Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Mathematik
Patricio Farrell

Sommersemester 2018

Numerische Mathematik I
19.07.2018

Sie haben 90 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Daten werden gespeichert.

Name:															
Vorname:															
Matr.-Nr.:															

Studieng.:	**AI**	**CS**	**ET**	**GES**	**IN**	**IO**	**VT**

Sie dürfen einen handschriftlich beschriebenen DIN-A4 Zettel verwenden. Als weiteres (technisches) Hilfsmittel ist ein Ihnen zur Verfügung gestellter Rechner erlaubt. Alles andere ist ausdrücklich ausgeschlossen.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Es werden insgesamt 36 Punkte (6 ECTS) bzw. 24 Punkte (4 ECTS) vergeben.

User-Login: Benutzername 1 , Passwort: Passwort1

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	

$\sum =$

Aufgabe 1: (4+5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die absolute und relative Kondition der Funktion(sauswertung) von

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sqrt{x}.$$

Wie verhalten sich die Konditionszahlen für große x?

(b) Geben Sie die größte Zahl $\delta > 0$ an, so dass in MATLAB (double precision Gleitkomma-Arithmetik mit symmetrischem Runden)

$$4 + \delta == 4.$$

(c) MATLAB-Aufgabe: Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ das folgende bestimmte Integral

$$I_n := \int_1^e x(\log(x))^n dx = \frac{1}{2}x^2(\log(x))^n\Big|_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x(\log(x))^{n-1}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}\cdot I_{n-1},\ n \geq 2,$$

und $I_1 := \frac{1}{4}(e^2+1)$.

(i) Implementieren Sie im dafür vorgesehenen `m-file` die Berechnung von I_{30} mittels der Vorwärtsiteration:

$$I_1 = \frac{1}{4}(e^2+1),\ I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}\cdot I_{n-1},\ n = 2:30$$

(ii) Implementieren Sie im dafür vorgesehenen `m-file` die Berechnung von I_{30} mittels der Rückwärtsiteration:

$$I_{60} = 0.1173,\ I_{n-1} = \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{e^2}{2} - I_n\right),\ n = 60:-1:31$$

(iii) Geben Sie die berechneten Werte von I_{30} aus (i) und (ii) an und vergleichen Sie diese mit dem durch `I_30 = integral(@(x)x.*log(x).^30,1,exp(1))` berechneten Wert. Erklären Sie Ihre Beobachtung.

Lösungshinweis:

(a) $\kappa_a = |f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|$ (0.5 Punkte) und $\kappa_r = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \left|\frac{\frac{x}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{2}$. (0.5 Punkte) Im Grenzwert für große x wird die absolute Konditionszahl klein und die relative ist konstant. (1 Punkt)

(b) Sei $\varepsilon_M = 2^{-52}$ die Maschinengenauigkeit. Im Intervall $[4, 8]$ beträgt der Abstand zwischen zwei Gleitkommazahlen $4\varepsilon_M$. (0.5 Punkte) Der größte Fehler ist somit nach symmetrischem Runden $2\varepsilon_M = 2^{-51}$. (0.5 Punkte)

`4+2*eps==4` (1 Punkt)

(c) MATLAB-Aufgabe:

(iii) Es gilt:

$$\text{(i) } I_{30} = -6.8743e+07 \quad \text{(ii) } I_{30} = 0.2243 \quad \text{(iii) } I_{30} = 0.2243$$

Bezeichne $\widetilde{I}_n$ den numerisch berechneten Wert von I_n mittels (i) oder (ii) und $\Delta I_n := |\widetilde{I}_n - I_n|$ den Fehler. Dann gilt für $n \geq 2$

$$\Delta I_n = |\widetilde{I}_n - I_n| = \left|\frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}\widetilde{I}_{n-1} - \frac{e^2}{2} + \frac{n}{2}I_{n-1}\right| = \frac{n}{2}|\widetilde{I}_{n-1} - I_{n-1}| = \frac{n}{2}\Delta I_{n-1}$$

und damit (per Induktion) für $0 \leq k \leq n-1$

$$\Delta I_n = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{2^k}\Delta I_{n-k}.$$

Im Fall (i) der Vorwärtsiteration bedeutet dies ($n = 30$, $k = n-1 = 29$), dass der Anfangsfehler ΔI_1 durch den Faktor $\frac{30!}{2^{29}} > 1$ verstärkt wird, und im Fall (ii) der Rückwärtsiteration ($n = 60$, $k = 30$), dass der Anfangsfehler ΔI_{60} mit dem Faktor $\frac{2^{30} \cdot 30!}{60!} < 1$ reduziert wird. (1 Punkt)

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - x$. Angenommen Sie möchten diese Funktion an den Stützstellen $x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 9$ interpolieren.

(a) Geben Sie eine begründete Schranke für den Fehler $|f(x) - p_2(x)|$ des Interpolationspolynoms p_2 an der Stelle $x = 8$ an.

(b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_2 in Lagrange-Darstellung per Hand.

Lösungshinweis:

(a) In dem Beispiel ist $n = 2$. Für den Fehler gilt laut Vorlesung (Satz 6), dass $\xi \in [1, 9]$ existiert mit

$$f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Es gilt $f'''(\xi) = \frac{3}{8}\xi^{-5/2}$ und somit $|f'''(\xi)| \leq \frac{3}{8}$. (0.5 Punkte) Für $x = 8$ gilt $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = -28$ (0.5 Punkte) und folglich

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\frac{3}{8}}{6} \cdot |-28| = \frac{7}{4}. \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

(b) Die Daten zu den Stützstellen sind $y_0 = 0, y_1 = -2, y_2 = -6$. Da $y_0 = 0$, brauchen wir das Lagrange-Basispolynom ℓ_0 nicht zu berechnen. (0.5 Punkte) Die anderen beiden Basispolynome errechnen sich zu

$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -\frac{1}{15}(x - 1)(x - 9), \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$
$$\ell_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{40}(x - 1)(x - 4). \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

Das heißt

$$p_2(x) = y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x) = \frac{1}{5}(x - 1)\left(\frac{2}{3}x - 6 - \frac{3}{4}x + 3\right) = \frac{1}{5 \cdot 12}(x - 1)(-x - 36)$$
$$= \frac{1}{5 \cdot 12}(-x^2 - 35x + 36) = -\frac{1}{60}x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{3}{5}. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Betrachten Sie den Integranden

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{(x^2)}$$

und das bestimmte Integral

$$\int_0^1 f(x)\,dx. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie (2) numerisch mit der Trapezregel.

(b) Geben Sie eine begründete Schranke für den Fehler an.

(c) Sei $H = (1-0)/m = 1/m$ für $m \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie die zusammengesetzte Trapezregel hin. Wie viele Funktionsauswertungen benötigt diese?

(d) Wie klein muss man H wählen, um zu garantieren, dass die zusammengesetzte Trapezregel einen Fehler kleiner als $\varepsilon = 10^{-6}$ hat?

Lösungshinweis:

Sei $I[f] := \int_0^1 f(x)\,dx$ und $a = 0, b = 1$. Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und

$$f'(x) = 2xe^{(x^2)}, \qquad f''(x) = (4x^2+2)e^{(x^2)}.$$

(a) $I[f] \approx \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) = \frac{1}{2}\cdot(e-1) = \frac{e-1}{2}$ (1 Punkt)

(b)

$$\left|\int_a^b \Big(f(x) - p_1(x)\Big)dx\right| \leq = \frac{(b-a)^3}{12}\max_{\xi\in[a,b]}|f''(\xi)| = \frac{1}{12}\cdot 6e = \frac{e}{2} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

(c) Die zusammengesetzte Trapezregel ist gegeben durch

$$T_H f = H\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + \frac{1}{2}f(x_m)\right) \qquad \text{(0.5 Punkte)}$$

mit $x_k = a + kH$ für $0 \leq k \leq m$ und benötigt $m+1$ Funktionsauswertungen. (0.5 Punkte)

(d) Für den Fehler gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_H f\right| \leq \frac{b-a}{12}H^2 \max_{\xi\in[a,b]}|f''(\xi)| = \frac{1}{12}H^2\cdot 6e < \varepsilon. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Das heißt

$$H < \sqrt{\tfrac{2\varepsilon}{e}} = \sqrt{\tfrac{2}{e}}10^{-3} \approx 0.00086. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 4: (5+3 Punkte)
Gegeben sei das Nullstellenproblem

$$f(x) = x^{4/3} = 0.$$

(a) Geben Sie an unter welchen Bedingungen das Newtonverfahren für ein Nullstellenproblem quadratisch konvergiert.

(b) Welche Möglichkeit haben Sie das Newtonverfahren anzupassen, wenn es nicht konvergiert?

(c) Berechnen Sie die Konvergenzordnung.

(d) Warum erhalten wir nicht die erhoffte Konvergenzordnung?

(e) MATLAB-Aufgabe: Implementieren Sie im dafür vorgesehenen `m-file` das Newtonverfahren und geben Sie den berechneten Wert für x_{10} mit Startwert $x_0 = 1$ an.

Lösungshinweis:

(a) Dies ist Satz 16 aus der Vorlesung:

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Bezeichne x^* die einzige Nullstelle im Intervall $I = [x^* - x_0, x^* + x_0]$, wobei x_0 der Startwert des Newtonverfahrens ist. Gelte außerdem

1. $f'(x) \neq 0$ for $x \in I$,
2. $|x^* - x_0| < \frac{1}{K}$ mit $K := \frac{1}{2} \sup_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|$,

dann konvergiert das Newtonverfahren quadratisch. (1 Punkt)

(b) gedämpfter Newton (1 Punkt)

(c) Das Newtonverfahren liefert

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{4/3}}{\frac{4}{3}x_n^{1/3}} = x_n - \frac{3}{4}x_n = \frac{1}{4}x_n. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Daher gilt

$$|x_{n+1} - 0| = \left|\frac{1}{4}x_n - 0\right| = \frac{1}{4}|x_n - 0|$$

und somit ist die Konvergenzordnung gleich 1 (mit Rate $\frac{1}{4}$), die Konvergenz also linear. (1 Punkt)

(d) Die Voraussetzung in (a), dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist, ist verletzt, denn $f''(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3}$ für $x \neq 0$ und die zweite Ableitung in $x = 0$ existiert nicht. Deswegen können wir keine quadratische Konvergenz erwarten. (1 Punkt)

(e) $x_{10} = 9.5367e - 07$

Aufgabe 5: (5+4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die LU-Zerlegung von A per Hand (ohne Pivotisierung).

(b) Berechnen Sie die LU-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung per Hand.

(c) Welchen Vorteil bietet Pivotisierung?

(d) MATLAB-Aufgabe: Schreiben Sie im dafür vorgesehenen `m-file` einen Algorithmus, der eine Matrix auf Durchführbarkeit der Cholesky-Zerlegung prüft und ihre Cholesky-Zerlegung berechnet, wenn durchführbar, und die LU-Zerlegung (mit Pivotisierung) sonst. Testen Sie Ihren Algorithmus an der gegebenen Matrix M.
Hinweis:

- Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte der Matrix positiv sind.
- Die gegebene Matrix M hat nur reelle Eigenwerte.

Befehle:

- `issymmetric(`M`)` prüft die Matrix M auf Symmetrie.
- `eig(`M`)` schreibt alle Eigenwerte von M in einen Spaltenvektor.
- `chol(`M`,'lower')` berechnet die untere Dreiecksmatrix der Cholesky-Zerlegung von M.
- `[L,U,P] = lu(`M`)` berechnet die LU-Zerlegung von M (mit Pivotisierung).

Lösungshinweis:

(a)

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = PA = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(c) Immer durchführbar und numerisch stabiler. (1 Punkt)