

Numerische Mathematik I
27.01.2018

Sie haben 90 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Daten werden gespeichert.

Name:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studieng.:

AI	CS	ET	GES	IN	IO	VT
----	----	----	-----	----	----	----

Sie dürfen einen handschriftlich beschriebenen DIN-A4 Zettel verwenden. Als weiteres (technisches) Hilfsmittel ist ein Ihnen zur Verfügung gestellter Rechner erlaubt. Alles andere ist ausdrücklich ausgeschlossen.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Es werden insgesamt 36 Punkte (6 ECTS) bzw. 24 Punkte (4 ECTS) vergeben.

User-Login: Benutzername 1 , Passwort: Passwort1

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	

$\Sigma =$

Aufgabe 1: (4+5 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die absolute und relative Kondition der Funktion(sauswertung) von

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \log(x).$$

Wie verhalten sich die Konditionszahlen für große x ?

- (b) Geben Sie die größte Zahl $\delta > 0$ an, so dass in MATLAB (double precision Gleitkomma-Arithmetik mit symmetrischem Runden)

$$8 + \delta == 8.$$

- (c) MATLAB-Aufgabe: Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ das folgende bestimmte Integral

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_0^1 \frac{x^n}{x + \frac{1}{2}} dx = \int_0^1 x^{n-1} \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} dx = \int_0^1 x^{n-1} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}}\right) dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} dx - \frac{1}{2} \cdot I_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot I_{n-1}, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

und $I_1 := 1 - \frac{1}{2} \cdot \log(3)$.

- (i) Implementieren Sie im dafür vorgesehenen **m-file** die Berechnung von I_{20} mittels der Vorwärtsiteration:

$$I_1 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \log(3), \quad I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot I_{n-1}, \quad n = 2 : 20$$

- (ii) Implementieren Sie im dafür vorgesehenen **m-file** die Berechnung von I_{20} mittels der Rückwärtsiteration:

$$I_{40} = 0.0165, \quad I_{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{n} - I_n\right), \quad n = 40 : -1 : 21$$

- (iii) Geben Sie die berechneten Werte von I_{20} aus (i) und (ii) an und vergleichen Sie diese mit dem durch `I_20 = integral(@(x)(x.^20)./(x+0.5),0,1)` berechneten Wert. Erklären Sie Ihre Beobachtung.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 1$. Angenommen Sie möchten diese Funktion an den Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ interpolieren.

- (a) Geben Sie eine begründete Schranke für den Fehler $|f(x) - p_2(x)|$ des Interpolationspolynoms p_2 an der Stelle $x = 0.5$ an.
- (b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_2 in Lagrange-Darstellung per Hand.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Betrachten Sie den Integranden

$$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

und das bestimmte Integral

$$\int_1^3 f(x) dx. \tag{1}$$

- (a) Bestimmen Sie (2) numerisch mit der Mittelpunktsregel.
- (b) Geben Sie eine begründete Schranke für den Fehler an.
- (c) Sei $H = (3 - 1)/m = 2/m$ für $m \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie die zusammengesetzte Mittelpunktsregel hin. Wie viele Funktionsauswertungen benötigt diese?
- (d) Wie klein muss man H wählen, um zu garantieren, dass die zusammengesetzte Mittelpunktsregel einen Fehler kleiner als $\varepsilon = 10^{-6}$ hat?

Aufgabe 4: (5+3 Punkte)

Für die Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = x^{1/4}$$

betrachten Sie die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

- (a) Wie viele Fixpunkte hat die Funktion auf $[0, 1]$?
- (b) Begründen Sie, ob f eine Kontraktion auf $[0, 1]$ ist.
- (c) Welcher der beiden Fixpunkte wird in Abhängigkeit eines Startwerts $x_0 \in (0, 1)$ approximiert? Begründen Sie.
- (d) Wird der Fixpunkt monoton oder alternierend approximiert?
- (e) MATLAB-Aufgabe: Implementieren Sie im dafür vorgesehenen `m-file` die Fixpunktiteration und geben Sie den berechneten Wert für x_5 mit Startwert $x_0 = 0.5$ an.

Aufgabe 5: (5+4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -4 & 5 & -8 \\ 8 & -8 & 17 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die LU-Zerlegung von A per Hand (ohne Pivotisierung).
- (b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von A per Hand.
- (c) Wie hängen die Zerlegungen in (a) und (b) zusammen?
- (d) MATLAB-Aufgabe: Schreiben Sie im dafür vorgesehenen `m-file` einen Algorithmus, der eine Matrix auf Durchführbarkeit der Cholesky-Zerlegung prüft und ihre Cholesky-Zerlegung berechnet, wenn durchführbar, und die LU-Zerlegung (mit Pivotisierung) sonst. Testen Sie Ihren Algorithmus an der gegebenen Matrix M .

Hinweis:

- Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte der Matrix positiv sind.
- Die gegebene Matrix M hat nur reelle Eigenwerte.

Befehle:

- `issymmetric(M)` prüft die Matrix M auf Symmetrie.
- `eig(M)` schreibt alle Eigenwerte von M in einen Spaltenvektor.
- `chol(M, 'lower')` berechnet die untere Dreiecksmatrix der Cholesky-Zerlegung von M .
- `[L,U,P] = lu(M)` berechnet die LU-Zerlegung von M (mit Pivotisierung).

