „Analysis I“ und „Lineare Algebra I“ die Gesamtnote für das Modul „Mathematik I“ ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur bewertet wird, wenn das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung bestätigt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben. Es werden insgesamt 20 Punkte vergeben.

Aufgabe	**Punkte**	**Korrektor**
1		
2		
3		
4		
5		

$\sum =$

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Begründen Sie folgende Aussagen.

(a) Ist $n \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist n^3 ebenfalls ungerade.

(b) Sind X, Y und Z Mengen und sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ injektiv, so ist $g \circ f$ ebenfalls injektiv.

(c) Die Gerade durch die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ enthält den Nullvektor.

(d) Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und hat die Zeilenstufenform $\mathbf{A}'$ von $\mathbf{A}$ genau n Pivot-Elemente, so ist die Abbildung $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x}$ injektiv.

Lösungshinweise 1

(a) Ist n ungerade, so gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k + 1$. Damit ist $n^3 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$ ebenfalls ungerade. (1 Punkt)

(b) Seien $x, x' \in X$ mit $g(f(x)) = g \circ f(x) = g \circ f(x') = g(f(x'))$. Da g injektiv ist, folgt damit $f(x) = f(x')$. Da f injektiv ist, folgt damit $x = x'$. Also ist $g \circ f$ injektiv. (1 Punkt)

(c) Da die Gerade gegeben ist durch

$$\left\{ (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \; : \; \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

erhalten wir mit $\lambda = \frac{1}{3}$:

$$\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1\,\textit{Punkt}).$$

(d) Hat $\mathbf{A}'$ genau n Pivot-Elemente, so gilt $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{o}\}$. Damit ist die lineare Abbildung $f_{\mathbf{A}}$ injektiv, denn sind $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ mit $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}')$, dann folgt aus der Linearität $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{o}$, also $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{o}\}$. (1 Punkt)

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Ermitteln Sie die Gerade g in $\mathbb{R}^3$, die durch den Punkt $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ verläuft und senkrecht zur Ebene $E = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x - 2y + 2z = 4\right\}$ liegt. Bestimmen Sie alle Punkte auf g, deren Abstand zu E genau 6 ist.

Lösungshinweise 2

Ein Normalenvektor von E ist gegeben durch $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$. (1 Punkt) Damit ist

$$g = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} : \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}. \quad (0.5\,\mathit{Punkte})$$

Wegen $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \in E$ bestimmen wir zunächst alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\left\|\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\| = 6$. Da $\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$, muss also $|\lambda| = 2$ gelten, also $\lambda = \pm 2$ (0.5 Punkte). Somit erhalten wir die beiden Punkte

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}, \quad (0.5\,\mathit{Punkte})$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\5\end{pmatrix}. \quad (0.5\,\mathit{Punkte})$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise 3

Wir nutzen den Gauß-Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -\mathbf{2} & -4 & -6 & -4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -\mathbf{2} & -4 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (2\,Punkte)$$

Das Gleichungssystem ist also lösbar. Wir finden zwei Pivotelemente in den ersten beiden Spalten, und damit zwei freie Variablen x_3 und x_4. (1 Punkt) Auflösen der restlichen beiden Variablen x_1 und x_2 liefert

$$-2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -4 \Longrightarrow x_2 = 2 - 2x_3 - 3x_4, \quad (0.5\,Punkte)$$

und

$$1x_1 + 2(2 - 2x_3 - 3x_4) + 3x_3 + 4x_4 = 2 \Longrightarrow x_1 = -2 + x_3 + 2x_4. \quad (0.5\,Punkte)$$

Die Lösungsmenge ist damit gegeben durch

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1\,Punkt)$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ermitteln Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise 4

Die Matrix ist in Blockdreiecksgestalt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (1 Punkt) Wir rechnen

$$\det(\mathbf{B}) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 4, \quad (1\,Punkt)$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D}) &= \det \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \\ &= 5. \quad (1\,Punkt) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{D}) = 4 \cdot 5 = 20. \quad (1\,Punkt)$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die orthogonale Projektion von $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf $U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ist.

Lösungshinweise 5

Wir müssen zeigen, dass $\mathbf{p} \in U$ gilt (0.5 Punkte) und dass $\mathbf{x} - \mathbf{p} \perp U$ gilt (0.5 Punkte). Für die erste Eigenschaft bestimmen wir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in Spaltensichtweise. Der Gauß-Algorithmus liefert

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & -\mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & -\mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \quad (1\,\mathit{Punkt})$$

Also ist das Gleichungssystem lösbar, mit der eindeutigen Lösung $\alpha = 3$ und $\beta = -1$. (0.5 Punkte) Insbesondere ist $\mathbf{p} \in U$.

Für die zweite Eigenschaft zeigen wir, dass $\mathbf{x} - \mathbf{p} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x} - \mathbf{p} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gelten. Wir rechnen $\mathbf{x} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (0.5 Punkte). Damit gelten

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad (0.5\,\mathit{Punkte})$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \quad (0.5\,\mathit{Punkte})$$

Damit ist $\mathbf{x} - \mathbf{p} \perp U$.
Alternativlösung: Wir berechnen die Projektion von $\mathbf{x}$ auf U und vergleichen mit $\mathbf{p}$.

Offenbar ist $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von U. Damit ist

$$G(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad \textcolor{red}{(1\,Punkt)}$$

Weiter ist

$$\begin{pmatrix} \left\langle \mathbf{x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \mathbf{x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad \textcolor{red}{(1\,Punkt)}$$

Lösen des Gleichungssystems

$$G(\mathcal{B})(\mathbf{x}_{\downarrow U})^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \left\langle \mathbf{x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \mathbf{x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix}$$

ergibt damit

$$(\mathbf{x}_{\downarrow U})^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \textcolor{red}{(1\,Punkt)}$$

Damit ist

$$\mathbf{x}_{\downarrow U} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{p}. \quad \textcolor{red}{(1\,Punkt)}$$