Technische Universität Hamburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Marko Lindner

Sommersemester 2017

Klausur zur Mathematik I (Modul: Lineare Algebra I)
01.09.2017

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg.:	**AIW**	**BU**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**MEC**	**SB**	**VT**	**VTBIO**	**Sch.**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Module „Analysis I“ und „Lineare Algebra I“ die Gesamtnote für das Fach „Mathematik I“ ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben. Es werden insgesamt 20 Punkte vergeben.

Aufgabe	**Punkte**	**Korrektor**
1		
2		
3		
4		
5		

$\sum =$

Aufgabe 1: (4 Punkte)

(a) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die linear und bijektiv ist.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

Lösungshinweis:

(a) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ regulär. Dann ist $f_{\mathbf{A}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x}$ linear und bijektiv. (1 Punkt) Es genügt also, eine reguläre 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ anzugeben, beispielsweise

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

(b) Der Flächeninhalt lässt sich mittels des Kreuzprodukts berechnen. Es gilt

$$\left|\text{Fläche}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = 5. \quad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweis:
Wir führen den Gauß-Algorithmus aus:

$$\begin{array}{rrrr|rr}
\mathbf{2} & 0 & 2 & -4 & 16 & \\
-2 & -2 & 1 & 2 & -3 & -(-1)G_1 \\
1 & 4 & -5 & 2 & -18 & -\frac{1}{2}G_1 \\
\hline
\mathbf{2} & 0 & 2 & -4 & 16 & \\
0 & \mathbf{-2} & 3 & -2 & 13 & \\
0 & 4 & -6 & 4 & -26 & -(-2)G_2' \\
\hline
\mathbf{2} & 0 & 2 & -4 & 16 & \\
0 & \mathbf{-2} & 3 & -2 & 13 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Wir lesen ab: Das Gleichungssystem ist lösbar, der Rang der Koeffizientenmatrix ist 2 (2 Pivotelemente), es gibt damit $4 - 2 = 2$ freie Variablen, nämlich x_3 und x_4. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
-2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 13 &\Longrightarrow x_2 = -\frac{13}{2} + \frac{3}{2}x_3 - x_4, \\
2x_1 + 2x_3 - 4x_4 = 16 &\Longrightarrow x_1 = 8 - x_3 + 2x_4. \quad \text{(2 Punkte)}
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist damit gegeben durch

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ -\frac{13}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Ermitteln Sie alle $t \in \mathbb{R}$, so dass $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2+t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösungshinweis:
Die Familie aus den drei Vektoren ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$, falls sie linear unabhängig ist. (1 Punkt) Dies können wir mittels der Determinante prüfen (die Determinante muss verschieden von Null sein). Wir rechnen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2+t & t & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -t + 0 + (2t + t^2) - t^2 - 1 - 0 = t - 1. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Damit schließen wir, dass $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2+t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ für $t \neq 1$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(1 Punkt)

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$. Sind Gleichungssysteme mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ für alle rechten Seiten eindeutig lösbar?

Lösungshinweis:
Die Matrix hat Blockdreiecksgestalt. Damit gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (\tfrac{1}{2} \text{ Punkte})$$

Wir rechnen zunächst direkt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = -1, \quad (\tfrac{1}{2} \text{ Punkte})$$

und nutzen danach Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte und erhalten

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 24) - (24 + 0 + 0 - 24 - 0 - 24) = 0. \quad (1\tfrac{1}{2} \text{ Punkte})$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -1 \cdot 0 = 0. \quad (\tfrac{1}{2} \text{ Punkte})$$

Damit sind Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ entweder nicht lösbar, oder es gibt unendlich viele Lösungen (je nachdem, ob die rechte Seite zum Bildraum von $\mathbf{A}$ gehört oder nicht). (1 Punkt)

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Ermitteln Sie denjenigen Vektor $\mathbf{v} \in \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, der zu $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ minimalen Abstand besitzt.

Lösungshinweis:

Seien $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $\mathbf{p}$ die Projektion von $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ auf $\mathrm{Span}\{\mathbf{r}\}$. Dann ist $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{p}$. (1 Punkt) Wir rechnen

$$\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle}{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle} \mathbf{r} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{9}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(2 Punkte)}$$

und

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 Punkt)}$$