**Technische Universität Hamburg**
**Institut für Mathematik**
**Prof. Dr. Marko Lindner**

**Sommersemester 2018**

**Klausur zur Mathematik I (Veranstaltung: Lineare Algebra I)**
**31.08.2018**

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Name:** | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Vorname:** | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Matr.-Nr.:** | | | | | | | | | | | | | | | |

| **Stg.:** | **AIW** | **BU** | **BVT** | **ET** | **EUT** | **IIW** | **LUM** | **MB** | **MEC** | **SB** | **VT** | **Sonstige** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Lehrveranstaltungen „Analysis I“ und „Lineare Algebra I“ die Gesamtnote für das Modul „Mathematik I“ ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur bewertet wird, wenn das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung bestätigt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben. Es werden insgesamt 20 Punkte vergeben.

---

| Aufgabe | Punkte | Korrektor |
|---|---|---|
| **1** | | |
| **2** | | |
| **3** | | |
| **4** | | |
| **5** | | |

$\sum =$

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) Seien $A, B, C$ Mengen. Dann gilt $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(b) Sind $X, Y, Z$ Mengen und die Funktionen $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ bijektiv, dann ist $g \circ f\colon X \to Z$ ebenfalls bijektiv.

(c) $|\{A : \ A \subset \{0,1,2\}\}| = 9$.

(d) Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ und gilt $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{o}$, dann ist die Familie $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ linear abhängig.

**Lösungshinweise 1**

(a) Die Aussage ist wahr. Sei $x \in A \setminus (B \cup C)$, d.h. $x \in A$, aber $x \notin B \cup C$, also $x \notin B$ und $x \notin C$. Dann ist $x \in A \setminus B$ und $x \in A \setminus C$, also $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Ist umgekehrt $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, dann ist $x \in A \setminus B$ und $x \in A \setminus C$, also $x \in A$ und $x \notin B$ und $x \notin C$, also $x \in A \setminus (B \cup C)$. (1 Punkt)

(b) Die Aussage ist wahr. Bijektivitität bedeutet Invertierbarkeit der Abbildung. Sei $h := f^{-1} \circ g^{-1}\colon Z \to X$. Dann gelten

$$h \circ (g \circ f) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-} \circ g \circ f = f^{-1} \circ f = id_X,$$

und

$$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_Z.$$

Also ist $h = (g \circ f)^{-1}$ und damit $g \circ f$ bijektiv. (1 Punkt)

(c) Die Aussage ist falsch. Es gilt

$$\{A : \ A \subset \{0,1,2\}\} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\},$$

und damit $\left|\{A : \ A \subset \{0,1,2\}\}\right| = 8$. (1 Punkt)

(d) Die Aussage ist wahr. Da $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ die Fläche des von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Parallelogramms beschreibt, muss die Fläche also Null sein. Damit sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ Vielfache voneinander, also linear abhängig. (1 Punkt)

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Sei

$$E := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ und für $a \in \mathbb{R}$ sei die Gerade $g_a$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g_a := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a+1 \\ a+1 \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass $g_a$ die Ebene $E$ schneidet.

(b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt im Fall $a = \frac{2}{3}$.

**Lösungshinweise 2**

Wir setzen einen beliebigen Punkt von $g_a$ in die bestimmende Gleichung für $E$ ein, und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a+1 \\ a+1 \\ a \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \lambda \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a+1 \\ a+1 \\ a \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -1 + \lambda(-3a+3). \quad \text{(2 \textit{Punkte})} \end{aligned}$$

Diese Gleichung besitzt genau dann eine Lösung $\lambda \in \mathbb{R}$, falls $-3a+3 \neq 0$, also $a \neq 1$. Genau für diese $a$ schneidet $g_a$ die Ebene $E$ in genau einem Punkt, der durch den Geradenparameter $\lambda = \frac{1}{-3a+3}$ beschrieben wird. (1 Punkt) Wir lesen außerdem ab: $g_1 \cap E = \varnothing$.

Für $a = \frac{2}{3}$ erhalten wir $\lambda = 1$ und damit als Schnittpunkt

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad \text{(1 \textit{Punkt})}$$

**Aufgabe 3** (5 Punkte)

Sei $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 8 \\ -1 & 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Dimension von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

(b) Ist $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(c) Ist die Abbildung $f_{\mathbf{A}} \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x}$ surjektiv? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

**Lösungshinweise 3**

Wir nutzen den Gauß-Algorithmus für $\mathbf{A}$:

$$\begin{array}{cccccc}
\mathbf{1} & -3 & 2 & 2 & & \\
2 & -6 & 2 & 8 & -2g_1 & \\
-1 & 3 & -6 & 6 & -(-1)g_1 & \\
\hline
\mathbf{1} & -3 & 2 & 2 & & \\
0 & 0 & \mathbf{-2} & 4 & & \quad \color{red}{(2\,\mathit{Punkte})} \\
0 & 0 & -4 & 8 & -2g_2' & \\
\hline
\mathbf{1} & -3 & 2 & 2 & & \\
0 & 0 & \mathbf{-2} & 4 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
\end{array}$$

Wir lesen ab: die erste und die dritte Spalte haben ein Pivotelement, also ist

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$$

und hat damit Dimension 2. (1 Punkt) Um zu testen, ob $\mathbf{b} \in \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ gilt, prüfen wir das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auf Lösbarkeit. Wir kopieren die Gauß-Schritte von oben für $\mathbf{A}$, und führen sie parallel für $\mathbf{b}$ mit aus:

$$\begin{array}{cccc|cc}
\mathbf{1} & -3 & 2 & 2 & 1 & \\
2 & -6 & 2 & 8 & 0 & -2g_1 \\
-1 & 3 & -6 & 6 & -5 & -(-1)g_1 \\
\hline
\mathbf{1} & -3 & 2 & 2 & 1 & \\
0 & 0 & \mathbf{-2} & 4 & -2 & \\
0 & 0 & -4 & 8 & -4 & -2g_2' \\
\hline
\mathbf{1} & -3 & 2 & 2 & 1 & \\
0 & 0 & \mathbf{-2} & 4 & -2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

Wir lesen ab: Das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist lösbar, also ist $\mathbf{b} \in \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$. (1 Punkt) Da $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = 2$ (es gibt zwei Pivotelemente in der Zeilenstufenform von $\mathbf{A}$) und die Zeilenanzahl $m = 3$ ist, ist $f_{\mathbf{A}}$ nicht surjektiv. (1 Punkt)

**Aufgabe 4** (3 Punkte)

Berechnen Sie

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sind die Spalten der Matrix linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

**Lösungshinweise 4**

Wir nutzen Laplace-Entwicklung nach der ersten Zeile und danach die Regel von Sarrus und erhalten damit

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} &= 2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2\big(8+0+0-0-2-2\big) - (-1)\big(-4+0+0-0-(-1)-0\big) \\ &= 8 + (-3) = 5. \quad \text{(2 } \textit{Punkte}\text{)}\end{aligned}$$

Da die Determinante ungleich Null ist, sind die Spalten der Matrix linear unabhängig. (1 Punkt)

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

Sei $U := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von dem Vektor $\mathbf{x} := \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ auf $U$.

**Lösungshinweise 5**

Offenbar ist $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $U$. Die Gram'sche Matrix zu $\mathcal{B}$ lautet

$$G(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}, \quad \text{(1 \textit{Punkt})}$$

und weiterhin gilt

$$\begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}. \quad \text{(1 \textit{Punkt})}$$

Das Gleichungssystem

$$G(\mathcal{B})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix}$$

lautet somit

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

dessen Lösung

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist. (1 Punkt) Damit erhalten wir

$$\mathbf{x}_{\downarrow U} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1\,Punkt)$$