Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Wolfgang Mackens

Sommersemester 2014

Klausur zur Mathematik I (Modul: Lineare Algebra I)
26.08.2014

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg.:	**AIW**	**BU**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**MEC**	**SB**	**VT**	**VTBIO**	**Sch.**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Module „Analysis I“ und „Lineare Algebra I“ die Gesamtnote für das Fach „Mathematik I“ ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie die angegebenen zwei Teile **A** und **B**. In Teil **A** werden 5 Punkte und in Teil **B** werden 15 Punkte vergeben.

Teil A		
	Punkte	**Korrekteur**
Definitionen		
Teil B		
Aufgabe	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Teil A: Definitionen

Wählen Sie bis zu fünf der folgenden zehn Begriffe aus, und schreiben Sie deren Definitionen in die jeweils dafür vorgesehene Textlücke.

Jede korrekte Definition unter den maximal fünf ausgewählten Definitionen wird mit einem Punkt bewertet.

Schreiben Sie für mehr als fünf Begriffe Definitionen auf, so wählen wir für die Bewertung hiervon die ersten fünf.

Begriffe:
injektiv, Assoziativität, Spatprodukt, Erzeugendensystem, Basis, Norm, lineare Mannigfaltigkeit, lineare Abbildung, Kongruenztransformation, Permutationsmatrix.

Lösungshinweis:

injektiv: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt injektiv, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ schon $x_1 = x_2$ folgt, in Zeichen: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Assoziativität: Eine Verknüpfung $\star$ auf einer Menge M heißt assoziativ, falls das Assoziativgesetz

$$\forall x, y, z \in M : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

gilt.

Spatprodukt: Unter dem Spatprodukt dreier Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ versteht man die reelle Zahl $\langle x \times y, z \rangle$.

Erzeugendensystem: Ist jedes Element v eines Vektorraumes V Linearkombination von Vektoren $v^1, \ldots, v^r$, so spannen diese den Vektorraum V auf und werden als Erzeugendensystem bezeichnet.

Basis: Vektoren $v^1, \ldots, v^r \in V$ eines Vektorraums V heißen Basis von V, wenn sie ein Erzeugendensystem bilden und $v^1, \ldots, v^r$ linear unabhängig sind.

Norm: Eine auf einem Vektorraum definierte Abbildung

$$\|\cdot\|\colon \begin{cases} V & \to & \mathbb{R}, \\ v & \mapsto & \|v\|, \end{cases}$$

heißt Norm, wenn für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden drei Bedingungen gelten:

i) $\|v\| = 0 \iff v = 0$,
ii) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$,
iii) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Lineare Mannigfaltigkeit: Es sei V ein Vektorraum, U ein Unterraum von V und $v \in V$. Dann heißt die Menge $L := v+U := \{v + u \mid u \in U\}$ eine lineare Mannigfaltigkeit (oder ein affiner Raum) in V.

Lineare Abbildung: Eine Abbildung $T\colon V \to W$ eines Vektorraumes V in einen Vektorraum W heißt linear, wenn für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die beiden Bedingungen

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$,

- $T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(v)$,

gelten.

Kongruenztransformation: Lineare Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich, die euklidische Längen und Winkel erhalten, heißen Kongruenztransformationen.

Permutationsmatrix: Eine Permutationsmatrix ist eine Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 und sonst nur lauter Nullen enthält.

Teil B: Aufgaben

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben:

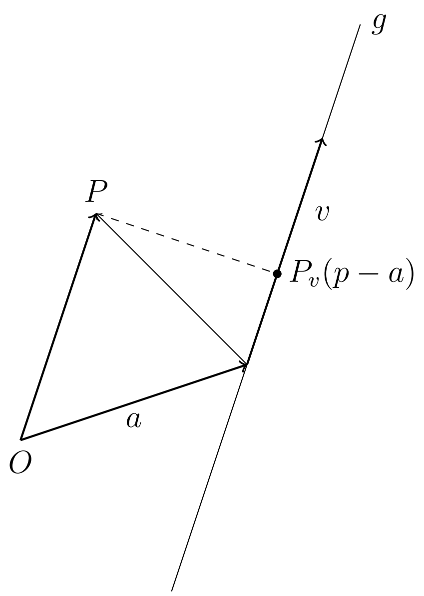
Aufgabe 1: (3 Punkte)
Berechnen Sie den euklidischen Abstand des Punktes $P = (1, 5, 5)$ von der Geraden $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösungshinweis:
Es ist $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ der Ortvektor zu P, $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Stützvektor der Gerade g und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von g.
Wir ermitteln die Projektion von $p - a$ auf v (1 Punkt):

$$P_v(p-a) = \frac{\langle p-a, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = \frac{-1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 Punkt).}$$

Damit ist der Abstand von P zu g gegeben durch

$$\|p - a - P_v(p-a)\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14} \qquad \text{(1 Punkt).}$$



Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine injektive Abbildung. Prüfen Sie, ob

$$d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) := |f(x) - f(y)|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

Lösungshinweis:
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $d(x,x) = |f(x) - f(x)| = 0$ (1 Punkt). Aus $0 = d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ folgt $f(x) = f(y)$, und mit der Injektivität von f folgt $x = y$. Also ist d definit (1 Punkt).
Für die Symmetrie rechnen wir (unter Ausnutzung der Symmetrie für den Betrag)

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y,x) \quad \text{(1 Punkt)}.$$

Für die Dreiecksungleichung rechnen wir

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d(x,y) + d(y,z), \end{aligned}$$

wobei wir die Dreiecksungleichung für den Betrag reeller Zahlen benutzt haben (1 Punkt).

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Ermitteln Sie eine Orthonormalbasis von

$$W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

bezüglich des Standard-Skalarprodukts in $\mathbb{R}^4$.

Lösungshinweis:

Wir nutzen das Gram-Schmidt-Verfahren. Sei $\tilde{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\|\tilde{v}_1\| = 1$, und damit $v_1 := \tilde{v}_1$ der erste Vektor für unsere Orthonormalbasis (1 Punkt).
Sei nun

$$\tilde{v}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(0,5 Punkte).}$$

Dann ist $\|\tilde{v}_2\| = 5$ und damit $v_2 := \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|}\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ der zweite Vektor unserer Orthonormalbasis (1 Punkt).
Sei nun

$$\tilde{v}_3 := \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, v_1 \rangle v_1 - \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 \rangle v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(0,5 Punkte).}$$

Dann ist $\|\tilde{v}_3\| = 2$ und damit $v_3 := \frac{1}{\|\tilde{v}_3\|}\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der dritte und letzte Vektor unserer Orthonormalbasis (1 Punkt).

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Ermitteln Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweis:

Wir nutzen den Gauß-Algorithmus und merken uns dabei jeweils die Faktoren, wobei wir immer Vielfache einer Zeile abziehen.

$$\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & 2 & & \\ 2 & 3 & 6 & | & -2I \\ -1 & -5 & 6 & | & -(-1)I \\ \hline 1 & 2 & 2 & & \\ 0 & -1 & 2 & & \\ 0 & -3 & 8 & | & -3II \\ \hline 1 & 2 & 2 & & \\ 0 & -1 & 2 & & \text{(2 Punkte)} \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline \end{array}$$

Damit lesen wir ab: Mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

gilt $A = LR$.