Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Anusch Taraz

Wintersemester 2015/16

Klausur zur Mathematik I (Modul: Lineare Algebra I)
18.02.2016

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:															
Vorname:															
Matr.-Nr.:															

Stg.:	**AIW**	**BU**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**Mech**	**SB**	**VT**	**VTBio**	**Sch.**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Module „Analysis I" und „Lineare Algebra I" die Gesamtnote für das Fach „Mathematik I" ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben. Es werden insgesamt 20 Punkte vergeben.

Aufgabe	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		
5		
6		

$\sum =$

Aufgabe 1: (1+1+1+1+1 Punkte)

Sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}^2 := \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie (ohne Beweis)

(i) $\mathsf{Rang}(\mathbf{A})$, (ii) eine Basis von $\mathsf{Kern}(\mathbf{A})$, (iii) eine Basis von $\mathsf{Bild}(\mathbf{A})$,

(iv) die Lösungsmenge von $\mathbf{A}\mathbf{x}^1 = \mathbf{b}^1$, (v) die Lösungsmenge von $\mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \mathbf{b}^2$.

Lösungshinweis: Wir berechnen mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren

$$\left(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}^1 \quad \mathbf{b}^2\right) = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ \hline 2 & -1 & -2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & -4 & -6 & -2 & -8 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

(i) Wir lesen ab: $\mathsf{Rang}(\mathbf{A}) = 2$.

(ii) Über die dritte und vierte Spalte berechnen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathsf{Kern}(\mathbf{A})$.

(iii) Wir lesen ab:

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis von $\mathsf{Bild}(\mathbf{A})$.

(iv) Über

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen wir die Lösungsmenge des ersten linearen Gleichungssystems,

$$L^1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(v) Das zweite lineare Gleichungssystem ist nicht lösbar, $L^2 = \emptyset$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei

$$G := \{p \in P_5 \,:\, p(x) = p(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Beweisen Sie, dass G ein Unterraum von P_5 bezüglich der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen ist und geben Sie (ohne Beweis) eine Basis und die Dimension von G an.

Lösungshinweis: Wir suchen Polynome vom Höchstgrad 5, deren Graph sich bei der Spiegelung an der y-Achse nicht ändert. Addition und skalare Multiplikation ändern den Höchstgrad nicht. Wir untersuchen die Unterraum-Eigenschaften:

1. $0 \in G \quad \Leftarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, 0(x) = 0 = 0(-x),$

2. $\forall\, p_1, p_2 \in G \,:\, p_1 + p_2 \in G \quad \Leftarrow$
$$\forall\, p_1, p_2 \in G \;\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, (p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x) \\ = p_1(-x) + p_2(-x) = (p_1 + p_2)(-x),$$

3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \;\forall\, p \in G \,:\, \lambda \cdot p \in G \quad \Leftarrow$
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \;\forall\, p \in G \;\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, (\lambda \cdot p)(x) = \lambda \cdot p(x) \\ = \lambda \cdot p(-x) = (\lambda \cdot p)(-x).$$

Eine Basis bestimmen wir, indem wir ein beliebiges Polynom vom Höchstgrad 5 auf die verlangte Symmetrie untersuchen:

$$p \in G \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = \sum_{i=0}^{5} a_i x^i = \sum_{i=0}^{5} a_i (-1)^i x^i = \sum_{i=0}^{5} a_i (-x)^i = p(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Da $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$ eine Basis von P_5 ist, können wir die Koeffizienten vergleichen und sehen, dass für $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$a_i = (-1)^i a_i$$

gelten muss, also $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ gelten muss und a_0, a_2, a_4 beliebig sind. Damit ist die Dimension $\dim(G) = 3$ und m_0, m_2, m_4 ist eine Basis.

Alternativer Lösungshinweis: Wenn man mit dem zweiten Punkt anfängt, *beweist* man, dass $G = \mathsf{Lin}(m_0, m_2, m_4)$, also

- erstens $G \subset P_5$ als lineare Hülle ein Unterraum ist,
- die Basis m_0, m_2, m_4 aus drei linear unabhängigen Elementen besteht.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Es seien Vektoren p, $p_1, p_2, p_3 \in P_6$ definiert als

$$p \ : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & p(x) := 2x + x^3 \end{cases}, \qquad p_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & p_1(x) := x \end{cases},$$

$$p_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & p_2(x) := x^3 + x^4 + x^5 \end{cases}, \qquad p_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & p_3(x) := 2x^3 - x^4 - x^5 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $p \in \mathsf{Lin}(p_1, p_2, p_3)$, indem Sie die Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in [3]$ der Linearkombination

$$p = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i$$

berechnen.

Lösungshinweis: Das gegebene Polynom lässt sich als Linearkombination zweier Monome auffassen, $p = 2m_1 + m_3$. Das einzige Polynom mit linearem Anteil ist $p_1 = m_1$, also muss $\alpha_1 = 2$ sein, wenn $p \in \mathsf{Lin}(p_1, p_2, p_3)$ liegt. Den fehlenden kubischen Anteil bekommt man sowohl aus p_2 als auch aus p_3, die „überflüssigen“ quartischen und quintischen Anteile wird man los, indem man $p_2 + p_3 = 3m_3$ bildet.

Damit gilt

$$p = 2m_1 + m_3 = 2p_1 + {}^1\!/\!{}_3(p_2 + p_3),$$

und wir haben somit

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = {}^1\!/\!{}_3, \quad \alpha_3 = {}^1\!/\!{}_3$$

berechnet, p liegt klarerweise in $\mathsf{Lin}(p_1, p_2, p_3)$.

Alternativer Lösungshinweis: Wir entwickeln sämtliche Vektoren in der Basis m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 von P_6,

$$\begin{array}{c} \\ m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{array} \begin{array}{c} p \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

und lösen mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren (intelligenterweise nach Löschen sämtlicher Nullzeilen des Gleichungssystems) auf:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ {}^1\!/\!{}_3 \\ {}^1\!/\!{}_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (1+1 Punkte)

Es sei $\mathbf{C}$ definiert als

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{det}(\mathbf{C})$.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{det}(\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{C})$.

Lösungshinweis:

(i) Wir nutzen die Blockstruktur,

$$\operatorname{det}(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) = 4,$$

wobei die senkrechten Striche die Determinante der Matrix bezeichnen.

(ii) Wir nutzen den Determinanten-Multiplikationssatz und das Wissen, dass die Transponation die Determinante nicht ändert,

$$\operatorname{det}(\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}) = \operatorname{det}(\mathbf{C}^{\mathsf{T}}) \operatorname{det}(\mathbf{C}) = \operatorname{det}(\mathbf{C}) \operatorname{det}(\mathbf{C}) = \operatorname{det}(\mathbf{C})^2 = 16.$$

Alternativer Lösungshinweis 1:

(i) Wir verwenden die Laplace-Entwicklung (hier erst erste Zeile oder zweite Spalte, dann erste Zeile oder erste Spalte, zuletzt erste Zeile):

$$\operatorname{det}(\mathbf{C}) = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) = 4.$$

(ii) Wir berechnen die Matrix $\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}$,

$$\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

und dann deren Determinante (Laplace oder blockweise),

$$\operatorname{det}(\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}) = 4 \cdot 1 \cdot (10 \cdot 20 - 14^2) = 4 \cdot (200 - 196) = 16.$$

Alternativer Lösungshinweis 2:

(i) Wir verwenden das Gauß'sche Eliminationsverfahren:

$$\mathbf{C} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathbf{PC} = \mathbf{LR}$ die aus diesen Daten gewonnene LR-Zerlegung,

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\mathsf{det}(\mathbf{PC}) = \mathsf{det}(\mathbf{L})\,\mathsf{det}(\mathbf{R}) = -4,$$

und da nur *eine* Vertauschung der ersten und zweiten Zeile vorliegt,

$$\mathsf{det}(\mathbf{C}) = -\,\mathsf{det}(\mathbf{PC}) = 4.$$

(ii) Wir berechnen wieder $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$ und zerlegen diese Matrix dann mittels Gauß,

$$\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 14 & 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 1.4 & 0.4 \end{pmatrix},$$

daher gilt

$$\mathsf{det}(\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}) = 4 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0.4 = 16.$$

Mischformen sind denkbar.

Aufgabe 5: (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Familie

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2^{x+1} \end{array} \right. \quad \text{und} \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2^{x+2} \end{array} \right.$$

linear abhängig ist.

Lösungshinweis: Nach den Rechenregeln für Potenzen gilt

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, 2^{x+2} = 2^{(x+1)+1} = 2^{x+1} \cdot 2^1 = 2^{x+1} \cdot 2$$

und daher ist die Familie f_1, f_2 linear abhängig, denn

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, f_1(x) \cdot 2 - f_2(x) = 2^{x+1} \cdot 2 - 2^{x+2} = 2^{x+2} - 2^{x+2} = 0 = 0(x),$$

also

$$f_1 \cdot \alpha_1 + f_2 \cdot \alpha_2 = f_1 \cdot 2 + f_2 \cdot (-1) = 0, \quad \alpha_1 = 2 \neq 0, \quad \alpha_2 = -1 \neq 0.$$

Aufgabe 6: (2+3 Punkte)

(i) Bestimmen Sie (ohne Beweis) eine Basis des von den Vektoren

$$\mathbf{u}^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}^3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraums des $\mathbb{R}^3$.

(ii) Ergänzen Sie die Basis aus (i) zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ und beweisen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Basis des $\mathbb{R}^3$ handelt.

Lösungshinweis:

(i) Man kann ein kleineres Erzeugendensystem ablesen: Man sieht, dass

$$\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^2 = \mathbf{e}^1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^1 \cdot 1 + \mathbf{e}^1 \cdot 0 \in \mathsf{Lin}(\mathbf{u}^1, \mathbf{e}^1), \\ \mathbf{u}^2 = \mathbf{u}^1 \cdot 1 + \mathbf{e}^1 \cdot 1 \in \mathsf{Lin}(\mathbf{u}^1, \mathbf{e}^1), \\ \mathbf{u}^3 = \mathbf{u}^1 \cdot 1 + \mathbf{e}^1 \cdot 2 \in \mathsf{Lin}(\mathbf{u}^1, \mathbf{e}^1). \end{array}$$

Die Familie $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{e}^1$ ist linear unabhängig, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat vollen Rang. Daher ist $\mathbf{u}^1, \mathbf{e}^1$ eine Basis von $U := \mathsf{Lin}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3)$.

(ii) Wir ergänzen die beiden Vektoren um $\mathbf{e}^2$.

Wir müssen noch zeigen, dass $\mathbf{u}^1, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Es gilt

$$\mathbf{U} := \begin{array}{c} \scriptstyle 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \scriptstyle 2 \quad 1 \quad 3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \scriptstyle 2 \quad 3 \quad 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Daher gilt $\mathsf{det}(\mathbf{U}) = 3$ und demnach ist $\mathbf{u}^1, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ eine Basis.

Alternativer Lösungshinweis 1:

(i) Wir schreiben die drei Vektoren zeilenweise in eine Matrix und bemühen das Gauß'sche Eliminationsverfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\mathbf{r}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $U := \mathsf{Lin}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3)$.

(ii) Wir ergänzen die Basis um $\mathbf{e}^3$.

Dann gilt wegen $\mathsf{Rang}(\mathbf{A}) = \mathsf{Rang}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ mit

$$\mathbf{U}^\mathsf{T} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{Rang}(\mathbf{U}) = \mathsf{Rang}(\mathbf{U}^\mathsf{T}) = 3,$$

dass $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{e}^3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Alternativer Lösungshinweis 2:

(i) Wir wenden das Gauß'sche Eliminationsverfahren auf die Matrix an, die in den Spalten die Vektoren $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3$ enthält:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\mathbf{u}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $U := \mathsf{Lin}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3)$.

(ii) Wir ergänzen die Basis um $\mathbf{e}^3$.

Dann gilt aufgrund

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dass $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{e}^3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.