**Technische Universität Hamburg-Harburg**
**Institut für Mathematik**
**Patricio Farrell**

**Wintersemester 2017/2018**

# Numerische Mathematik I
## 27.01.2018

Sie haben 90 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Daten werden gespeichert.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Name:** | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Vorname:** | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Matr.-Nr.:** | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Studieng.:** | **AI** | **CS** | **ET** | **GES** | **IN** | **IO** | **VT** |

Sie dürfen einen handschriftlich beschriebenen DIN-A4 Zettel verwenden. Als weiteres (technisches) Hilfsmittel ist ein Ihnen zur Verfügung gestellter Rechner erlaubt. Alles andere ist ausdrücklich ausgeschlossen.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Es werden insgesamt 36 Punkte (6 ECTS) bzw. 24 Punkte (4 ECTS) vergeben.

---

User-Login: Benutzername 1 , Passwort: Passwort1

---

| Aufgabe | Punkte |
|---|---|
| **1** | |
| **2** | |
| **3** | |
| **4** | |
| **5** | |

$\sum =$

**Aufgabe 1:** (4+5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die absolute und relative Kondition der Funktion(sauswertung) von

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \log(x).$$

Wie verhalten sich die Konditionszahlen für große $x$?

(b) Geben Sie die größte Zahl $\delta > 0$ an, so dass in MATLAB (double precision Gleitkomma-Arithmetik mit symmetrischem Runden)

$$8 + \delta == 8.$$

(c) MATLAB-Aufgabe: Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ das folgende bestimmte Integral

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_0^1 \frac{x^n}{x+\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 x^{n-1}\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 x^{n-1}\Big(1-\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\Big)dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1}dx - \frac{1}{2}\cdot I_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot I_{n-1},\ n \geq 2, \end{aligned}$$

und $I_1 := 1 - \frac{1}{2}\cdot\log(3)$.

(i) Implementieren Sie im dafür vorgesehenen `m-file` die Berechnung von $I_{20}$ mittels der Vorwärtsiteration:

$$I_1 = 1 - \frac{1}{2}\cdot\log(3),\ I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot I_{n-1},\ n = 2:20$$

(ii) Implementieren Sie im dafür vorgesehenen `m-file` die Berechnung von $I_{20}$ mittels der Rückwärtsiteration:

$$I_{40} = 0.0165,\ I_{n-1} = 2\cdot\Big(\frac{1}{n} - I_n\Big),\ n = 40:-1:21$$

(iii) Geben Sie die berechneten Werte von $I_{20}$ aus (i) und (ii) an und vergleichen Sie diese mit dem durch `I_20 = integral(@(x)(x.^20)./(x+0.5),0,1)` berechneten Wert. Erklären Sie Ihre Beobachtung.

**Lösungshinweis:**

(a) $\kappa_a = |f'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right|$ und $\kappa_r = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \left|\frac{1}{\log(x)}\right|$. (1 Punkt) Im Grenzwert für große $x$, werden beide Konditionszahlen klein. (1 Punkt)

(b) Sei $\varepsilon_M = 2^{-52}$ die Maschinengenauigkeit. Im Intervall $[8,16]$ beträgt der Abstand zwischen zwei Gleitkommazahlen $8\varepsilon_M$. (0.5 Punkte) Der größte Fehler ist somit nach symmetrischem Runden $4\varepsilon_M = 2^{-50}$. (0.5 Punkte)

`8+4*eps==8` (1 Punkt)

(c) MATLAB-Aufgabe:

(iii) Es gilt:

$$\text{(i) } I_{20} = 0.0328 \quad \text{(ii) } I_{20} = -27.9123 \quad \text{(iii) } I_{20} = 0.0328$$

Bezeichne $\widetilde{I}_n$ den numerisch berechneten Wert von $I_n$ mittels (i) und $\Delta I_n := |\widetilde{I}_n - I_n|$ den Fehler. Dann gilt für $n \geq 2$

$$\Delta I_n = |\widetilde{I}_n - I_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\widetilde{I}_{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}I_{n-1}\right| = \frac{1}{2}|\widetilde{I}_{n-1} - I_{n-1}| = \frac{1}{2}\Delta I_{n-1}$$

und damit (per Induktion) für $0 \leq k \leq n-1$

$$\Delta I_n = \frac{1}{2^k}\Delta I_{n-k}.$$

Im Fall (i) der Vorwärtsiteration bedeutet dies ($n = 20$, $k = n - 1 = 19$), dass der Anfangsfehler $\Delta I_1$ durch den Faktor $\frac{1}{2^{19}} < 1$ reduziert wird und im Fall (ii) der Rückwärtsiteration ($n = 40$, $k = 20$), dass der Anfangsfehler $\Delta I_{40}$ mit dem Faktor $2^{20} > 1$ verstärkt wird. (1 Punkt)

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 1$. Angenommen Sie möchten diese Funktion an den Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ interpolieren.

(a) Geben Sie eine begründete Schranke für den Fehler $|f(x) - p_2(x)|$ des Interpolationspolynoms $p_2$ an der Stelle $x = 0.5$ an.

(b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p_2$ in Lagrange-Darstellung per Hand.

**Lösungshinweis:**

(a) In dem Beispiel ist $n = 2$. Für den Fehler gilt laut Vorlesung (Satz 6), dass $\xi \in [-1, 1]$ existiert mit

$$f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Für $x = 0.5$ gilt $\frac{f'''(\xi)}{3!} = 1$ und $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = -\frac{3}{8}$. (1 Punkt) Das heißt

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{3}{8}. \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

(b) Die Daten zu den Stützstellen sind $y_0 = -2, y_1 = -1, y_2 = 0$. Da $y_2 = 0$, brauchen wir das Lagrange-Basispolynom $\ell_2$ nicht zu berechnen. (0.5 Punkte) Die anderen beiden Basispolynome errechnen sich zu

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}x(x - 1), \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$
$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -(x + 1)(x - 1). \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

Das heißt

$$p_2(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) = x - 1. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)
Betrachten Sie den Integranden

$$f\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

und das bestimmte Integral

$$\int_1^3 f(x)\,dx. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie (2) numerisch mit der Mittelpunktsregel.

(b) Geben Sie eine begründete Schranke für den Fehler an.

(c) Sei $H = (3-1)/m = 2/m$ für $m \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie die zusammengesetzte Mittelpunktsregel hin. Wie viele Funktionsauswertungen benötigt diese?

(d) Wie klein muss man $H$ wählen, um zu garantieren, dass die zusammengesetzte Mittelpunktsregel einen Fehler kleiner als $\varepsilon = 10^{-6}$ hat?

**Lösungshinweis:**

Sei $I[f] := \int_1^3 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$ und $a = 1, b = 3, m = \frac{a+b}{2} = 2$. Es gilt $f \in C^\infty(0,\infty)$ und

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad\qquad f''(x) = \frac{6}{x^4}.$$

(a) $I[f] \approx (b-a)f(m) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (1 Punkt)

(b)

$$\left|\int_a^b \Big(f(x) - p_0(x)\Big)dx\right| \leq = \frac{(b-a)^3}{24} \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)| = \frac{8}{24}\cdot 6 = 2 \qquad \text{(1 Punkt)}$$

(c) Die zusammengesetzte Mittelpunktsregel ist gegeben durch

$$M_H f = H \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

mit $x_k = a + \frac{1}{2}(2k+1)H$ für $0 \leq k \leq m-1$ und benötigt $m$ Funktionsauswertungen. (0.5 Punkte)

(d) Für den Fehler gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx - M_H f\right| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)| = \frac{1}{12} H^2 \cdot 6 < \varepsilon. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Das heißt

$$H < \sqrt{2\varepsilon} = \sqrt{2}\cdot 10^{-3}. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

**Aufgabe 4:** (5+3 Punkte)
Für die Funktion

$$f\colon [0,1] \to [0,1], \quad f(x) = x^{1/4}$$

betrachten Sie die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Wie viele Fixpunkte hat die Funktion auf $[0,1]$?

(b) Begründen Sie, ob $f$ eine Kontraktion auf $[0,1]$ ist.

(c) Welcher der beiden Fixpunkte wird in Abhängigkeit eines Startwerts $x_0 \in (0,1)$ approximiert? Begründen Sie.

(d) Wird der Fixpunkt monoton oder alternierend approximiert?

(e) MATLAB-Aufgabe: Implementieren Sie im dafür vorgesehenen `m-file` die Fixpunktiteration und geben Sie den berechneten Wert für $x_5$ mit Startwert $x_0 = 0.5$ an.

**Lösungshinweis:**

(a) Es gibt zwei, bei $x = 0$ und $x = 1$. (1 Punkt)

(b) Wenn $f$ eine Kontraktion wäre, darf es laut Banachschem Fixpunktsatz nur genau einen Fixpunkt geben. Also kann $f$ keine Kontraktion auf $[0,1]$ sein. Man kann dies auch anders zeigen. Für $x = 1$ und $y = 0$ gilt

$$f(x) - f(y) = 1 - 0 = x - y.$$

Das heißt, die Kontraktionskonstante erfüllt $L \geq 1$ und somit kann $f$ keine Kontraktion sein. (1 Punkt)

(c) Für $x \in (0,1]$ gilt $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$. Da $|f'(1)| = \frac{1}{4} < 1$, ist der Fixpunkt $x = 1$ attraktiv. Die Fixpunktiteration konvergiert daher für $x_0$ nahe $x = 1$ gegen diesen. (1 Punkt) Für $x \to 0$, wird die Ableitung betragsmäßig groß. Für $x < 4^{-4/3}$ wird der Betrag der Ableitung $|f'(x)|$ größer als 1. Dieser Fixpunkt ist also repulsiv und für keinen Startwert $x_0 \in (0,1)$ ist die Iteration gegen diesen konvergent. (1 Punkt)

(d) Da $0 < f'(1) = \frac{1}{4} < 1$, wird der Fixpunkt monoton approximiert. (1 Punkt)

(e) $x_5 = 0.9993$

**Aufgabe 5:** (5+4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -4 & 5 & -8 \\ 8 & -8 & 17 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die LU-Zerlegung von $A$ per Hand (ohne Pivotisierung).

(b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von $A$ per Hand.

(c) Wie hängen die Zerlegungen in (a) und (b) zusammen?

(d) MATLAB-Aufgabe: Schreiben Sie im dafür vorgesehenen `m-file` einen Algorithmus, der eine Matrix auf Durchführbarkeit der Cholesky-Zerlegung prüft und ihre Cholesky-Zerlegung berechnet, wenn durchführbar, und die LU-Zerlegung (mit Pivotisierung) sonst. Testen Sie Ihren Algorithmus an der gegebenen Matrix $M$.
*Hinweis:*

- Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte der Matrix positiv sind.
- Die gegebene Matrix $M$ hat nur reelle Eigenwerte.

*Befehle:*

- `issymmetric(`$M$`)` prüft die Matrix $M$ auf Symmetrie.
- `eig(`$M$`)` schreibt alle Eigenwerte von $M$ in einen Spaltenvektor.
- `chol(`$M$`,'lower')` berechnet die untere Dreiecksmatrix der Cholesky-Zerlegung von $M$.
- `[L,U,P] = lu(`$M$`)` berechnet die LU-Zerlegung von $M$ (mit Pivotisierung).

**Lösungshinweis:**

(a)

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(b) Allgemein:

$$A = LDL^T = LD^{1/2}D^{1/2}L^T =: GG^T$$

Speziell hier:

$$\begin{aligned} A = LDL^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad \text{(1 Punkt)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: GG^T \qquad \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

(c) Siehe Rechnung in (b). Die $L$'s stimmen überein, ebenso die Diagonalen von $U$ und $D$. (1 Punkt)