Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Wolfgang Mackens

Sommersemester 2013

Klausur zur Mathematik I (Modul: Lineare Algebra I)
15.08.2013

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg.:	**AIW**	**BU**	**ET**	**EUT**	**IIW**	**LUM**	**MB**	**MEC**	**SB**	**VT**	**VTBIO**	**Sch.**

Grundsätzlich gilt für alle Studierenden, dass die Module „Analysis I" und „Lineare Algebra I" die Gesamtnote für das Fach „Mathematik I" ergeben.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Bearbeiten Sie die angegebenen zwei Teile **A** und **B**. In Teil **A** werden 5 Punkte und in Teil **B** werden 15 Punkte vergeben.

Teil A		
Definition	**Punkte**	**Korrekteur**
	1	
	1	
	1	
	1	
	1	

Teil B		
Aufgabe	**Punkte**	**Korrekteur**
1	4	
2	3	
3	3	
4	2	
5	3	

$$\sum = 20$$

Teil A: Definitionen

Wählen Sie bis zu fünf der folgenden zehn Begriffe aus, und schreiben Sie deren Definitionen in die jeweils dafür vorgesehene Textlücke.

Jede korrekte Definition unter den maximal fünf ausgewählten Definitionen wird mit einem Punkt bewertet.

Schreiben Sie für mehr als fünf Begriffe Definitionen auf, so wählen wir für die Bewertung hiervon die ersten fünf.

Begriffe: Spatprodukt; Euklidische Norm; Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$; Norm; Lineares Erzeugnis; Permutationsmatrix; Summennorm; Normierte linke Dreiecksmatrix; Kronecker-Symbol; Lineare Abhängigkeit.

Spatprodukt: Unter dem Spatprodukt dreier Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ versteht man die reelle Zahl $\langle x \times y, z\rangle$.

Euklidische Norm: Die Euklidische Norm oder 2-Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$: Das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ (oder Standard-Inneres-Produkt im $\mathbb{R}^n$) zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Norm: Eine auf einem Vektorraum definierte Abbildung

$$\|\cdot\| : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \|v\| \end{array} \right.$$

heißt Norm, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten

$$\begin{array}{llll} (i) & \|v\| = 0 \iff v = 0, & & \text{(Definitheit)} \\ (ii) & \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V, & \text{(Homogenität)} \\ (iii) & \|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| & \forall u, v \in V. & \text{(Dreiecksungleichung)} \end{array}$$

Lineares Erzeugnis: Zu der Multimenge $v^1, \ldots, v^r$ von Vektoren eines Vektorraumes V heißt der Unterraum

$$W := \left\{ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v^j \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} \right\}$$

Lineares Erzeugnis oder Spann der Multimenge $v^1, \ldots, v^r$. Kurzschreibweise:

$$\operatorname{span}\left\{v^1, \ldots, v^r\right\} := \left\{ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v^j \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Permutationsmatrix: Eine Permutationsmatrix ist eine Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 und sonst nur lauter Nullen enthält.

Summennorm: Die Summennorm oder 1-Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Normierte linke Dreiecksmatrix: Eine linke Dreiecksmatrix heißt normierte linke Dreiecksmatrix, wenn alle ihre Diagonalelemente gleich 1 sind.

Kronecker-Symbol: Das Kronecker-Symbol δ_{ij} ist für i, j aus einer Indexmenge definiert als

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Lineare Abhängigkeit: Vektoren $v^1, \ldots, v^r$ eines Vektorraumes V heißen linear abhängig, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v^j = 0$ ist und $\lambda_i \neq 0$ ist für ein $i \in \{1, \ldots, r\}$. Anderenfalls heißen sie linear unabhängig.

Teil B: Aufgaben

Bearbeiten Sie alle wie folgt angegebenen Aufgaben:

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei der Teilraum T des Raumes der stetigen reellen Funktionen mit der üblichen Addition und Multiplikation mit Skalaren definiert durch

$$T := \operatorname{span}\{\cos, \sin\}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$N : \begin{cases} T & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & |f(0)| + |f'(0)| \end{cases}$$

eine Norm auf T ist.

Lösung:

Wir müssen die drei Axiome einer Norm prüfen:

Absolute Homogenität: Für $f \in T$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} N(\lambda f) &= |(\lambda f)(0)| + |(\lambda f)'(0)| = |\lambda f(0)| + |\lambda f'(0)| = |\lambda|\big(|f(0)| + |f'(0)|\big) \\ &= |\lambda| N(f). \end{aligned} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Dreiecksungleichung: Für $f, g \in T$ ist

$$\begin{aligned} N(f+g) &= |(f+g)(0)| + |(f+g)'(0)| = |f(0) + g(0)| + |f'(0) + g'(0)| \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + |f'(0)| + |g'(0)| = N(f) + N(g). \end{aligned} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Positive Definitheit: Für $0 \in T$ gilt $N(0) = 0$. (1 Punkt)

Umgekehrt folgt für $f \in T$ mit $N(f) = 0$, dass $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$ gilt. Da f von der Form $f = a\cos + b\sin$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist, erhalten wir daraus

$$f(0) = 0 \Rightarrow a = 0, \quad f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0,$$

also $f = 0$. (1 Punkt)

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ zu der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,4)}.$$

Lösung:

Wir bestimmen die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit Gauß.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

(2 Punkte)

Somit ist der Rang der Matrix A gleich 3, die Dimension des Kerns (was gerade die Dimension des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems ist) ist also $4-3=1$. Es genügt also, eine von 0 verschiedene Lösung anzugeben; diese dient dann als Basisvektor. Dazu lösen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und berechnen $y = (-2, -1, 0)^T$. Damit ist $x = (-2, -1, 0, 1)^T$ eine Lösung von $Ax = 0$ und somit auch ein Basisvektor des Kerns von A. (1 Punkt)

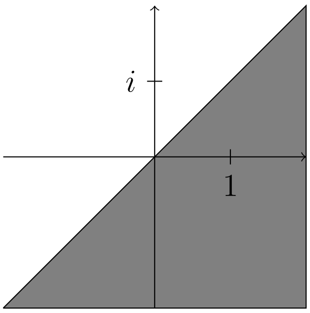
Aufgabe 3: (3 Punkte)
Skizzieren Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}$:

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geqslant |z - 1|\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} \leqslant 1\}\,.$$

Begründen Sie Ihre Lösung.

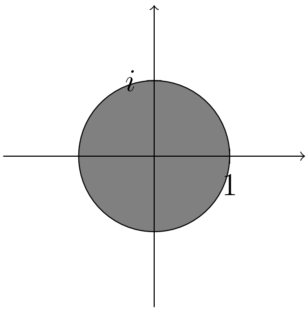
Lösung:

Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geqslant |z - 1|\}$ beschreibt alle Punkte, deren Abstand von i mindestens so groß ist wie der Abstand von 1. Dies liefert eine Halbebene, der Rand ist gegeben durch die Winkelhalbierende:



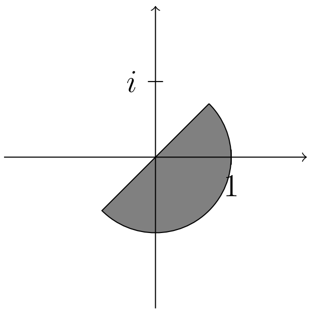
(1 Punkt)

Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} \leqslant 1\}$ beschreibt eine abgeschlossene Kreisscheibe um 0 mit Radius 1:



(1 Punkt)

Der Durchschnitt dieser beiden Mengen liefert dann K:



(1 Punkt)

Aufgabe 4: (2 Punkte)
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des folgenden Unterraumes des $\mathbb{R}^3$:

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

Lösung:

Eine Basis von U lässt sich erraten:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Offenbar sind v^1 und v^2 linear unabhängig; sie sind sogar schon orthogonal. Damit müssen wir die beiden nur noch normalisieren und erhalten die folgende Orthonormalbasis:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Alternativ berechnet man eine Basis von U mittels des Gauß'schen Eliminationsverfahrens und wendet dann das Orthonormalisierungsverfahren nach Gram und Schmidt an.

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Es sei die Abbildung

$$f : \begin{cases} \Pi_1 & \to & \mathbb{R}^{(2,2)} \\ p & \mapsto & f(p) := \begin{pmatrix} 0 & p(3) \\ p(0) - p(1) & p'(2) \end{pmatrix} \end{cases}$$

gegeben.

a) Beweisen Sie, dass f linear ist.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung F der linearen Abbildung f bezüglich der Monom-Basis im Urbildraum und der Basis gegeben durch

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

im Bildraum.

Lösung:

a) Da sowohl Punktauswertungen, Differenzenbildung und Ableitung linear sind, ist f in jedem Eintrag linear, damit f selbst linear. (1 Punkt)

b) Mit den Monomen m_0 und m_1 erhalten wir

$$\begin{aligned} f(m_0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + 1E_2 + 0E_3 + 0E_4, \\ f(m_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0E_1 + 3E_2 - 1E_3 + 1E_4. \end{aligned}$$ (1 Punkt)

Damit ist F gegeben durch

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ (1 Punkt)

(Nach dem Merksatz: „Willst die Matrix du erhalten, schreib' die Bilder in die Spalten.“)

Ende der Klausur