Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Anusch Taraz

Sommersemester 2015

Klausur zur Mathematik I (Modul: Lineare Algebra I)
28.08.2015

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:															
Vorname:															
Matr.-Nr.:															

Stg.:	**AIW**	**BU**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**MEC**	**SB**	**VT**	**VTBIO**	**Sch.**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Module „Analysis I" und „Lineare Algebra I" die Gesamtnote für das Fach „Mathematik I" ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben. Es werden insgesamt 20 Punkte vergeben.

Aufgabe	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		
5		
6		

$\sum =$

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Ermitteln Sie die Polardarstellung von $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}+i}$.

Lösungshinweis:
Es gilt

$$\begin{aligned} z &= \frac{1-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{1-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}+i} \cdot \frac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}+2i}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \qquad \text{(1 Punkt).} \end{aligned}$$

Es gilt $r = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ (1 Punkt), und wegen $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ gilt

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{r}\right) = \arccos\bigl(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\bigr) = \frac{5}{6}\pi \qquad \text{(1 Punkt).}$$

Aufgabe 2: (2 Punkte)
Berechnen Sie die Determinante von

$$B := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweis:
Es gilt

$$\begin{aligned} \det(B) &= \big(\frac{1}{2}\big)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} && \text{(1 Punkt)} \\ &= \frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} && (\tfrac{1}{2}\text{ Punkte}) \\ &= \frac{1}{16} \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 4) \cdot (3 \cdot (-4) - 2 \cdot 2) && (\tfrac{1}{2}\text{ Punkte}) \\ &= \frac{1}{16} \cdot (-6) \cdot (-16) = 6. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie $\mathrm{Rang}(A)$ und $\mathrm{Kern}(A)$.

b) Geben Sie die Menge aller $b \in \mathbb{R}^3$ an, für die das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist.

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Lösungshinweis:

a) Umformung der Matrix A in Zeilenstufenform ergibt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat zwei Pivot-Elemente, und damit ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$ ($\frac{1}{2}$ Punkte). Also ist der Kern der Matrix A eindimensional. Offensichtlich erfüllt der Vektor $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Gleichung $Ax = 0$, so dass $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ist ($\frac{1}{2}$ Punkte).

b) Damit das Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist, also mindestens eine Lösung besitzt, muss b eine Linearkombination der Spalten von A sein. Damit ergibt sich $\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ als die Menge aller solcher b's (da die zweite Spalte von A der Nullvektor in $\mathbb{R}^3$ ist, liefert diese Spalte bei der linearen Hülle keinen Beitrag). Umformuliert bedeutet das also, dass $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 2b_1 + 2b_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$ für beliebige $b_1, b_3 \in \mathbb{R}$ sein kann (1 Punkt).

c) Gilt $b_2 \neq 2b_1 + 2b_3$, so ist das lineare Gleichungssystem $Ax = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ nicht lösbar (1 Punkt).

Gilt $b_2 = 2b_1 + 2b_3$, so ist ist das Gleichungssystem nach Teil **b)** lösbar. Wir rechnen die Lösungsmenge aus:

$$
\begin{array}{ccc|cc}
1 & 0 & 0 & b_1 & \\
2 & 0 & 2 & 2b_1 + 2b_3 & -2\mathrm{I} - 2\mathrm{III} \\
0 & 0 & 1 & b_3 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & b_1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & b_3 & \\
\hline
\end{array}
$$

Somit ist $x_1 = b_1$, $x_2 = t \in \mathbb{R}$ die freie Variable, und $x_3 = b_3$, also $\left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ t \\ b_3 \end{pmatrix} \;:\; t \in \mathbb{R} \right\}$ die Lösungsmenge (1 Punkt).

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Berechnen Sie $\dim\left(\operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}\right)\right)$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

Lösungshinweis:
Wir betrachten dazu die von t abhängige Matrix

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 5 \\ 0 & t & 2 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix}$$

und bestimmen deren Rang, denn der Rang einer Matrix ist gleich der Dimension des Spaltenraums der Matrix.
Überführung auf Zeilenstufenform ergibt

$$\begin{array}{ccc|l} t & 0 & 5 & \\ 0 & t & 2 & \\ 1 & 2 & t & \text{Tausch I und III} \\ \hline 1 & 2 & t & \\ 0 & t & 2 & \\ t & 0 & 5 & -t\mathrm{I} \\ \hline 1 & 2 & t & \\ 0 & t & 2 & \\ 0 & -2t & 5-t^2 & +2\mathrm{II} \\ \hline 1 & 2 & t & \\ 0 & t & 2 & \\ 0 & 0 & 9-t^2 & \\ \hline \end{array}$$

(2 Punkte)

Wir lesen ab: Für $t \in \{-3, 3\}$ ist der Rang der Matrix 2 $(\frac{1}{2}$ Punkte). Ebenso ist für $t = 0$ der Rang gleich 2, denn dann ist das zweite Element in der zweiten Zeile kein Pivot-Element (1 Punkte). Falls $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$ ist, so ist der Rang der Matrix gleich 3 $(\frac{1}{2}$ Punkte).

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Wenn $A^{-1} = A^T$, dann ist $\det(A) = 1$.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Wenn $\det(A) = 1$, dann ist $A^{-1} = A^T$.

Lösungshinweis:

a) Sei A invertierbar und es gelte $A^{-1} = A^T$. Wegen $1 = \det(I_n) = \det(A)\cdot\det(A^{-1}) = \det(A)\cdot\det(A^T)$ und $\det(A) = \det(A^T)$ gilt

$$\det(A)^2 = 1,$$

also $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Die Behauptung ist also falsch, wenn wir eine Matrix A mit $A^{-1} = A^T$ und $\det(A) = -1$ finden. Einige Beispiele einer solchen Matrix sind aber

$$A = -1, \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(2 Punkte).}$$

b) Sei A invertierbar und es gelte $\det(A) = 1$. Die Determinante einer Diagonalmatrix ist gerade das Produkt der Diagonalelemente. Außerdem gilt für eine Diagonalmatrix, dass sie mit ihrer Transponierten übereinstimmt. Die Inverse einer Diagonalmatrix ist ebenfalls eine Diagonalmatrix, mit den Inversen der Diagonalelemente auf der Diagonalen. Mit diesen drei Fakten lassen sich relativ einfach Gegenbeispiele erstellen, zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Aussage ist also falsch (2 Punkte).

Aufgabe 6: (3 Punkte)
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien U_1 und U_2 Unterräume von V. Zeigen Sie, dass dann auch

$$U_1 - U_2 := \{u_1 - u_2 : \ u_1 \in U_1, \ u_2 \in U_2\}$$

ein Unterraum von V ist.

Lösungshinweis:
Da U_1 und U_2 Unterräume von V sind, gelten $0 \in U_1$ und $0 \in U_2$ (Unterräume beinhalten immer den Nullvektor). Damit ist

$$0 = 0 - 0 \in U_1 - U_2 \quad \text{(1 Punkt).}$$

Seien $u, v \in U_1 - U_2$. Dann gibt es $u_1, v_1 \in U_1$ und $u_2, v_2 \in U_2$, so dass $u = u_1 - u_2$ und $v = v_1 - v_2$ gelten. Wegen

$$u + v = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) = (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2),$$

und $u_1 + v_1 \in U_1$, $u_2 + v_2 \in U_2$ erhalten wir also $u + v \in U_1 - U_2$ (1 Punkt).
Sei nun $u \in U_1 - U_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $u = u_1 - u_2$. Wegen

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (u_1 - u_2) = \lambda \cdot u_1 - \lambda \cdot u_2,$$

und $\lambda \cdot u_1 \in U_1$, $\lambda \cdot u_2 \in U_2$ erhalten wir also $\lambda \cdot u \in U_1 - U_2$ (1 Punkt).