Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Anusch Taraz

Sommersemester 2016

Klausur zur Mathematik I (Modul: Lineare Algebra I)
02.09.2016

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:															
Vorname:															
Matr.-Nr.:															

Stg.:	**AIW**	**BU**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**Mech**	**SB**	**VT**	**VTBio**	**Sch.**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Module „Analysis I" und „Lineare Algebra I" die Gesamtnote für das Fach „Mathematik I" ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben. Es werden insgesamt 20 Punkte vergeben.

Aufgabe	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		
5		
6		

$\sum =$

Aufgabe 1: (1+1+1+1+1 Punkte)

Sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie (ohne Beweis)

(i) $\mathsf{Rang}(\mathbf{A})$, (ii) eine Basis von $\mathsf{Kern}(\mathbf{A})$, (iii) eine Basis von $\mathsf{Bild}(\mathbf{A})$,

(iv) die Lösungsmenge von $\mathbf{A}\mathbf{x}^1 = \mathbf{b}^1$, (v) die Lösungsmenge von $\mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \mathbf{b}^2$.

Lösungshinweis: Wir berechnen mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}^1 \quad \mathbf{b}^2\right) \\ &= \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 9 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ \hline 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \end{aligned}$$

(i) Wir lesen ab: $\mathsf{Rang}(\mathbf{A}) = 2$.

(ii) Über die dritte Spalte berechnen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathsf{Kern}(\mathbf{A})$.

(iii) Wir lesen ab:

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis von $\mathsf{Bild}(\mathbf{A})$.

(iv) Über

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen wir die Lösungsmenge des ersten linearen Gleichungssystems,

$$L^1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(v) Das zweite lineare Gleichungssystem ist nicht lösbar, $L^2 = \emptyset$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass

$$U := \{p \in P_4 \,:\, \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, p(-3x) = -p(3x)\}$$

ein Unterraum von P_4 bezüglich der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen ist und geben Sie (ohne Beweis) eine Basis und die Dimension von U an.

Lösungshinweis: Ein allgemeines Polynom aus dem P_4 hat die Gestalt

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

für $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Wir setzen diese Gestalt in beide Seiten der U definierenden Gleichung ein:

$$\begin{aligned} p(-3x) &= +81ax^4 - 27bx^3 + 9cx^2 - 3dx + e \\ &= +81am_4(x) - 27bm_3(x) + 9cm_2(x) - 3dm_1(x) + em_0(x), \\ -p(3x) &= -81ax^4 - 27bx^3 - 9cx^2 - 3dx - e \\ &= -81am_4(x) - 27bm_3(x) - 9cm_2(x) - 3dm_1(x) - em_0(x). \end{aligned}$$

Da diese beiden Seiten für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich sein müssen, folgt

$$81am_4 - 27bm_3 + 9cm_2 - 3dm_1 + em_0 = -81am_4 - 27bm_3 - 9cm_2 - 3dm_1 - em_0.$$

Da die Monome m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 eine Basis des P_4 bilden, sind die beiden Seiten genau dann gleich, wenn vor den Monomen dieselben reellen Zahlen stehen, damit gilt $a = c = e = 0$. Die Gleichung $p(-3x) = -p(3x)$ beinhaltet keinerlei Forderung an die ungeraden Monome, daher gilt

$$U = \mathsf{Lin}(m_1, m_3).$$

Die Menge U ist von m_1 und m_2 erzeugt, also ein Unterraum.

Da die beiden erzeugenden Monome linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U, womit $\mathsf{dim}(U) = 2$.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Familie

$$f_1 : \begin{cases} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{cases} \qquad \text{und} \quad f_2 : \begin{cases} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{cases}$$

linear unabhängig ist.

Lösungshinweis: Wir müssen zeigen, dass

$$f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 = o \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

wobei o die Nullfunktion ist. Es gilt

$$\begin{aligned} & f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 = o \\ \Leftrightarrow \quad & \forall\, x \in [-1,1] \,:\, f_1(x)\alpha_1 + f_2(x)\alpha_2 = o(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \forall\, x \in \{-1,1\} \,:\, f_1(x)\alpha_1 + f_2(x)\alpha_2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{array}{r} \\ x_1 = -1 \\ x_2 = +1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_1 & f_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (2 Punkte)

Berechnen Sie alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$, für die die Familie

$$\begin{pmatrix} 6 \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear abhängig ist.

Lösungshinweis: Die beiden Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn die Matrix

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 6 & a+4 \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

singulär ist,

$$\mathsf{det}(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 6 & a+4 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 12 - a(a+4) = (2-a)(6+a) = 0.$$

Die einzigen beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind die beiden reellen Zahlen $a = 2$ und $a = -6$.

Aufgabe 5: (2+1 Punkte)

Gegeben seien die Polynome $p, q, r \in P_2$ mit

$$p(x) := x^2 - x, \quad q(x) := x + 1, \quad r(x) := x^2 + 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie (mit Beweis) eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathsf{Lin}(p, q, r)$.

(ii) Ergänzen Sie (ohne Beweis) die Basis $\mathcal{B}$ zu einer Basis von P_2.

Lösungshinweis:

(i) Die drei Polynome sind linear abhängig, da

$$q = r - p \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R} : \; q(x) = x + 1 = r(x) - p(x) = (x^2 + 1) - (x^2 - x).$$

Wir lassen $q \in \mathsf{Lin}(p, r) = \mathsf{Lin}(p, q, r)$ weg.

Die beiden Polynome p und r sind linear unabhängig, da die Spalten der Matrix

$$\begin{array}{c} \\ m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

linear unabhängig sind. Daher ist p, r eine Basis von $\mathsf{Lin}(p, q, r)$.

(ii) Wir ergänzen die Basis von $\mathsf{Lin}(p, q, r) = \mathsf{Lin}(p, r)$ um m_2 und erhalten dank der Regularität der Matrix

$$\begin{array}{c} \\ m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_2 & p & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

mit m_2, p, r eine Basis des P_2.

Aufgabe 6: (1+1+1+1 Punkte)

Gegeben seien ein Vektorraum V und drei Vektoren $v^1, v^2, v^3 \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr/falsch? Beweisen Sie die Aussage/geben Sie ein Gegenbeispiel an!

(i) Wenn die Familie v^1, v^2, v^3 linear unabhängig ist, dann gilt $\mathsf{dim}(V) = 3$.

(ii) Wenn die Familie v^1, v^2, v^3 linear abhängig ist, dann gilt $\mathsf{dim}(V) < 3$.

(iii) Wenn $\mathsf{dim}(V) > 3$ gilt, dann ist die Familie v^1, v^2, v^3 keine Basis von V.

(iv) Wenn $\mathsf{dim}(V) < 3$ gilt, dann gilt $v^1 \in \mathsf{Lin}(v^2, v^3)$.

Lösungshinweis:

(i) **falsch**: für das Gegenbeispiel $V = \mathbb{R}^4$, $v^i = \mathbf{e}^i$, $i \in [3]$ gilt $\mathsf{dim}(V) = 4$ und die Familie v^1, v^2, v^3 ist linear unabhängig.

(ii) **falsch**: für das Gegenbeispiel $V = \mathbb{R}^3$, $v^1 = v^2 = v^3 = \mathbf{e}^1$ ist die Familie v^1, v^2, v^3 linear abhängig, aber es gilt $\mathsf{dim}(V) = 3$.

(iii) **wahr**: die Dimension ist die Anzahl der Basisvektoren *jeder* möglichen Basis, also kann keine Basis aus weniger Vektoren bestehen.

(iv) **falsch**: für das Gegenbeispiel $V = \mathbb{R}^2$, $v^1 = \mathbf{e}^1$, $v^2 = v^3 = \mathbf{o}$ gilt $\mathsf{dim}(V) = 2 < 3$, aber $\mathbf{e}^1 \notin \mathsf{Lin}(\mathbf{o}, \mathbf{o}) = \{\mathbf{o}\}$.