Technische Universität Hamburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Marko Lindner

Wintersemester 2016/17

Klausur zur Mathematik I (Modul: Lineare Algebra I)
23.02.2017

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Name:															
Vorname:															
Matr.-Nr.:															

Stg.:	**AIW**	**BU**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**MEC**	**SB**	**VT**	**VTBIO**	**Sch.**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Module „Analysis I“ und „Lineare Algebra I“ die Gesamtnote für das Fach „Mathematik I“ ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben. Es werden insgesamt 20 Punkte vergeben.

Aufgabe	Punkte	Korrektor
1		
2		
3		
4		
5		

$\sum =$

Aufgabe 1: (4 Punkte)

(a) Sei $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Prüfen Sie $f_{\mathbf{A}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x}$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Kommentieren Sie auch die Lösbarkeit von Gleichungssystemen mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$.

(b) Bestimmen Sie die Normalform der Ebene E durch die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wie groß ist der Abstand von $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu E?

Lösungshinweis:

(a) Da $\mathbf{A}$ quadratisch ist, sind die Eigenschaften Injektivität, Surjektivität und Bijektivität für $f_{\mathbf{A}}$ äquivalent. $f_{\mathbf{A}}$ ist genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{o}\}$, und dies gilt genau dann, wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ist. Wir rechnen

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 5.$$

Damit ist $f_{\mathbf{A}}$ injektiv, surjektiv und bijektiv. (1 Punkt) Daraus schließen wir auch, das das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für alle rechten Seiten $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ besitzt. (1 Punkt)

(b) Seien $\mathbf{p} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$E = \big\{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}.$$

Wir rechnen $\mathbf{n} := \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$. Wir normieren noch:

$$\mathbf{n}_0 := \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$E = \big\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \ \langle \mathbf{n}_0, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle = 0\big\}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Da $\mathbf{n}_0$ normiert ist gilt für den Abstand von $\mathbf{v}$ zu E

$$\text{dist}(\mathbf{v}, E) = |\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{v} - \mathbf{p} \rangle| = |-1| = 1. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Sei $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 6 & 7 & 1 \\ -9 & -6 & -9 & 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ und eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$, und ermitteln Sie den Rang von $\mathbf{A}$.

Lösungshinweis:

Wir nutzen den Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & 3 & 3 & 0 & \\ 6 & 6 & 7 & 1 & -2G_1 \\ -9 & -6 & -9 & 6 & -(-3)G_1 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 6 & G_2' \leftrightsquigarrow G_3' \\ \hline 3 & 3 & 3 & 0 & \\ 0 & 3 & 0 & 6 & \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & \end{array}$$

(2 Punkte)

Die Spalten von $\mathbf{A}$, zu denen Pivotelemente gehören, bilden eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$. Damit ist $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$. (1 Punkt)

Der Kern von $\mathbf{A}$ ist somit eindimensional. Wir lösen $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$. Aus der obigen Zeilenstufenform erhalten wir mit der freien Variablen x_4:

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_4, \\ x_2 &= -2x_4, \\ x_1 &= \frac{1}{3}(-3x_2 - 3x_3) = 3x_4, \end{aligned}$$

also ist $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$. (1 Punkt)

Weil es drei Pivotelemente gibt (alternativ: eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ besteht aus drei Elementen), ist $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = 3$. (1 Punkt)

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Entscheiden Sie mit Begründung, ob $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ linear unabhängig ist.

Lösungshinweis:
Wir nutzen die Determinante (Determinante ungleich Null liefert Unabhängigkeit) (1 Punkt):

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -3 + 0 - 1 - 0 - 1 - 1 = -6 \neq 0. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Damit ist die Familie von Vektoren linear unabhängig. (1 Punkt)

Alternativ können wir auch den Gauß-Algorithmus nutzen:

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{-1} & 1 & 1 & \\ 1 & 3 & 1 & -(-1)G_1 \\ 0 & -1 & 1 & \\ \hline -1 & 1 & 1 & \\ 0 & \mathbf{4} & 2 & \\ 0 & -1 & 1 & -(-\frac{1}{4})G_2' \\ \hline -1 & 1 & 1 & \\ 0 & 4 & 2 & \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{3}{2}} & \end{array} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Da jede Spalte ein Pivotelement besitzt, ist der Kern der entsprechenden Matrix trivial und somit die Familie der Spalten linear unabhängig. (1 Punkt)

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Seien

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det\big(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^\top\big)$.

Lösungshinweis:
Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -8, \quad (\tfrac{1}{2} \text{ Punkte}) \\
\det(\mathbf{A}^{-1}) &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} = -\frac{1}{8}, \quad (\tfrac{1}{2} \text{ Punkte}) \\
\det(\mathbf{B}) &= \big(\tfrac{1}{2}\big)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}, \quad (\tfrac{1}{2} \text{ Punkte}) \\
\det(\mathbf{C}) &= 2 \cdot (-8) \cdot 4 = -64. \quad (\tfrac{1}{2} \text{ Punkte})
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\det\big(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^\top\big) = \det(\mathbf{A}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{C}^\top) = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot (-64) = 1. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Sei $U := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 - x_3 = 0 \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Ermitteln Sie eine Orthonormalbasis von U.

(c) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf $\mathrm{Span}\{\mathbf{n}\}$, wobei $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$ ein Normalenvektor von U ist, also $\mathbf{n} \perp U$ gilt.

Lösungshinweis:

(a) Offenbar ist $\mathbf{o} \in U$, also $U \neq \varnothing$. Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$u_1 - u_3 = 0, \quad v_1 - v_3 = 0.$$

Damit ist $(u_1 + v_1) - (u_3 + v_3) = u_1 - u_3 + v_1 - v_3 = 0$, also $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$. Ebenso ist $(\alpha u_1) - (\alpha u_3) = \alpha(u_1 - u_3) = 0$, also $\alpha \mathbf{u} \in U$. Somit ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. (2 Punkte)

Alternativ kann man feststellen, dass $U = \mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ für $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, und somit ein Unterraum ist. (2 Punkte)

(b) Mit $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $U = \mathrm{Kern}(\mathbf{A})$. Der zweite und dritte Eintrag eines Vektors liefern freie Variablen für das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$, und damit erhalten wir zunächst $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ als Basis für U. (1 Punkt) Wegen

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

ist diese Basis schon orthogonal. Wir müssen die Vektoren also nur noch normieren. Der erste ist es schon, den zweiten ersetzen wir durch $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und erhalten damit $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ als Orthonormalbasis von U. (1 Punkt)

(c) Der Vektor $\mathbf{n}$ ist ein Normalenvektor der Ebene U, also beispielsweise $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die orthogonale Projektion $\mathbf{p}$ von $\mathbf{x}$ auf $\mathrm{Span}\{\mathbf{n}\}$ ist dann gegeben durch

$$\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n} = \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 Punkt).}$$