Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Wolfgang Mackens

Wintersemester 2013/2014

Klausur zur Mathematik I (Modul: Lineare Algebra I)
04.02.2014

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:															
Vorname:															
Matr.-Nr.:															

Stg.:	**AIW**	**BU**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**MEC**	**SB**	**VT**	**VTBIO**	**Sch.**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Module „Analysis I" und „Lineare Algebra I" die Gesamtnote für das Fach „Mathematik I" ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie die angegebenen zwei Teile **A** und **B**. In Teil **A** werden 5 Punkte und in Teil **B** werden 15 Punkte vergeben.

Teil A		
	Punkte	**Korrekteur**
Definitionen		
Teil B		
Aufgabe	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$$\sum =$$

Teil A: Definitionen

Wählen Sie bis zu fünf der folgenden zehn Begriffe aus, und schreiben Sie deren Definitionen in die jeweils dafür vorgesehene Textlücke.

Jede korrekte Definition unter den maximal fünf ausgewählten Definitionen wird mit einem Punkt bewertet.

Schreiben Sie für mehr als fünf Begriffe Definitionen auf, so wählen wir für die Bewertung hiervon die ersten fünf.

Begriffe:
Äquivalenz, Abbildung, Kommutativität, Euklidischer Abstand, Unterraum, Linearkombination, Fourierentwicklung, Dyadisches Produkt, Diagonalmatrix, Orthogonale Matrix.

Lösungshinweis:

Äquivalenz: Zwei Aussagen A und B heißen äquivalent, falls $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, in Zeichen $A \Leftrightarrow B$:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Abbildung: Eine Abbildung f (auch Funktion genannt) einer Menge X in eine Menge Y, in Zeichen: $f\colon X \to Y$, ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet, das dann mit $f(x)$ bezeichnet wird.

Kommutativität: Eine Verknüpfung $\star$ auf einer Menge M heißt kommutativ, falls das Kommutativgesetz

$$\forall x, y \in M : x \star y = y \star x$$

gilt.

Euklidischer Abstand: Der Euklidische Abstand zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

wobei $\|x\|$ die euklidische Länge des Vektors x ist.

Unterraum: Eine Teilmenge U eines Vektorraumes V heißt Unterraum (auch Untervektorraum oder Teilraum genannt) von V, wenn U selbst ein Vektorraum mit den auf V definierten Vektorraum-Verknüpfungen ist.

Linearkombination: Zu Vektoren $v^1, \ldots, v^r$ eines Vektorraumes V heißt jeder Vektor v der Gestalt $v = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v^j$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ eine Linearkombination von $v^1, \ldots, v^r$.

Fourierentwicklung: In einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit einer Orthonormalbasis $v^1, \ldots, v^n$ heißt

$$v = \sum_{j=1}^{n} v^j \langle v^j, v \rangle$$

die Fourierentwicklung von $v \in V$.

Dyadisches Produkt: Das dyadische Produkt für $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ ist $x \cdot y^T$ aus $\mathbb{R}^{(n,m)}$.

Diagonalmatrix: $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt Diagonalmatrix, wenn $d_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.

Orthogonale Matrix: Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt orthogonal, wenn $Q^T Q = E$ ist.

Teil B: Aufgaben

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben:

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Ermitteln Sie die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = -4$. Skizzieren Sie diese in der Gauß'schen Zahlenebene.

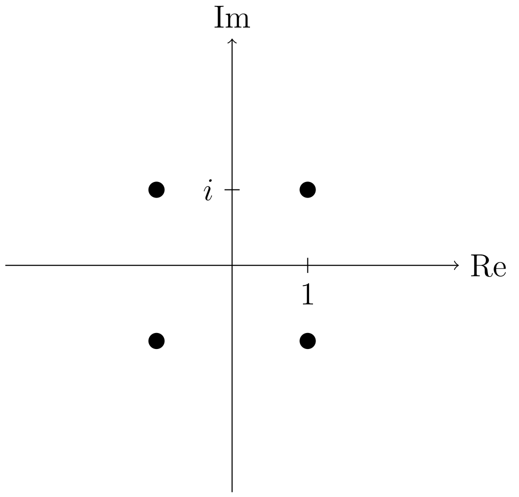
Lösungshinweis:
Mit dem Ansatz $z = re^{i\varphi}$ (Polardarstellung für z) erhalten wir

$$r^4 e^{i4\varphi} = -4 = 4e^{i\pi} = 4e^{i(\pi + k\cdot 2\pi)}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt $r^4 = 4$ und $4\varphi_k = \pi + k \cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ ($\frac{1}{2}$ Punkt). Wir erhalten damit $r = \sqrt{2}$ und $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ für $k \in \mathbb{Z}$ ($\frac{1}{2}$ Punkt). Also sind die Lösungen der Gleichung $z^4 = -4$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big) = 1 + i,\\
z_1 &= \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}\big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\big) = -1 + i,\\
z_2 &= \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}\big(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\big) = -1 - i,\\
z_3 &= \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+3\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}\big(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\big) = 1 - i \quad \text{(1 Punkt).}
\end{aligned}$$

Diese vier komplexen Zahlen bilden die Eckpunkte eines Quadrates, wie auch folgende Skizze zeigt (1 Punkt):



Aufgabe 2: (3 Punkte)
Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis des Π_1 bezüglich des durch

$$\langle p, q \rangle := \sum_{j=0}^{3} p(j)q(j)$$

definierten Skalarproduktes.

Lösungshinweis:
Wir nutzen das Gram-Schmidt-Verfahren, ausgehend von der Monombasis m_0, m_1 von Π_1. Sei $q_0 := m_0$, also $q_0(x) := 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (1 Punkt). Als zweiten Basisvektor nehmen wir

$$q_1 := m_1 - P_{q_0} m_1 = m_1 - \frac{\langle q_0, m_1 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 \quad \text{(1 Punkt).}$$

Wir rechnen also

$$\begin{aligned}
\langle q_0, m_1 \rangle &= q_0(0)m_1(0) + q_0(1)m_1(1) + q_0(2)m_1(2) + q_0(3)m_1(3) \\
&= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6, \\
\langle q_0, q_0 \rangle &= q_0(0)q_0(0) + q_0(1)q_0(1) + q_0(2)q_0(2) + q_0(3)q_0(3) \\
&= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4.
\end{aligned}$$

Damit ist $q_1(x) = m_1(x) - \frac{6}{4} q_0(x) = x - \frac{3}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (1 Punkt).

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$N\colon \begin{cases} \Pi_2 & \to & \mathbb{R}, \\ p & \mapsto & |p(0)| + |p(1)| + |p(2)| \end{cases}$$

eine Norm auf Π_2 definiert.

Lösungshinweis:
Seien $p, q \in \Pi_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\begin{aligned} N(\lambda p) &= |(\lambda p)(0)| + |(\lambda p)(1)| + |(\lambda p)(2)| = |\lambda p(0)| + |\lambda p(1)| + |\lambda p(2)| \\ &= |\lambda||p(0)| + |\lambda||p(1)| + |\lambda||p(2)| = |\lambda|\big(|p(0)| + |p(1)| + |p(2)|\big) \\ &= |\lambda| N(p) \quad \text{(1 Punkt)}, \\ N(p+q) &= |(p+q)(0)| + |(p+q)(1)| + |(p+q)(2)| \\ &= |p(0) + q(0)| + |p(1) + q(1)| + |p(2) + q(2)| \\ &\le |p(0)| + |q(0)| + |p(1)| + |q(1)| + |p(2)| + |q(2)| \\ &= \big(|p(0)| + |p(1)| + |p(2)|\big) + \big(|q(0)| + |q(1)| + |q(2)|\big) \\ &= N(p) + N(q) \quad \text{(1 Punkt)}. \end{aligned}$$

Für die Definitheit sei zunächst $p = 0$. Dann ist $N(p) = |p(0)| + |p(1)| + |p(2)| = 0$ (1 Punkt). Gilt andererseits $N(p) = 0$, also $|p(0)|+|p(1)|+|p(2)| = 0$, so hat p die Nullstellen 0, 1 und 2. Da p ein Polynom vom Höchstgrad 2 ist (da $p \in \Pi_2$), hat p jedoch maximal zwei Nullstellen, falls es nicht das Nullpolynom ist. Also muss $p = 0$ gelten. (1 Punkt)

Aufgabe 4: (5 Punkte)
Für $a \in \mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & a \\ -2 & -8 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Untersuchen Sie die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von a.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge im Fall $a = 2$.

Lösungshinweis:
Wir nutzen den Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & a & 3 \\ -2 & -8 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4-2a & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Wir lesen ab: Im Fall $a \neq 2$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, da der Rang der Matrix dann gleich 3 ist. Im Fall $a = 2$ ist der Rang der Matrix 2, das Gleichungssystem ist lösbar, die Lösung ist eine lineare Mannigfaltigkeit und die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist ein eindimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$ (2 Punkte).
Für eine spezielle Lösung des Gleichungssystems, in der die letzte Komponente gleich Null ist, lassen sich die ersten beiden Komponenten aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ermitteln, also

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und damit

$$x_{\text{speziell}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\tfrac{1}{2} \text{ Punkt}).$$

Für eine Basis des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems genügt es, eine von Null verschiedene Lösung des homogenen Gleichungssystems zu ermitteln. Wir setzen dabei die dritte Komponente gleich 1 und erhalten die anderen beiden Komponenten aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

mit der Lösung $y = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Der Vektor

$$x_h = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist also eine Basis des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems ($\frac{1}{2}$ Punkt). Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$L = x_{\text{speziell}} + L_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$