Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Wolfgang Mackens

Wintersemester 2012/2013

Klausur zur Mathematik I (Modul: Lineare Algebra I) 07.02.2013: Lösungshinweise

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:	**M U S T E R S T U D E N T**
Vorname:	**M A X**
Matr.-Nr.:	**4 2**
Studiengang:	**Mitarbeiter**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Module „Analysis I" und „Lineare Algebra I" die Gesamtnote für das Fach „Mathematik I" ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie die angegebenen zwei Teile **A** und **B**. In Teil **A** werden 5 Punkte und in Teil **B** werden 15 Punkte vergeben.

Teil A		
Definition	**Punkte**	**Korrekteur**

Teil B		
Aufgabe	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Teil A: Definitionen

Wählen Sie bis zu fünf der folgenden zehn Begriffe aus, und schreiben Sie deren Definitionen in die jeweils dafür vorgesehene Textlücke.

Jede korrekte Definition unter den maximal fünf ausgewählten Definitionen wird mit einem Punkt bewertet.

Schreiben Sie für mehr als fünf Begriffe Definitionen auf, so wählen wir für die Bewertung hiervon die ersten fünf.

Begriffe: Allquantor; Linke Dreiecksmatrix; Reguläre Matrix; Normierter Raum; Dyadisches Produkt; Metrik; Summennorm; Definitionsbereich; Aussage; Lineare Abhängigkeit

Allquantor: Der Allquantor $\forall$ dient der Kurzschreibweise $\forall x : A(x)$ für „für alle x ist $A(x)$ wahr".

Linke Dreiecksmatrix: Eine Matrix $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt linke oder untere Dreiecksmatrix, wenn $l_{ij} = 0$ für $j > i$.

Reguläre Matrix: Eine quadratische (n, n)-Matrix heißt regulär, wenn $\text{Rang}(A) = n$ ist.

Normierter Raum: Ein Vektorraum mit einer darauf erklärten Norm heißt ein normierter Vektorraum oder kurz ein normierter Raum.

Dyadisches Produkt: Das dyadische Produkt für $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ ist $x \cdot y^T$ aus $\mathbb{R}^{(n,m)}$.

Metrik: Für eine beliebige Menge M heißt eine Abbildung

$$d : \begin{cases} M \times M & \to \quad \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto \quad d(u, v) \end{cases}$$

eine Metrik auf M, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten:

$$\begin{array}{llll} (i) & d(u,v) = 0 \iff u = v & \forall u, v \in M, & \\ (ii) & d(u,v) = d(v,u) & \forall u, v \in M, & \text{(Symmetrie)} \\ (iii) & d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w) & \forall u, v, w \in M. & \text{(Dreiecksungleichung)} \end{array}$$

Summennorm: Die Summennorm oder 1-Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Definitionsbereich: Der Definitionsbereich einer Abbildung $f : X \to Y$ ist die Menge X.

Aussage: Eine Aussage ist ein schriftliches oder sprachliches Gebilde, das entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

Lineare Abhängigkeit: Vektoren $v^1, \ldots, v^r$ eines Vektorraumes V heißen linear abhängig, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v^j = 0$ ist und $\lambda_i \neq 0$ ist für ein $i \in \{1, \ldots, r\}$. Anderenfalls heißen sie linear unabhängig.

Teil B: Aufgaben

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben:

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es bezeichne Π_1 den Vektorraum der Polynome vom Höchstgrad Eins,

$$\Pi_1 := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = ax + b \; \forall x \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

mit der üblichen Addition zweier Funktionen und der üblichen skalaren Multiplikation einer Funktion mit einer reellen Zahl. Es sei die Abbildung s definiert als

$$s : \begin{cases} \Pi_1 \times \Pi_1 & \to \quad \mathbb{R}, \\ \quad (p, q) & \mapsto \quad p(0) \cdot q(0) + p'(1) \cdot q'(2). \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie: s ist ein Skalarprodukt auf Π_1.

Lösungshinweis: Da die Polynome den Höchstgrad Eins haben, ist die Ableitung konstant, also gilt insbesondere (2 Punkte)

$$p'(1) = p'(2) \quad \forall p \in \Pi_1. \tag{1}$$

Damit gilt für alle $p, p_1, p_2, q \in \Pi_1$, $p(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
s(p,q) &\overset{\text{Def. } s}{=} p(0) \cdot q(0) + p'(1) \cdot q'(2) \\
&\overset{(1)}{=} p(0) \cdot q(0) + p'(2) \cdot q'(1) \overset{\text{Def. } s}{=} s(q,p) && \text{(Symmetrie)} \\
s(\lambda \cdot p, q) &\overset{\text{Def. } s}{=} (\lambda \cdot p)(0) \cdot q(0) + (\lambda \cdot p)'(1) \cdot q'(2) \\
&\overset{\text{Def. skal. Mult., Abl.}}{=} \lambda \cdot p(0) \cdot q(0) + \lambda \cdot p'(1) \cdot q'(2) \\
&\overset{\text{Def. } s}{=} \lambda \cdot s(p,q). && \text{(Homogenität)} \\
s(p_1 + p_2, q) &\overset{\text{Def. } s}{=} (p_1 + p_2)(0) \cdot q(0) + (p_1 + p_2)'(1) \cdot q'(2) \\
&\overset{\text{Vektoradd., Abl.}}{=} (p_1(0) + p_2(0)) \cdot q(0) + (p_1'(1) + p_2'(1)) \cdot q'(2) \\
&\overset{\text{Distr., Komm. } \mathbb{R}}{=} p_1(0) \cdot q(0) + p_1'(1) \cdot q'(2) + p_2(0) \cdot q(0) + p_2'(1) \cdot q'(2) \\
&\overset{\text{Def. } s}{=} s(p_1, q) + s(p_2, q). && \text{(Additivität)} \\
s(p,p) &\overset{\text{Def. } s}{=} p(0) \cdot p(0) + p'(1) \cdot p'(2) \\
&\overset{(1)}{=} p(0) \cdot p(0) + p'(1) \cdot p'(1) \\
&= (p(0))^2 + (p'(1))^2 = b^2 + a^2 \geqslant 0. && \text{(Semidefinitheit)}
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist als Summe zweier Quadrate reeller Zahlen genau dann Null, wenn beide quadrierten reellen Zahlen Null sind, also $p(x) = ax + b = 0 \cdot x + 0 = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, also p das Nullpolynom ist. Damit gilt $s(p,p) > 0 \; \forall p \in \Pi_1 \setminus 0$. (Pro Eigenschaft: 0.5 Punkte.)
Alternativ stellt man fest, dass für alle $p \in \Pi_1$ gilt

$$p(x) = ax + b = p'(0)x + p(0) = p'(1)x + p(0),$$

also $p = p'(1) \cdot m_1 + p(0) \cdot m_0$, also der Vektor

$$\begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

der Koeffizientenvektor von p zur Monombasis ist, und dass die angegebene Abbildung dann dem Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^2$ der Koeffizientenvektoren entspricht.

Aufgabe 2: (1+2 Punkte)
Sei $v \in \mathbb{R}^3$ gegeben als

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und sei L definiert durch

$$L : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & x \times v \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: L ist linear.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von L bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ im Urbild- und im Bildraum.

Lösungshinweis: Wir setzen die Rechenregeln des Kreuzproduktes im $\mathbb{R}^3$ als bekannt voraus. Dann gilt:

a) Die Abbildung ist linear, da das Kreuzprodukt es ist (1 Punkt), genauer:

$$\begin{aligned} L(\lambda \cdot x) &\overset{\text{Def. } L}{=} (\lambda \cdot x) \times v = \lambda \cdot (x \times v) \\ &\overset{\text{Def. } L}{=} \lambda \cdot L(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, && \text{(Homogenität)} \\ L(x^1 + x^2) &\overset{\text{Def. } L}{=} (x^1 + x^2) \times v = x^1 \times v + x^2 \times v \\ &\overset{\text{Def. } L}{=} L(x^1) + L(x^2) \quad \forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^3. && \text{(Additivität)} \end{aligned}$$

b) Die Matrixdarstellung von L bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ im Urbild- und im Bildraum erhalten wir, indem wir die Standardbasis e^1, e^2, e^3 des $\mathbb{R}^3$ in L einsetzen (1 Punkt):

$$L(e^1) = e^1 \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$L(e^2) = e^2 \times v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$L(e^3) = e^3 \times v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Diese müssen nach der zweiten Basis entwickelt werden, was sie bereits sind; sie sind ja in der Standardbasis gegeben. Spaltenweise in eine Matrix geschrieben erhalten wir also die Matrixdarstellung M von L (1 Punkt) zu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Berechnen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystemes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweis: Das Gauß'sche Eliminationsverfahren wird verwendet, um die Matrix auf obere Dreiecksgestalt zu bringen, wobei die rechte Seite gleich mittransformiert wird (pro Schritt 1 Punkt):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem ist also lösbar, da b im Bild von A ist. Dieses ist erkennbar an den Nullen in den Zeilen der transformierten rechten Seite, wo Nullzeilen in A entstanden sind. Die Lösungsmenge L hat also die Gestalt $L = x^0 + \mathrm{Kern}(A)$. Diese können wir beschreiben mithilfe einer speziellen Lösung x^0 und einer Basis des eindimensionalen Kernes[1] (1 Punkt).
Wir berechnen die eindeutige spezielle Lösung, in der die letzte Komponente gleich Null ist; die beiden anderen Komponenten erfüllen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y_{\text{speziell}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad y_{\text{speziell}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

also ist unsere gesuchte spezielle Lösung x^0 (1 Punkt) gleich

$$x^0 := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter bestimmen wir den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems durch einen Basisvektor, dessen letzte Komponente wir gleich Eins setzen, die anderen beiden Komponenten werden dann berechnet über

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y_{\text{homogen}} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad y_{\text{homogen}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ist also eine Basis des Kernes (1 Punkt).
Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$L := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

[1] Die Dimension des Kernes berechnet sich als Anzahl der Spalten minus dem Rang der Matrix, also $3 - 2 = 1$.

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Ergänzen Sie

$$p_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & x^2 + x - 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad p_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & x^2 - x + 1 \end{cases}$$

zu einer Basis des Π_2. Beweisen Sie dabei auch, dass es sich wirklich um eine Basis handelt.

Lösungshinweis: Die beiden Polynome sind laut Aufgabenstellung linear unabhängig, der Π_2 hat die Dimension drei. Also wird noch ein drittes Polynom $p_3 \in \Pi_2$ benötigt (1 Punkt), so dass alle drei linear unabhängig sind, siehe die nachfolgende Rechnung (1 Punkt). Wir wählen $p_3 := m_0$ (1 Punkt).

Mit diesen drei Polynomen kann man jetzt alle drei Monome $m_0, m_1, m_2 \in \Pi_2$ wie folgt darstellen:

$$m_0 = p_3, \quad m_1 = (p_1 - p_2)/2 + p_3, \quad m_2 = (p_1 + p_2)/2.$$

Da die drei Monome m_0, m_1, m_2 eine Basis des Π_2 darstellen, sind die drei Polynome p_1, p_2, p_3 auch eine Basis des Π_2.

Ende der Klausur