Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Mathematik
Patricio Farrell

Sommersemester 2018

Numerische Mathematik I
19.07.2018

Sie haben 90 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Daten werden gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studieng.:	**AI**	**CS**	**ET**	**GES**	**IN**	**IO**	**VT**

Sie dürfen einen handschriftlich beschriebenen DIN-A4 Zettel verwenden. Als weiteres (technisches) Hilfsmittel ist ein Ihnen zur Verfügung gestellter Rechner erlaubt. Alles andere ist ausdrücklich ausgeschlossen.

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Es werden insgesamt 36 Punkte (6 ECTS) bzw. 24 Punkte (4 ECTS) vergeben.

User-Login: Benutzername 1 , Passwort: Passwort1

Aufgabe	**Punkte**
1	
2	
3	
4	
5	

$\sum =$

Aufgabe 1: (4+5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die absolute und relative Kondition der Funktion(sauswertung) von

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sqrt{x}.$$

Wie verhalten sich die Konditionszahlen für große x?

(b) Geben Sie die größte Zahl $\delta > 0$ an, so dass in MATLAB (double precision Gleitkomma-Arithmetik mit symmetrischem Runden)

$$4 + \delta == 4.$$

(c) MATLAB-Aufgabe: Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ das folgende bestimmte Integral

$$I_n := \int_1^e x(\log(x))^n dx = \frac{1}{2}x^2(\log(x))^n\Big|_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x(\log(x))^{n-1}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}\cdot I_{n-1},\ n \geq 2,$$

und $I_1 := \frac{1}{4}(e^2+1)$.

(i) Implementieren Sie im dafür vorgesehenen `m-file` die Berechnung von I_{30} mittels der Vorwärtsiteration:

$$I_1 = \frac{1}{4}(e^2+1),\ I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}\cdot I_{n-1},\ n = 2:30$$

(ii) Implementieren Sie im dafür vorgesehenen `m-file` die Berechnung von I_{30} mittels der Rückwärtsiteration:

$$I_{60} = 0.1173,\ I_{n-1} = \frac{2}{n}\cdot\Big(\frac{e^2}{2} - I_n\Big),\ n = 60:-1:31$$

(iii) Geben Sie die berechneten Werte von I_{30} aus (i) und (ii) an und vergleichen Sie diese mit dem durch `I_30 = integral(@(x)x.*log(x).^30,1,exp(1))` berechneten Wert. Erklären Sie Ihre Beobachtung.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - x$. Angenommen Sie möchten diese Funktion an den Stützstellen $x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 9$ interpolieren.

(a) Geben Sie eine begründete Schranke für den Fehler $|f(x) - p_2(x)|$ des Interpolationspolynoms p_2 an der Stelle $x = 8$ an.

(b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_2 in Lagrange-Darstellung per Hand.

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Betrachten Sie den Integranden

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{(x^2)}$$

und das bestimmte Integral

$$\int_0^1 f(x)\, dx. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie (2) numerisch mit der Trapezregel.

(b) Geben Sie eine begründete Schranke für den Fehler an.

(c) Sei $H = (1-0)/m = 1/m$ für $m \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie die zusammengesetzte Trapezregel hin. Wie viele Funktionsauswertungen benötigt diese?

(d) Wie klein muss man H wählen, um zu garantieren, dass die zusammengesetzte Trapezregel einen Fehler kleiner als $\varepsilon = 10^{-6}$ hat?

Aufgabe 4: (5+3 Punkte)
Gegeben sei das Nullstellenproblem

$$f(x) = x^{4/3} = 0.$$

(a) Geben Sie an unter welchen Bedingungen das Newtonverfahren für ein Nullstellenproblem quadratisch konvergiert.

(b) Welche Möglichkeit haben Sie das Newtonverfahren anzupassen, wenn es nicht konvergiert?

(c) Berechnen Sie die Konvergenzordnung.

(d) Warum erhalten wir nicht die erhoffte Konvergenzordnung?

(e) MATLAB-Aufgabe: Implementieren Sie im dafür vorgesehenen `m-file` das Newtonverfahren und geben Sie den berechneten Wert für x_{10} mit Startwert $x_0 = 1$ an.

Aufgabe 5: (5+4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die LU-Zerlegung von A per Hand (ohne Pivotisierung).

(b) Berechnen Sie die LU-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung per Hand.

(c) Welchen Vorteil bietet Pivotisierung?

(d) MATLAB-Aufgabe: Schreiben Sie im dafür vorgesehenen `m-file` einen Algorithmus, der eine Matrix auf Durchführbarkeit der Cholesky-Zerlegung prüft und ihre Cholesky-Zerlegung berechnet, wenn durchführbar, und die LU-Zerlegung (mit Pivotisierung) sonst. Testen Sie Ihren Algorithmus an der gegebenen Matrix M.
Hinweis:

- Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte der Matrix positiv sind.
- Die gegebene Matrix M hat nur reelle Eigenwerte.

Befehle:

- `issymmetric(`M`)` prüft die Matrix M auf Symmetrie.
- `eig(`M`)` schreibt alle Eigenwerte von M in einen Spaltenvektor.
- `chol(`M`,'lower')` berechnet die untere Dreiecksmatrix der Cholesky-Zerlegung von M.
- `[L,U,P] = lu(`M`)` berechnet die LU-Zerlegung von M (mit Pivotisierung).