Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Anusch Taraz

Wintersemester 2014/15

Klausur zur Mathematik I (Modul: Lineare Algebra I)
18.02.2015

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:															
Vorname:															
Matr.-Nr.:															

Stg.:	**AIW**	**BU**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**MEC**	**SB**	**VT**	**VTBIO**	**Sch.**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Module „Analysis I“ und „Lineare Algebra I“ die Gesamtnote für das Fach „Mathematik I“ ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben. Es werden insgesamt 20 Punkte vergeben.

Aufgabe	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		
5		
6		

$\sum =$

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $(1+i)^9$.

Lösungshinweis:
Wir nutzen die Polardarstellung von $1+i$. Es gilt

$$1+i=\sqrt{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4})+i\sin(\tfrac{\pi}{4})). \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Damit rechnen wir

$$\begin{aligned}(1+i)^9 &= \left(\sqrt{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4})+i\sin(\tfrac{\pi}{4}))\right)^9\\ &= \sqrt{2}^9(\cos(\tfrac{\pi}{4})+i\sin(\tfrac{\pi}{4}))^9\\ &= 16\sqrt{2}(\cos(9\tfrac{\pi}{4})+i\sin(9\tfrac{\pi}{4}))\\ &= 16\sqrt{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4})+i\sin(\tfrac{\pi}{4}))\\ &= 16(1+i)=16+16i. \qquad \text{(1 Punkt)}\end{aligned}$$

Somit ist $\mathrm{Re}(1+i)^9=16$, $\mathrm{Im}(1+i)^9=16$. (1 Punkt)

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Berechnen Sie die inverse Matrix zu $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Lösungshinweis:
Wir nutzen das Gauß-Jordan-Verfahren:

$$
\begin{array}{ccc|ccccc}
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & -4I & \\
2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2I & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & -1 & -5 & -4 & 1 & 0 & & \text{(1 Punkt)} \\
0 & -1 & -4 & -2 & 0 & 1 & -II & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -III & \\
0 & -1 & -5 & -4 & 1 & 0 & +5III & \text{(1 Punkt)} \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & & \\
\hline
1 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & +2II & \\
0 & -1 & 0 & 6 & -4 & 5 & \cdot(-1) & \text{(1 Punkt)} \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 11 & -7 & 9 & & \\
0 & 1 & 0 & -6 & 4 & -5 & & \text{(1 Punkt)} \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & & \\
\hline
\end{array}
$$

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 9 \\ -6 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Prüfen Sie nach, ob $U := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det(A) = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation mit Skalaren) ist.

Lösungshinweis:
Es gilt $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, so dass die Nullmatrix zu U gehört.
Ebenso gilt für $A \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A) = \lambda^2 \cdot 0 = 0,$$

also auch $\lambda A \in U$ gilt.
Allerdings finden wir zwei Matrizen $A, B \in U$, so dass $A + B \notin U$ gilt. (1 Punkt)
Zum Beispiel können wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wählen. Dann ist $A + B = I_2$ die Einheitsmatrix. Offenbar gilt $\det(A) = \det(B) = 0$, also $A, B \in U$, aber $\det(A + B) = \det(I_2) = 1$, also $A + B \notin U$. (1 Punkt)
Somit ist U kein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$. (1 Punkt)

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Gegeben seien die Polynome $x+1, x-1, x^2-1 \in P_3$. Bestimmen Sie eine Basis von $V := \mathrm{Lin}(x+1, x-1, x^2-1)$. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösungshinweis:
Nach Definition von V bilden die Polynome $x+1$, $x-1$ und x^2-1 ein Erzeugendensystem für V. ($\frac{1}{2}$ Punkte)
Wir prüfen nach, ob die drei Polynome $x+1$, $x-1$ und x^2-1 linear unabängig sind. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha_1(x+1) + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(x^2-1) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Mit der Wahl $x = -1$ erhalten wir

$$-2\alpha_2 = 0,$$

also $\alpha_2 = 0$. Mit der Wahl $x = 1$ erhalten wir

$$2\alpha_1 = 0,$$

also $\alpha_1 = 0$. Mit der Wahl $x = 0$ (unter Beachtung, dass schon $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ gilt) erhalten wir

$$-\alpha_3 = 0,$$

also $\alpha_3 = 0$. (2 Punkte)
Somit sind die drei Polynome linear unabhängig und bilden damit eine Basis von V. ($\frac{1}{2}$ Punkte)

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Seien v^1, v^2, v^3 drei Vektoren in einem Vektorraum V. Wenn $v^1, v^1+v^2, v^1+v^2+v^3$ linear unabhängig sind, dann sind auch v^1, v^2, v^3 linear unabhängig.

b) Wenn $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und es $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gibt, so dass $Ax = 0$ gilt, dann gilt $\dim(S_A) < n$ (wobei S_A den Spaltenraum von A bezeichnet).

Lösungshinweis:

a) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 = 0.$$

Wegen $v^2 = (v^1+v^2) - v^1$ und $v^3 = (v^1+v^2+v^3) - (v^1+v^2)$ erhalten wir

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2((v^1+v^2) - v^1) + \alpha_3((v^1+v^2+v^3) - (v^1+v^2)) = 0,$$

also

$$(\alpha_1 - \alpha_2)v^1 + (\alpha_2 - \alpha_3)(v^1+v^2) + \alpha_3(v^1+v^2+v^3) = 0.$$

Nach Voraussetzung sind $v^1, v^1+v^2, v^1+v^2+v^3$ linear unabhängig. Damit folgt

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \quad \alpha_3 = 0. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Daraus erhalten wir $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Also sind auch v^1, v^2, v^3 linear unabhängig. (1 Punkt)

b) Wir schreiben $A = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$ als Ansammlung der Spalten von A. Das Gleichungssystem $Ax = 0$ lässt sich dann auch als

$$x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n = 0$$

schreiben, d.h. wir eine Linearkombination der Spalten ergibt den Nullvektor. Die Tatsache, dass es ein $x \neq 0$ gibt, so dass $Ax = 0$ gilt, bedeutet dann, dass wir die Spalten von A mit einer nichttrivialen Linearkombination zu Null kombinieren können. (1 Punkt)

Somit sind die Spalten linear abhängig. Es kann also mindestens eine Spalte von A durch die anderen dargestellt werden, so dass die Dimension des von den Spalten aufgespannten Vektorraums echt kleiner als n ist. (1 Punkt)

Aufgabe 6: (3 Punkte)
Berechnen Sie die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Was schließen Sie daraus in Bezug auf die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen mit dieser Matrix?

Lösungshinweis:
Wir entwickeln die Determinante nach der letzten Zeile. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 Punkt)} \\
&= -\det(1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \left(1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= 0 - 1 - 0 = -1 \quad \text{(1 Punkt)},
\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt bei dem ersten Term die Block-Dreiecksstruktur der Matrix ausgenutzt haben, und bei dem zweiten Term nochmal nach der ersten Zeile entwickelt haben. Die Determinanten der resultierenden 2×2-Matrizen haben wir direkt berechnet.

Da die Determinante dieser Matrix ungleich Null ist, ist die Matrix invertierbar, so dass jedes lineare Gleichungssystem mit dieser Matrix eine eindeutige Lösung besitzt. (1 Punkt)