Technische Universität Dresden
Fachrichtung Mathematik

Institut für Analysis

Behandlung singulärer Diffusion mit Hilfe von Dirichletformen

Diplomarbeit

zur Erlangung des ersten akademischen Grades

Diplommathematiker

vorgelegt von

Name:	Seifert	Vorname:	Christian
geboren am:	07.04.1985	in:	Dresden

Tag der Einreichung: 10.09.2009

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. habil. Jürgen Voigt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit untersucht singuläre Diffusion mit Hilfe von Dirichlet-Formen. Dabei wird zuerst der eindimensionale Fall betrachtet. Ausgehend davon werden zwei Verallgemeinerungen behandelt: Der mittlere Teil der Arbeit beschäftigt sich mit singulärer Diffusion auf endlichen Graphen, also einer gewissen Strukturierung bzw. Kopplung endlich vieler eindimensionaler Diffusionsprozesse. Das letzte Kapitel beschreibt mehrdimensionale Diffusion unter gewissen Voraussetzungen an das singuläre Maß μ.

Zentrales Hilfsmittel in dieser Arbeit sind Dirichlet-Formen in Hilberträumen. Die der Brown'schen Bewegung zugeordnete klassische Dirichlet-Form

$$\tau(u, v) = \int \nabla u \overline{\nabla v}$$

ist der Ausgangspunkt unserer Untersuchungen. Diese Form wird unsere Diffusion beschreiben. Der Zusatz „singulär“, erzeugt durch das „singuläre Maß“ μ, modelliert dabei, dass sich ein durch Diffusion bewegendes Teilchen nur in bestimmten Bereichen – dem Träger $\operatorname{spt}\mu$ des Maßes μ – aufhalten kann und dort durch μ eine Beschleunigung oder Verlangsamung erfährt. Zentral ist dabei nun die Frage, was der Definitionsbereich $D(\tau)$ der Form τ in dem von μ erzeugten Hilbertraum $L_2(\mu)$ ist, damit der Form ein selbstadjungierter Operator H zugeordnet werden kann. Die Beschreibung des Operators ist dabei ein weiterer Aspekt dieser Arbeit.

Warum genügt es, sich Eigenschaften der Form τ bzw. des assoziierten

Operators H anzuschauen um Aussagen über die Evolution des Systems zu treffen? Diese Frage kann mit Hilfe von C_0-Halbgruppen beantworten werden, denn ist die Form τ als quasi-akkretiv und der Operator H als selbstadjungiert erkannt, so lässt sich die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u'(t) &= -Hu(t) \quad (t > 0), \\ u(0) &= u_0 \in L_2(\mu) \end{aligned}$$

mit der von $-H$ erzeugten C_0-Halbgruppe $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ angeben. Dabei lassen sich Eigenschaften der Lösung wie Positivität oder Kontraktivität anhand entsprechender Eigenschaften der Form τ bzw. des Operators H charakterisieren, indem wir die Bedingungen der Beurling-Deny-Kriterien nachweisen.

Im ersten Kapitel wird singuläre Diffusion auf einem Intervall studiert. Dabei werden vor allem Eigenschaften der Form τ untersucht und der mit τ assoziierte Operator H bestimmt. Dieser Teil ist eine gute Vorbereitung für die Diffusion auf Graphen. Dort wird auf den Kanten des Graphen die Diffusion aus dem ersten Kapitel benutzt, während nun an den Knoten entsprechende Verknüpfungsbedingungen gestellt werden. Von zentralem Interesse sind solche Randbedingungen, die zu selbstadjungierten Realisierungen führen. Wir beschreiben sowohl den Fall von masselosen Knoten als auch Diffusion auf Graphen mit Punktmaßen in den Knoten. Der Fall masseloser Knoten ist in unserem Kontext ein Spezialfall des letzteren. Kapitel 3 widmet sich dann der zweiten Verallgemeinerung – der mehrdimensionalen Diffusion. Wichtig hierbei ist, dass das singuläre Maß μ nicht „zu kleine“ Mengen misst; genauer: μ sollte absolutstetig bezüglich der von τ erzeugten Kapazität cap sein. Deshalb behandelt der erste Teil dieses Kapitels die Theorie der Kapazität von Formen und entsprechender Kapazitäts-Nullmengen, die feiner als μ-Nullmengen sind. Im Mehrdimensionalen betrachten wir dann nur den Fall von Dirichlet-Randbedingungen für die singuläre Diffusion. Im Anhang werden grundlegende mathematische Aussagen angegeben, die in der Arbeit benutzt werden. Es werden sowohl absolutstetige Funktionen vorgestellt als auch eine Einführung in die Theorie der Formen und mit ihnen assoziierten Operatoren gegeben. Die Beurling-Deny-Kriterien werden ebenso dargestellt, wie auch die Definition von Choquet-Kapazitäten.

Der Hauptteil der Resultate aus den ersten beiden Kapiteln stammt im Wesentlichen aus den Arbeiten [6], [8] und [9], wobei nur in der erstgenannten Arbeit singuläre Diffusion behandelt wird. Die Resultate zur Kapazität im dritten Kapitel basieren hauptsächlich auf [3].

Für das Entstehen der Arbeit – insbesondere des dritten Kapitels – war mir mein Betreuer Prof. Dr. Jürgen Voigt eine große Hilfe. Er hat stets Zeit gefunden meine Fragen zu beantworten, meine Gedanken zu ordnen und wertvolle Hinweise zu geben. Dafür möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken. Ebenso danke ich Dr. Hendrik Vogt für wertvolle Kommentare und Verbesserungsvorschläge.

Außerdem haben auch meinen Mitstudenten Heinrich Küttler und Marcus „Moppi" Waurick einen großen Anteil am gesamten Verlauf meines Mathematikstudiums und dieser Arbeit gehabt. Vielen Dank für den Enthusiasmus und die vielen hilfreichen Ideen während des gesamten Studiums.

Ich bedanke mich auch bei meiner Familie, insbesondere bei meinen Eltern, für die Unterstützung während meiner Studienzeit.

Dresden, im September 2009 Christian Seifert

1 Eindimensionale singuläre Diffusion

Zu Beginn möchten wir eindimensionale singluäre Diffusion erarbeiten. Dies modelliert die Bewegung eines Teilchens auf einem Geradenstück. Dabei bedeutet „singulär“ in diesem Zusammenhang, dass Diffusion mit „Lücken“ vorliegt. Modellhaft kann sich das Teilchen also nicht überall auf der Geraden aufhalten, sondern nur in vorgegebenen Bereichen. Das wird dadurch erreicht, dass man im Grundraum ein neues Maß μ einführt, welches die möglichen Aufenthaltsorte des Teilchens beschreibt. Das Teilchen ist also nur in $\operatorname{spt}\mu$ lokalisiert und wird dort durch das Maß μ beschleunigt oder abgebremst. Für die dem Diffusionsprozess zugeordnete Form wird weiterhin die klassische Dirichlet-Form verwendet, d. h. die Bewegung des Teilchen ist weiterhin von der Brown'schen Bewegung „gesteuert“.

Ziel des Abschnitts ist die Beschreibung des mit der Diffusion assoziierten Operators H. Außerdem werden Bedingungen am Rand angegeben, so dass die von $-H$ erzeugte C_0-Halbruppe „schöne“ Eigenschaften hat, also positivitätserhaltend bzw. kontraktiv ist. Zum Ende schließt sich noch eine kurze Diskussion der verschiedenen Randbedingungen an.

In der gesamten Arbeit sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und alle auftretenden Funktionenräume bestehen aus $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen.

Wir folgen hier der Darstellung von [6].

1.1 Singuläre Diffusion auf einem Intervall

In diesem ersten Kapitel seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Weiterhin sei μ ein endliches Borelmaß auf $[a,b]$ mit $a, b \in \operatorname{spt}\mu$ und $\mu(\{a,b\}) = 0$. Damit folgt insbesondere $\mu \neq 0$. Wir betrachten den Hilbertraum $\mathcal{H} := L_2((a,b),\mu)$.

1.1 Bemerkung. Wir könnten auch $\mu = 0$ zulassen. Dies würde allerdings zu dem trivialen Hilbertraum $\mathcal{H} = \{0\}$ führen. Wir werden jedoch zu genau dieser Möglichkeit später zurückkommen, wenn wir den diskreten Laplace-Operator auf den Knoten eines Graphen betrachten wollen.

Sei $U := [a,b] \setminus \operatorname{spt}\mu$. Da U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, gibt es $N \subseteq \mathbb{N}$ und eine Familie $((a_j,b_j))_{j\in N}$ paarweise disjunkter Intervalle mit

$$U = \bigcup_{j\in N} (a_j, b_j).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} C_\mu[a,b] &:= \big\{f \in C[a,b];\ f|_U \in C^2(U),\ (f|_U)'' = 0\big\} \\ &= \{f \in C[a,b];\ f \text{ affin linear auf den Komp. von } U\}, \\ W^1_{2,\mu}(a,b) &:= W^1_2(a,b) \cap C_\mu[a,b]. \end{aligned}$$

Also ist f genau dann in $C_\mu[a,b]$, wenn f stetig auf $[a,b]$ und harmonisch auf U ist. $C_\mu[a,b]$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $C[a,b]$, also selbst ein Banachraum. Nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz gilt $W^1_2(a,b) \subseteq C[a,b]$ und wir werden immer den stetigen Repräsentanten wählen.

1.2 Lemma ([6], Lemma 1.2). *Sei $f \in W^1_2(a,b)$. Dann gibt es $\tilde{f} \in W^1_{2,\mu}(a,b)$ mit $\tilde{f} = f$ μ-fast überall.*

Beweis. Sei $\tilde{f}$ definiert durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(a_j) + \frac{f(b_j)-f(a_j)}{b_j-a_j}(x-a_j) & \text{falls } x \in (a_j,b_j), j \in N, \\ f(x) & \text{falls } x \in \operatorname{spt}\mu. \end{cases}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ seien weiterhin

$$f_n(x) := \begin{cases} f(a_j) + \frac{f(b_j)-f(a_j)}{b_j-a_j}(x-a_j) & \text{falls } x \in (a_j,b_j), j \in N, j \leq n, \\ f(x) & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$g_n(x) := \begin{cases} \frac{f(b_j)-f(a_j)}{b_j-a_j} & \text{falls } x \in (a_j,b_j),\ j \in N,\ j \leq n, \\ f'(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f_n \in W_2^1(a,b)$, $f_n' = g_n$ und $\tilde{f} = f_n = f$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition gilt $\tilde{f} \in C_\mu[a,b]$. Außerdem erhalten wir $f_n \to \tilde{f}$ gleichmäßig. Dies ist klar für N endlich. Sei also N nicht endlich. Für $j \in N$ und $x \in (a_j,b_j)$ gilt

$$f(x) = f(a_j) + \int\limits_{a_j}^{x} f'(y)\,dy.$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $j \in N$, $j > n$ und $x \in (a_j,b_j)$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \left|f_n(x) - \tilde{f}(x)\right|^2 &= \left|f(x) - f(a_j) - \frac{f(b_j)-f(a_j)}{b_j-a_j}(x-a_j)\right|^2 \\ &\leq \left(\int\limits_{a_j}^{x} \left|f'(y) - \frac{f(b_j)-f(a_j)}{b_j-a_j}\right| dy\right)^2 \\ &\leq (b_j-a_j)\int\limits_{a_j}^{b_j} \left|f'(y) - \frac{f(b_j)-f(a_j)}{b_j-a_j}\right|^2 dy \\ &\leq (b_j-a_j)\int\limits_{a_j}^{b_j} \left(2\left|f'(y)\right|^2 + 2\left|\frac{f(b_j)-f(a_j)}{b_j-a_j}\right|^2\right) dy \\ &\leq 2(b_j-a_j)\int\limits_{a_j}^{b_j} \left|f'(y)\right|^2 dy + 2\left|f(b_j)-f(a_j)\right|^2. \end{aligned}$$

Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0,\varepsilon)$, so dass für alle

$x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ auch $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt. Wegen $b_j - a_j \to 0$ für $j \to \infty$ gibt es $j_0 \in N$, so dass $b_j - a_j < \delta$ für $j > j_0$. Da $f' \in L_2(a,b)$ ist, gilt

$$\int\limits_{\operatorname{spt}\mu} \left|f'(x)\right|^2 \, dx + \sum_{j \in N} \int\limits_{a_j}^{b_j} \left|f'(x)\right|^2 \, dx < \infty,$$

also insbesondere

$$\int\limits_{a_j}^{b_j} |f'(x)|^2 \, dx \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Daher gibt es $j_1 \in N$, so dass $\int_{a_j}^{b_j} \left|f'(x)\right|^2 \, dx < \varepsilon$ für $j > j_1$. Für $n > \max\{j_0, j_1\}$ und $j > n$ folgt dann, dass

$$|f_n(x) - \tilde{f}(x)|^2 \leq 2(b_j - a_j) \int\limits_{a_j}^{b_j} \left|f'(y)\right|^2 \, dy + 2\,|f(b_j) - f(a_j)|^2 \leq 4\varepsilon^2$$

für alle $x \in (a_j, b_j)$ gilt. Da $f_n(x) = \tilde{f}(x)$ für alle anderen $x \in [a,b]$ ist, erhalten wir insgesamt

$$|f_n(x) - \tilde{f}(x)| \leq 2\varepsilon \quad (x \in [a,b]).$$

Also konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen $\tilde{f}$.

Für $x \in (a,b)$ sei $g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Für $n \in \mathbb{N}$, $j \in N$, $j \leq n$ und $x \in (a_j, b_j)$ gilt

$$\int\limits_{a_j}^{b_j} |g_n(x)| \, dx = (b_j - a_j) \left| \frac{f(b_j) - f(a_j)}{b_j - a_j} \right| \leq \int\limits_{a_j}^{b_j} \left|f'(x)\right| \, dx.$$

Daher folgt $|g_n| \leq |f'|$ λ-f.ü.[1] Mit dem Satz von der majorisierten Konver-

[1] Wir bezeichnen mit λ^n das n-dimensionale Lebesgue-Maß. Im Fall $n = 1$ schreiben wir nur λ für λ^1.

genz erhalten wir $g \in L_2(a,b)$, $g_n \to g$ in $L_2(a,b)$. Insgesamt ergibt sich $\tilde{f} \in W^1_{2,\mu}(a,b)$ und $\tilde{f}' = g$. //

Sei $f \in D := \{f \in \mathcal{H};\ \exists\, g \in W^1_2(a,b) : g = f\ \mu\text{-f.ü.}\}$. Sei $g \in W^1_2(a,b)$ mit $g = f$ μ-f.ü. Nach Lemma 1.2 ist $\tilde{g} = g = f$ μ-f.ü. Außerdem ist $\tilde{g}$ durch f eindeutig bestimmt: Ist $f = 0$ μ-f.ü., so ist $\tilde{g} = 0$ μ-f.ü. Da $\tilde{g}$ gleichmäßig stetig ist, gilt $\tilde{g}(x) = 0$ für alle $x \in \operatorname{spt}\mu$. Nun ist $\tilde{g}$ affin linear auf den Komponenten von U. Damit folgt $\tilde{g}(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, also $\tilde{g} = 0$ in $W^1_{2,\mu}(a,b)$. Sei $\iota(f) := \tilde{g}$. Dann definiert $\iota : D \to W_{2,\mu}(a,b)$ eine lineare Abbildung. Die Wohldefiniertheit von $\iota : D \to W^1_{2,\mu}(a,b)$ lässt sich auch so interpretieren, dass die Abbildung $\kappa : W^1_{2,\mu}(a,b) \to D$, $\kappa(f) := f$ injektiv ist und damit $W^1_{2,\mu}(a,b)$ als Teilraum von $\mathcal{H}$ aufgefasst werden kann. Es gilt sogar $\iota = \kappa^{-1}$.

Zur Beschreibung der Randbedingungen an den Intervallgrenzen seien $\alpha, \beta \in \{0,1\}$, $L_a \in \alpha\mathbb{R}$ und $L_b \in \beta\mathbb{R}$. Wir definieren die Form τ in $\mathcal{H}$ durch

$$\begin{aligned} D(\tau) &:= \{f \in \mathcal{H};\ \exists\, g \in W^1_2(a,b) : g = f\ \mu\text{-f.ü.}, \\ &\qquad\qquad g(a) \in \alpha\mathbb{K},\ g(b) \in \beta\mathbb{K}\}, \\ \tau(f,g) &:= \int_a^b \iota(f)'(x)\overline{\iota(g)'(x)}\,dx \\ &\quad + L_a\iota(f)(a)\overline{\iota(g)(a)} + L_b\iota(f)(b)\overline{\iota(g)(b)}. \end{aligned}$$

Wir wollen Eigenschaften der Form τ herausfinden. Sie ist offensichtlich symmetrisch. Als nächstes zeigen wir, dass sie dicht definiert, quasi-akkretiv und abgeschlossen ist. Damit lässt sich der Form τ ein selbstadjungierter Operator H zuordnen. Ziel der Darstellung ist die Angabe des Definitionsbereichs des Operators und der Nachweis von Positivität und Kontraktivität der mit τ bzw. mit H assoziierten C_0-Halbgruppe.

1.3 Satz ([6], Theorem 1.3)**.** *Es gilt $C^1_c(a,b) \subseteq D(\tau)$. Insbesondere ist τ dicht definiert.*

Beweis. Sei $f \in C^1_c(a,b)$. Wegen $f(a) = f(b) = 0$ gilt $f \in D(\tau)$. Da $C^1_c(a,b)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt die Behauptung. //

1.4 Lemma ([6], Lemma 1.4). *Es gibt $C \geq 0$, so dass*

$$\|f\|_\infty \leq C \left(\|f'\|^2_{L_2(a,b)} + \|f\|^2_{\mathcal{H}} \right)^{1/2} \qquad (f \in W^1_2(a,b)).$$

Beweis. Sei $f \in W^1_2(a,b)$. Für $x, y \in (a,b)$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| \int\limits_y^x f'(z)\, dz \right| \leq \|f'\|_{L_2(a,b)} (b-a)^{1/2},$$

also auch

$$|f(x)| \leq |f(y)| + \|f'\|_{L_2(a,b)} (b-a)^{1/2}.$$

Integration bezüglich μ liefert

$$\begin{aligned} |f(x)|\, \mu((a,b)) &= \int\limits_a^b |f(x)|\ d\mu(y) \\ &\leq \int\limits_a^b |f(y)|\ d\mu(y) + \|f'\|_{L_2(a,b)} (b-a)^{1/2} \mu((a,b)) \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}}\, \mu((a,b))^{1/2} + \|f'\|_{L_2(a,b)} (b-a)^{1/2} \mu((a,b)). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die gewünschte Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\leq \|f\|_{\mathcal{H}}\, \mu((a,b))^{-1/2} + \|f'\|_{L_2(a,b)} (b-a)^{1/2} \\ &\leq 2 \left(\|f\|^2_{\mathcal{H}}\, \mu((a,b))^{-1} + \|f'\|^2_{L_2(a,b)} (b-a) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

//

1.5 Satz (vgl. [6], Theorem 1.5). *τ ist quasi-akkretiv und abgeschlossen.*

Beweis. Sei $M := \max\{|L_a|, |L_b|\} + 1$. Sei $r \in (0, b-a]$. Da $a, b \in \operatorname{spt} \mu$ ist, aber $\mu(\{a,b\}) = 0$ gilt, sind $\mu((a, a+r)), \mu((b-r, b)) \neq 0$. Sei $f \in D(\tau)$. Aus Lemma 1.4 folgt

$$\begin{aligned} |\iota(f)(a)|^2 &\leq 2r \left\|\iota(f)'\right\|^2_{L_2(a,a+r)} + 2\, \|f\|^2_{L_2((a,a+r),\mu)}\, \mu((a,a+r))^{-1}, \\ |\iota(f)(b)|^2 &\leq 2r \left\|\iota(f)'\right\|^2_{L_2(b-r,b)} + 2\, \|f\|^2_{L_2((b-r,b),\mu)}\, \mu((b-r,b))^{-1}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun $r := \min\{b-a, \frac{1}{8M}\}$ und

$$\gamma := 4M \max\{\mu((a,a+r))^{-1}, \mu((b-r,b))^{-1}\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \left\|\iota(f)'\right\|_{L_2(a,b)}^2 + L_a \left|\iota(f)(a)\right|^2 + L_b \left|\iota(f)(b)\right|^2 \\
&\geq \left\|\iota(f)'\right\|_{L_2(a,b)}^2 - M(\left|\iota(f)(a)\right|^2 + \left|\iota(f)(b)\right|^2) \\
&\geq \left\|\iota(f)'\right\|_{L_2(a,b)}^2 - \left(\frac{1}{2}\left\|\iota(f)'\right\|_{L_2(a,b)}^2 + \gamma \left\|f\right\|_{\mathcal{H}}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\|\iota(f)'\right\|_{L_2(a,b)}^2 - \gamma\,(f\,|\,f)_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}$$

Also ist τ quasi-akkretiv.

Weiterhin ergibt sich wegen

$$\left\|\iota(f)'\right\|_{L_2(a,b)}^2 \leq 2(\tau+\gamma)(f)$$

und Lemma 1.4 die Stetigkeit der Einbettung $D_\tau \ni f \mapsto \iota(f) \in C[a,b]$.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(\tau)$, $f_n \to f$ in $\mathcal{H}$, $\tau(f_n - f_m) \to 0$ für $m, n \to \infty$. Da (f_n) eine $\|\cdot\|_\tau$-Cauchy-Folge ist, ist $(\iota(f_n))$ auch eine $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy-Folge. Es gibt $g \in C_\mu[a,b]$ mit $\|\iota(f_n) - g\|_\infty \to 0$; insbesondere gilt $g(a) \in \alpha\mathbb{K}$ und $g(b) \in \beta\mathbb{K}$. Da μ endlich ist, gilt auch $f_n \to g$ in $\mathcal{H}$, d. h. $f = g$ μ-fast überall. Da (f_n) gleichmäßig gegen g konvergiert und $(\iota(f_n)')$ als Cauchy-Folge in $L_2(a,b)$ auch konvergent ist, folgt $g \in W_2^1(a,b)$ und $\iota(f_n)' \to g'$ in $L_2(a,b)$. Wir erhalten $g \in W_{2,\mu}^1(a,b)$. Damit ist $f \in D(\tau)$ und es gelten $\iota(f) = g$ und

$$\begin{aligned}
\tau(f_n - f) = &\int_a^b \left|\iota(f_n)'(x) - g'(x)\right|^2\,dx \\
&+ L_a \left|\iota(f_n)(a) - g(a)\right|^2 + L_b \left|\iota(f_n)(b) - g(b)\right|^2 \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

//

Wir haben also bisher gezeigt, dass τ eine symmetrische quasi-akkretive dicht definierte abgeschlossene Form ist.

1.6 Bemerkung. Sind $L_a, L_b \geq 0$, so ist τ sogar positiv.

Sei H der mit der Form τ assoziierte selbstadjungierte Operator. Zur Beschreibung des Operators H benötigen wir noch eine Definition.

Definition. Seien $f \in L_{1,loc}(a,b)$, $g \in L_1((a,b),\mu)$ und es gelte

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{(a,b)} g(x)\varphi(x)\,d\mu(x) \quad (\varphi \in C_c^\infty(a,b)).$$

Dann heißt g *distributionelle Ableitung von* f *bezüglich* μ. Wir schreiben dafür $\partial_\mu f := g$.

1.7 Bemerkung. Die distributionelle Ableitung bezüglich μ ist wohldefiniert. Ist $g \in L_1((a,b),\mu)$ mit

$$\int_{(a,b)} g(x)\varphi(x)\,d\mu(x) = 0 \quad (\varphi \in C_c^\infty(a,b)),$$

dann gilt $g = 0$ μ-fast überall.

1.8 Lemma. *Seien $f \in L_{1,loc}(a,b)$ und $g \in L_1((a,b),\mu)$. Dann sind äquivalent:*

(a) $\partial_\mu f = g$.
(b) Es gibt $c \in \mathbb{K}$, so dass

$$f(x) = c + \int_{(a,x)} g(y)\,d\mu(y) \quad \lambda\text{-f.ü.}$$

Gilt (b), so besitzt f einseitige Grenzwerte in den Punkten a und b (sogar in jedem Punkt in $[a,b]$). Außerdem folgt $f' = 0$ auf U, d. h. f ist λ-f.ü. konstant auf jeder (Zusammenhangs-)Komponente von U.

Beweis. Für $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ gilt mit dem Satz von Fubini

$$\int_a^b \left(f(x) - \int_{(a,x)} g(y)\, d\mu(y) \right) \varphi'(x)\, dx$$
$$= \int_a^b f(x)\varphi'(x)\, dx - \int_{(a,b)} \int_y^b \varphi'(x)\, dx g(y)\, d\mu(y)$$
$$= \int_a^b f(x)\varphi'(x)\, dx + \int_{(a,b)} \varphi(y) g(y)\, d\mu(y).$$

„(a) $\Rightarrow$ (b)”: Mit der obigen Gleichung folgt

$$\int_a^b \left(f(x) - \int_{(a,x)} g(y)\, d\mu(y) \right) \varphi'(x)\, dx = 0 \quad (\varphi \in C_c^\infty(a,b)).$$

Damit ist $x \mapsto f(x) - \int_{(a,x)} g(y)\, d\mu(y)$ λ-fast überall konstant.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“: Aus der obigen Gleichung folgt

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\, dx + \int_{(a,b)} \varphi(y) g(y)\, d\mu(y) = 0 \quad (\varphi \in C_c^\infty(a,b)).$$

Die Existenz der einseitigen Grenzwerte ergibt sich aus der Integraldarstellung. Sei nun $N_0 \subseteq (a,b)$ messbar mit $\lambda(N_0) = 0$ und

$$f(x) = c + \int_{(a,x)} g(y)\, d\mu(y) \quad (x \in (a,b) \setminus N_0).$$

Ist V eine Zusammenhangskomponente von U, so folgt für $x_1, x_2 \in V \setminus N_0$

mit $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \int\limits_{(x_1,x_2)} g(y)\, d\mu(y) = 0.$$

D. h. f ist λ-f.ü. konstant auf den Komponenten von U. //

Sei $\hat{H}$ in $\mathcal{H}$ definiert durch

$$\begin{aligned} D(\hat{H}) &:= \{f \in \mathcal{H};\ \exists\, g \in W_2^1(a,b) : g = f\ \mu\text{-f.ü.}, \\ &\qquad\qquad \partial_\mu \iota(f)' \,\text{existiert},\ \partial_\mu \iota(f)' \in \mathcal{H}\}, \\ \hat{H} f &:= -\partial_\mu \iota(f)' \quad (f \in D(\hat{H})). \end{aligned}$$

1.9 Bemerkung. $D(\hat{H})$ besteht genau aus den Funktionen $f \in D$ ($= D(\iota)$), für die $(\varphi \mapsto -\int_a^b \iota(f)'(x)\varphi'(x)\, dx) \in (C_c^\infty(a,b), \|\cdot\|_{\mathcal{H}})'$ gilt, denn nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es dann ein eindeutiges $g \in \mathcal{H}$, so dass

$$-\int\limits_a^b \iota(f)'(x)\varphi'(x)\, dx = (\varphi \,|\, \overline{g}) = \int\limits_{(a,b)} g(x)\varphi(x)\, d\mu(x)$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ gilt.

1.10 Bemerkung. Sei $\mu = \lambda|_{\mathcal{B}[a,b]}$ (für einen topologischen Raum X sei $\mathcal{B}(X)$ die σ-Algebra der Borelmengen auf X). Dann ist $\partial_\mu = \partial_\lambda = \partial$ der klassische Ableitungsoperator. Wir erhalten dann $\iota = I$ die Identität und $D(\hat{H}) = W_2^2(a,b)$. Insbesondere gilt dann auch $C^2[a,b] \subseteq D(\hat{H})$.

1.11 Lemma. *Sei $f \in W_{2,\mu}^1(a,b)$, $g \in W_2^1(a,b)$, $\tilde{g} \in W_{2,\mu}^1(a,b)$ nach Lemma 1.2. Dann gilt*

$$\int\limits_a^b f'(x)\overline{\tilde{g}'(x)}\, dx = \int\limits_a^b f'(x)\overline{g'(x)}\, dx.$$

Beweis. Es gilt $\tilde{g}(x) = g(x)$ für $x \in \operatorname{spt}\mu$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)\overline{\tilde{g}'(x)}\,dx &= \int_{\operatorname{spt}\mu} f'(x)\overline{\tilde{g}'(x)}\,dx + \sum_{j\in N} f'(a_j+)\int_{a_j}^{b_j} \overline{\frac{\tilde{g}(b_j)-\tilde{g}(a_j)}{b_j-a_j}}\,dx \\
&= \int_{\operatorname{spt}\mu} f'(x)\overline{g'(x)}\,dx + \sum_{j\in N} f'(a_j+)\overline{(g(b_j)-g(a_j))} \\
&= \int_{\operatorname{spt}\mu} f'(x)\overline{g'(x)}\,dx + \sum_{j\in N} f'(a_j+)\int_{a_j}^{b_j} \overline{g'(x)}\,dx \\
&= \int_a^b f'(x)\overline{g'(x)}\,dx.
\end{aligned}$$

//

1.12 Satz ([6], Theorem 1.9). *Der Operator H ist gegeben durch*

$$\begin{aligned}
D(H) := \Big\{ & f \in D(\hat{H});\ \iota(f)(a) \in \alpha\mathbb{K},\ \iota(f)(b) \in \beta\mathbb{K}, \\
& \alpha\iota(f)'(a+) = L_a\iota(f)(a),\ -\beta\iota(f)'(b-) = L_b\iota(f)(b)\Big\}, \\
Hf := {} & -\partial_\mu\iota(f)' \quad (f \in D(H)).
\end{aligned}$$

Beweis. Sei zunächst $f \in D(\hat{H})$. Dann gilt

$$\iota(f)'(x) = \iota(f)'(a+) + \int_{(a,x)} \partial_\mu\iota(f)'(y)\,d\mu(y) \quad \lambda\text{-f.ü.}$$

Sei $g \in D(\tau)$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \iota(f)'(x)\overline{\iota(g)'(x)}\,dx \\
&= \int_a^b \Big(\iota(f)'(a+) + \int_{(a,x)} \partial_\mu\iota(f)'(y)\,d\mu(y)\Big)\overline{\iota(g)'(x)}\,dx
\end{aligned}$$

$$= \iota(f)'(a+)\left(\overline{\iota(g)(b)} - \overline{\iota(g)(a)}\right) + \int_a^b \int_{(a,x)} \partial_\mu \iota(f)'(y)\, d\mu(y) \overline{\iota(g)'(x)}\, dx$$

$$= \iota(f)'(a+)\left(\overline{\iota(g)(b)} - \overline{\iota(g)(a)}\right) + \int_{(a,b)} \partial_\mu \iota(f)'(y) \int_y^b \overline{\iota(g)'(x)}\, dx\, d\mu(y)$$

$$= \iota(f)'(a+)\left(\overline{\iota(g)(b)} - \overline{\iota(g)(a)}\right)$$

$$+ \int_{(a,b)} \partial_\mu \iota(f)'(y) \left(\overline{\iota(g)(b)} - \overline{\iota(g)(y)}\right) d\mu(y)$$

$$= \iota(f)'(b-)\overline{\iota(g)(b)} - \iota(f)'(a+)\overline{\iota(g)(a)} - \int_{(a,b)} \partial_\mu \iota(f)'(y)\overline{g(y)}\, d\mu(y).$$

Umgeschrieben bedeutet das

$$\left(\hat{H}f \,\middle|\, g\right)_{\mathcal{H}} = -\iota(f)'(b-)\overline{\iota(g)(b)} + \iota(f)'(a+)\overline{\iota(g)(a)} + \int_a^b \iota(f)'(x)\overline{\iota(g)'(x)}\, dx.$$

Sei nun $f \in D(H)$, $g \in D(\tau)$. Wir erhalten

$$(Hf \,|\, g)$$

$$= \tau(f, g)$$

$$= \int_a^b \iota(f)'(x)\overline{\iota(g)'(x)}\, dx + L_a \iota(f)(a)\overline{\iota(g)(a)} + L_b \iota(f)(b)\overline{\iota(g)(b)}.$$

Sei $g \in C_c^1(a, b) \subseteq D(\tau)$. Dann ergibt sich wegen $\iota(g) = \tilde{g}$ mit Lemma 1.11

$$\int_{(a,b)} Hf(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x) = \tau(f, g)$$

$$= \int_a^b \iota(f)'(x)\overline{\iota(g)'(x)}\, dx = \int_a^b \iota(f)'(x)\overline{g'(x)}\, dx.$$

Daher existiert $\partial_\mu \iota(f)'$, und es gilt $\partial_\mu \iota(f)' = -Hf \in \mathcal{H}$. Also ist $f \in D(\hat{H})$ und $Hf = -\partial_\mu \iota(f)' = \hat{H}f$.

Für $g \in D(\tau)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\tau(f,g) - L_a\iota(f)(a)\overline{\iota(g)(a)} - L_b\iota(f)(b)\overline{\iota(g)(b)} \\
&= \int\limits_a^b \iota(f)'(x)\overline{\iota(g)'(x)}\,dx \\
&= \iota(f)'(b-)\overline{\iota(g)(b)} - \iota(f)'(a+)\overline{\iota(g)(a)} + (Hf\,|\,g)_{\mathcal{H}}\,,
\end{aligned}$$

d. h.

$$\big(L_a\iota(f)(a) - \iota(f)'(a+)\big)\,\overline{\iota(g)(a)} + \big(L_b\iota(f)(b) + \iota(f)'(b-)\big)\,\overline{\iota(g)(b)} = 0.$$

Es gilt $L_a = L_a\alpha$. Ist $\alpha = 0$, so ist $\iota(f)(a) = 0$ wegen $f \in D(\tau)$. Daher folgt

$$L_a\iota(f)(a) = \alpha\iota(f)'(a+).$$

Ist $\alpha = 1$, dann ergibt sich mit $g_a \in D(\tau)$ definiert durch $g_a(x) := x - b$, dass

$$L_a\iota(f)(a) = \iota(f)'(a+) = \alpha\iota(f)'(a+).$$

Analog erhalten wir $L_b\iota(f)(b) = -\beta\iota(f)'(b-)$.

Sei nun $f \in D(\hat{H})$ und es gelte sowohl $\iota(f)(a) \in \alpha\mathbb{K}$, $\iota(f)(b) \in \beta\mathbb{K}$, also auch $\alpha\iota(f)'(a+) = L_a\iota(f)(a)$ und $-\beta\iota(f)'(b-) = L_b\iota(f)(b)$. Dann ist $f \in D(\tau)$. Sei $g \in D(\tau)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{H}f \,\middle|\, g\right)_{\mathcal{H}} \\
&= -\iota(f)'(b-)\overline{\iota(g)(b)} + \iota(f)'(a+)\overline{\iota(g)(a)} + \int\limits_a^b \iota(f)'(x)\overline{\iota(g)'(x)}\,dx \\
&= L_b\iota(f)(b)\overline{\iota(g)(b)} + L_a\iota(f)(a)\overline{\iota(g)(a)} + \int\limits_a^b \iota(f)'(x)\overline{\iota(g)'(x)}\,dx \\
&= \tau(f,g).
\end{aligned}$$

Nach Definition von H folgt $f \in D(H)$, $Hf = \hat{H}f$. //

1.2 Eigenschaften der assoziierten C_0-Halbgruppe

Nachdem der mit τ assoziierte Operator beschrieben worden ist, wollen wir noch Positivität und L_∞-Kontraktivität der mit H assoziierten C_0-Halbgruppe $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ zeigen. Dazu benutzen wir die Beurling-Deny-Kriterien. Diese sind im Anhang aufgeführt.

1.13 Lemma. *Sei $F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eine Normalkontraktion, $f \in D(\tau)$. Dann ist $F \circ f \in D(\iota)(=D)$. Sei $g := F \circ \iota(f)$ nach Lemma 1.2. Dann gilt*

$$\int_a^b \left|\iota(F \circ f)'(x)\right|^2 dx = \int_a^b \left|g'(x)\right|^2 dx \leq \int_a^b \left|\iota(f)'(x)\right|^2 dx.$$

Beweis. Zunächst eine Vorbemerkung: Eine Funktion $f \in C[a,b]$ ist genau dann in $W_1^1(a,b)$, wenn f absolutstetig ist. Dann ist f λ-f.ü. differenzierbar, und klassische und distributionelle Ableitung stimmen überein (Satz A.1).

Nach der Vorbemerkung ist $F \circ \iota(f)$ absolutstetig und daher $F \circ \iota(f) \in W_1^1(a,b)$. Sei $x \in (a,b)$ so, dass sowohl $\iota(f)$ als auch $F \circ \iota(f)$ in x differenzierbar sind. Dann gilt $|(F \circ \iota(f))'(x)| \leq |\iota(f)'(x)|$, mit anderen Worten: $|(F \circ \iota(f))'| \leq |\iota(f)'|$ λ-f.ü. Weil F Normalkontraktion ist, erhalten wir auch $|F \circ \iota(f)| \leq |\iota(f)|$. Dies zeigt $F \circ \iota(f) \in W_2^1(a,b)$. Aus $\iota(f) = f$ μ-f.ü. folgt $F \circ f = F \circ \iota(f)$ μ-f.ü. Damit ist $F \circ f \in D(\iota)$. Es gilt $\iota(F \circ f) = F \circ \iota(f)$ μ-f.ü. Da beide Seiten W_2^1-Funktionen, also gleichmäßig stetig, sind, folgt $\iota(F \circ f)(x) = F \circ \iota(f)(x)$ für alle $x \in \operatorname{spt} \mu$. Es gilt sogar $\iota(F \circ f) = g$ auf $[a,b]$, da beide auf $\operatorname{spt} \mu$ übereinstimmen und auf den Komponenten von U affin linear sind. Daraus folgt die erste Gleichheit. Es gilt $|g'| = |F \circ \iota(f)'| \leq |\iota(f)'|$ λ-f.ü. auf $\operatorname{spt} \mu$. Für $j \in N$ und $x \in (a_j, b_j)$ erhalten wir

$$\int_{a_j}^{b_j} \left|g'(x)\right|^2 dx = \frac{|F \circ \iota(f)(b_j) - F \circ \iota(f)(a_j)|^2}{b_j - a_j}$$

und da F eine Normalkontraktion ist, folgern wir weiter

$$\leq \frac{|\iota(f)(b_j) - \iota(f)(a_j)|^2}{b_j - a_j} = \int_{a_j}^{b_j} \left|\iota(f)'(x)\right|^2 \, dx.$$

Daraus ergibt sich dann die gewünschte Ungleichung:

$$\int_a^b \left|g'(x)\right|^2 \, dx = \int_{\operatorname{spt}\mu} \left|g'(x)\right|^2 \, dx + \sum_{j \in N} \int_{a_j}^{b_j} \left|g'(x)\right|^2 \, dx$$

$$\leq \int_{\operatorname{spt}\mu} \left|\iota(f)'(x)\right|^2 \, dx + \sum_{j \in N} \int_{a_j}^{b_j} \left|\iota(f)'(x)\right|^2 \, dx = \int_a^b \left|\iota(f)'(x)\right|^2 \, dx. \qquad //$$

1.14 Satz (vgl. [6], Theorem 1.7). *(a) Die C_0-Halbgruppe $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ ist positiv.*

(b) Seien $L_a, L_b \geq 0$. Dann ist die C_0-Halbgruppe $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ submarkovsch.

Beweis. Sei $f \in D(\tau)$ und $F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eine Normalkontraktion. Aus $f = \iota(f)$ μ-f.ü. folgt $\iota(F \circ f) = F \circ \iota(f)$ μ-f.ü. Da beide Seiten gleichmäßig stetig sind, erhalten wir $\iota(F \circ f)(x) = F \circ \iota(f)(x)$ für alle $x \in \operatorname{spt}\mu$, insbesondere für a und b.

(a) Sei $f \in D(\tau)$. Da $|\cdot|$ eine Normalkontraktion ist, erhalten wir $|f| \in D(\tau)$ und

$$\tau(|f|) = \int_a^b \left|\iota(|f|)'(x)\right|^2 \, dx + L_a \left|\iota(|f|)(a)\right|^2 + L_b \left|\iota(|f|)(b)\right|^2$$

$$\leq \int_a^b \left|\iota(f)'(x)\right|^2 \, dx + L_a \left|\iota(f)(a)\right|^2 + L_b \left|\iota(f)(b)\right|^2 = \tau(f).$$

(b) Nach (a) ist $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ positiv. Sei $0 \leq f \in D(\tau)$. Die Abbildung

$x \mapsto \operatorname{Re} x \wedge 1$ ist eine Normalkontraktion. Also gilt $f \wedge 1 \in D(\tau)$ und

$$\begin{aligned}
\tau(f \wedge 1) &= \int_a^b \left|\iota(f \wedge 1)'(x)\right|^2 \, dx + L_a \left|f \wedge 1(a)\right|^2 + L_b \left|f \wedge 1(b)\right|^2 \\
&\le \int_a^b \left|f'(x)\right|^2 \, dx + L_a \left|f(a)\right|^2 + L_b \left|f(b)\right|^2 = \tau(f). \qquad //
\end{aligned}$$

1.15 Bemerkung. Wir können in der Definition der Form τ auch $L_a \in \alpha\mathbb{K}$ bzw. $L_b \in \beta\mathbb{K}$ zulassen. Dies führt allerdings zu nicht-symmetrischen Formen.

Die Randterme in der Form lassen sich auch als Skalarprodukte in $\mathbb{K}$ auffassen: Für $f, g \in D(\tau)$ ist

$$\begin{aligned}
L_a f(a)\overline{g(a)} &= \left(L_a f(a) \,|\, g(a)\right), \\
L_b f(b)\overline{g(b)} &= \left(L_b f(b) \,|\, g(b)\right).
\end{aligned}$$

Damit können L_a und L_b als lineare Operatoren in $\mathbb{K}$ – dem Randwertraum an den beiden Intervallenden – angesehen werden. Sind diese Operatoren selbstadjungiert, also $L_a, L_b \in \mathbb{R}$, so sind die Bedingungen des ersten Beurling-Deny-Kriteriums erfüllt. Sind sie sogar positiv, so sind die Bedingungen des zweiten Beurling-Deny-Kriteriums erfüllt.

1.3 Die verschiedenen Typen von Randbedingungen

Seien $\alpha = \beta = 0$. Für die zugehörige Form τ_D erhalten wir

$$\begin{aligned}
D(\tau_D) &= \left\{f \in \mathcal{H};\ \exists\, g \in W_2^1(a,b) : g = f \ \mu\text{-f.ü.},\ g(a) = g(b) = 0\right\}, \\
&= \left\{f \in \mathcal{H};\ \exists\, g \in W_{2,0}^1(a,b) : g = f \ \mu\text{-f.ü.}\right\}, \\
\tau_D(f,g) &= \int_a^b \iota(f)'(x)\overline{\iota(g)'(x)} \, dx.
\end{aligned}$$

Der assoziierte Operator H_D ist

$$
\begin{aligned}
D(H_D) &= \left\{ f \in D(\hat{H});\ \iota(f)(a) = \iota(f)(b) = 0 \right\}, \\
H_D f &= -\partial_\mu \iota(f)' \quad (f \in D(H)).
\end{aligned}
$$

Dies ist der Operator mit Dirichlet-Randdaten 0. Die Form τ_D ist die (im Sinne der Inklusion) kleinste Form dieses Typs.

Seien nun $\alpha = \beta = 1$ und $L_a = L_b = 0$. Für die entsprechende Form τ_N erhalten wir

$$
\begin{aligned}
D(\tau_N) &= \left\{ f \in \mathcal{H};\ \exists\, g \in W_2^1(a,b) : g = f \ \mu\text{-f.ü.} \right\}, \\
\tau_N(f,g) &= \int_a^b \iota(f)'(x)\overline{\iota(g)'(x)}\, dx.
\end{aligned}
$$

Der mit τ_N assoziierte Operator H_N ist

$$
\begin{aligned}
D(H_N) &= \left\{ f \in D(\hat{H});\ \iota(f)'(a+) = \iota(f)'(b-) = 0 \right\}, \\
H_N f &= -\partial_\mu \iota(f)' \quad (f \in D(H)).
\end{aligned}
$$

Dieser Operator hat Neumann-Randbedingungen. Im Sinne der Inklusion ist τ_N die größte Form dieses Typs.

In den anderen Fällen erhalten wir Robin-Randbedingungen, also eine Kopplung zwischen Werten der Ableitung und der Funktion am Rand.

2 Singuläre Diffusion auf endlichen Graphen

In diesem Kapitel betrachten wir singuläre Diffusion auf Graphen.

Dazu führen wir Quantengraphen ein. Ein *Quantengraph* besteht aus einem Graphen Γ und einem Differentialoperator auf dem Graphen. Außerdem werden noch „Randbedingungen“ gestellt, die zu besonderen Eigenschaften des Operators führen. Diese werden meist mittels Unterräumen definiert. Topologisch ist ein solcher Graph ein eindimensionaler CW-Komplex, besteht also aus eindimensionalen Zellen – den Kanten modelliert als Intervalle – und nulldimensionalen Verbindungen, den Knotenpunkten.

Wir betrachten hier auf jeder Kante des Graphen eine Diffusion wie in Kapitel 1. Ziel ist die Beschreibung des entsprechenden Operators und vor allem zugehöriger Randbedingungen, die zu selbstadjungierten Realisierungen führen. Dafür benötigen wir einige Hilfsmittel, wie sie zum Beispiel in [9] und [8] erarbeitet worden sind. Dort wird der Spezialfall des Lebesgue-Maßes auf jeder Kante betrachtet. Wir wollen ebenfalls zuerst diesen Fall untersuchen und dabei die selbstadjungierten Realisierungen charakterisieren. Ausgehend davon stellen wir die assoziierten Formen vor. Nachdem diese eingeführt worden sind, widmen wir uns der singulären Diffusion auf Graphen. Wir beginnen mit masselosen Knoten. Dazu benutzen wir die Beschreibung von selbstadjungierten Operatoren vermöge der assoziierten Form. Durch Erweiterung dieser Form auf den Fall mit Knotenmassen lässt sich auch dort der assoziierte Operator beschreiben. Für dieses Modell zeigen wir wieder Positivität und Kontraktivität der assoziierten C_0-Halbgruppe unter gewissen Voraussetzungen an die Randbedingungen. Da sich die Diffusion mit masselosen Knoten diesem Fall unterordnet, erhalten wir diese Eigenschaften auch für jenen Fall.

Die Resultate aus dem ersten Kapitel werden auch wieder reproduziert; und zwar für Graphen bestehend aus zwei masselosen Knoten, einer Kante zwischen diesen beiden Knoten und lokalen Randbedingungen in den beiden Knoten.

2.1 Symplektische Formen

Dieser Abschnitt dient der Vorbereitung. Es werden Grundlagen aus der Theorie der symplektischen Formen vorgestellt, die ein Kriterium für die Selbstadjungiertheit von Operatoren liefern: Ein Operator ist genau dann selbstadjungiert, wenn der Graph des Operators ein lagrangescher Unterraum bezüglich der Standardform ist. Außerdem leisten wir schon einige Vorarbeit, um die Randbedingungen von selbstadjungierten Realisierungen der Diffusion auf Graphen zu charakterisieren.

Definition. Sei X ein Vektorraum, $D \subseteq X$ ein Teilraum. Sei $\omega : D \times D \to \mathbb{K}$ sesquilinear. Der Teilraum $D(\omega) := D$ heißt *Definitionsbereich* von ω. Wir nennen ω *schief-symmetrische* oder *symplektische Form* in X, falls

$$\omega(f,g) = -\overline{\omega(g,f)} \quad (f,g \in D(\omega)).$$

Sei $U \subseteq D(\omega)$. Dann ist das *orthogonale Komplement bezüglich* ω definiert als

$$U^{\perp_\omega} := \{f \in D(\omega);\ \omega(f,g) = 0\ (g \in U)\}\,.$$

Ist U ein Teilraum von $D(\omega)$, der die Gleichheit $U = U^{\perp_\omega}$ erfüllt, so heißt *U lagrangesch*.

2.1 Satz. *Seien X_1, X_2 Vektorräume, ω_1, ω_2 schiefsymmetrische Formen in X_1 bzw. X_2 mit $D(\omega_1) = X_1$ und $D(\omega_2) = X_2$. Sei $f : X_1 \to X_2$ linear, surjektiv und es gelte*

$$\omega_1(x, y) = \omega_2(f(x), f(y)) \quad (x, y \in X_1).$$

Sei $U \subseteq X_2$ ein Teilraum. Dann sind äquivalent:

(a) U ist lagrangesch in X_2.
(b) $f^{-1}(U)$ ist lagrangesch in X_1.

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Sei $x \in f^{-1}(U)^{\perp_{\omega_1}}$. Sei $z \in U$. Dann gibt es $y \in f^{-1}(U)$, so dass $f(y) = z$. Es gilt

$$0 = \omega_1(x, y) = \omega_2(f(x), f(y)) = \omega_2(f(x), z).$$

Also ist $f(x) \in U^{\perp_{\omega_2}} = U$, d. h. $x \in f^{-1}(U)$. Dies zeigt die Inklusion $f^{-1}(U)^{\perp_{\omega_1}} \subseteq f^{-1}(U)$.

Sei andererseits $x \in f^{-1}(U)$. Dann gilt $f(x) \in U$. Sei $z \in U = U^{\perp_{\omega_2}}$. Wir erhalten $\omega_2(f(x), z) = 0$. Da f surjektiv ist, gibt es $y \in X_1$, so dass $f(y) = z$ ist; es gilt sogar $y \in f^{-1}(U)$. Damit ergibt sich

$$0 = \omega_2(f(x), z) = \omega_2(f(x), f(y)) = \omega_2(x, y).$$

Wir folgern $x \in f^{-1}(U)^{\perp_{\omega_1}}$, d. h. wir haben $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U)^{\perp_{\omega_1}}$ gezeigt.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“: Es gilt $f(f^{-1}(U)) = U$. Aus $f^{-1}(U) = (f^{-1}(U))^{\perp_{\omega_1}}$ folgt

$$0 = \omega_1(x, y) = \omega_2(f(x), f(y)) \quad (x, y \in f^{-1}(U)),$$

also

$$0 = \omega_2(f(x), f(y)) \quad (f(x), f(y) \in f(f^{-1}(U)) = U).$$

Wir erhalten daraus $U \subseteq U^{\perp_{\omega_2}}$.

Sei $z \in U^{\perp_{\omega_2}}$. Da f surjektiv ist, gibt es $y \in X_1$ mit $f(y) = z$. Für $x \in f^{-1}(U)$ gilt $f(x) \in f(f^{-1}(U)) = U$, und daher

$$0 = \omega_2(z, f(x)) = \omega_2(f(y), f(x)) = \omega_1(y, x).$$

Dies impliziert $y \in (f^{-1}(U))^{\perp_{\omega_1}} = f^{-1}(U)$, d. h. $z = f(y) \in U$. //

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann ist die *kanonische schief-symmetrische Form* oder *Standardform* auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ definiert als $\omega : (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \times (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \to \mathbb{K}$,

$$\omega((x,y),(u,v)) := \left(\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} = -\,(y \,|\, u)_{\mathcal{H}} + (x \,|\, v)_{\mathcal{H}}\,.$$

2.2 Bemerkung. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $M \subseteq \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, ω die Standardform auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Dann gilt mit $J := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$M^{\perp_\omega} = (JM)^\perp = JM^\perp.$$

2.3 Lemma. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein Operator in $\mathcal{H}$. Dann sind äquivalent:*

(a) A ist selbstadjungiert.
(b) $G(A)$ ist lagrangesch bezüglich der Standardform auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Es gilt $(Ax \,|\, y) = (x \,|\, Ay)$ für alle $x, y \in D(A)$. Die kanonische schief-symmetrische Form ω auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ verschwindet dann auf $G(A)$, d. h. es gilt $G(A) \subseteq G(A)^{\perp_\omega}$. Sei $(x, y) \in G(A)^{\perp_\omega}$. Dann gilt $\omega((x,y),(u,Au)) = 0$ für alle $u \in D(A)$; mit anderen Worten $(y \,|\, u) = (x \,|\, Au)$ für alle $u \in D(A)$. Also ist $x \in D(A^*) = D(A)$, $y = A^*x = Ax$. Wir erhalten $G(A) = G(A)^{\perp_\omega}$.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“: Nach Voraussetzung gilt $G(A) = G(A)^{\perp_\omega}$. Das bedeutet $(Ax \,|\, u) = (x \,|\, Au)$ für alle $x, u \in D(A)$. Daraus folgt $G(A) \subseteq G(A^*)$ (da wir noch nicht wissen, dass A^* als Operator existiert bezeichne $G(A^*)$ zunächst nur die Relation A^*). Sei $(x, y) \in G(A^*)$. Dann ist $(Au \,|\, x) = (u \,|\, y)$ für alle $u \in D(A)$, mit anderen Worten $(x, y) \in G(A)^{\perp_\omega} = G(A)$. Also folgt $G(A^*) = G(A)$ (insbesondere ist A^* ein Operator); A ist selbstadjungiert. //

2.4 Bemerkung. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$. Sei ω die Standardform auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Eine Variante der Aussage von Lemma 2.3 ist dann folgende:

(a) A ist selbstadjungiert.
(b) $G(A)$ ist lagrangesch bezüglich $\omega|_{G(A^*)\times G(A^*)}$.

2.5 Lemma ([8], Lemma 2.1)**.** *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $U \subseteq \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann sind äquivalent:*

(a) $U^\perp = JU$. Insbesondere folgt im Fall $\dim \mathcal{H} < \infty$ *auch* $\dim U = \dim U^\perp = \dim \mathcal{H}$.
(b) U ist lagrangesch.
(c) $U^\perp$ ist lagrangesch.

Beweis. U ist abgeschlossen, d. h. $U^{\perp\perp} = U$. Sei ω die Standardform auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

„(a) $\Rightarrow$ (b)“: Es gilt

$$U^{\perp_\omega} = JU^\perp = J^2 U = -U = U.$$

„(b) $\Rightarrow$ (a)“: Es gilt $U = U^{\perp_\omega} = JU^\perp$. Daher folgt

$$U^\perp = (JU^\perp)^\perp = J(U^\perp)^\perp = JU.$$

„(a) $\Leftrightarrow$ (c)“: Aus $J^2 = -I$ folgt $JU^\perp = -U = U$. Da $U^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ist, ergibt sich die Behauptung aus der (schon bewiesenen) Äquivalenz von (a) und (b). //

2.6 Lemma. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, ω die Standardform auf $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, $A, B \in L(\mathcal{H})$. Dann sind äquivalent:*

(a) $N((A,B))^{\perp_\omega} \subseteq N((A,B))$.
(b) $JR((A,B)^*) \subseteq N((A,B))$.
(c) AB^* *ist selbstadjungiert.*

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Es gilt mit Bemerkung 2.2

$$N((A,B))^{\perp_\omega} = J\overline{R(A,B)^*} \supseteq JR((A,B)^*).$$

Wir erhalten $JR((A,B)^*) \subseteq N(A,B)$.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“: Aus

$$JN((A,B)) = JR((A,B)^*)^\perp = R((A,B)^*)^{\perp_\omega}$$

und $R((A,B)^*) = -R((A,B)^*) = J^2R((A,B)^*)$ folgt

$$R((A,B)^*) = J^2R((A,B)^*) \subseteq JN((A,B)) = R((A,B)^*)^{\perp_\omega}.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} N((A,B))^{\perp_\omega} &= (JN(A,B))^\perp = (JR((A,B)^*)^\perp)^\perp \\ &= (R((A,B)^*)^{\perp_\omega})^\perp \subseteq R((A,B)^*)^\perp = N((A,B)). \end{aligned}$$

„(b) $\Leftrightarrow$ (c)“: Durch Ausrechnen zeigt man $(A,B)J(A,B)^* = BA^* - AB^*$. Damit folgt die Behauptung. //

2.7 Lemma. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, ω die Standardform auf $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, $A, B \in L(\mathcal{H})$. Dann sind äquivalent:*

(a) $N((A,B)) \subseteq N((A,B))^{\perp_\omega}$.
(b) $(A,B)|_{JN((A,B))}$ *ist injektiv.*

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Aus $N((A,B))^{\perp_\omega} = JN((A,B))^\perp$ folgt

$$J^2N((A,B))^\perp = -N((A,B))^\perp = N((A,B))^\perp.$$

Mit der Voraussetzung ergibt sich

$$JN((A,B)) \subseteq JN((A,B))^{\perp_\omega} = J^2 N((A,B))^\perp = N((A,B))^\perp,$$

d. h. $(A,B)|_{JN((A,B))}$ ist injektiv.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“: Da $(A,B)|_{JN((A,B))}$ injektiv ist, gilt

$$JN((A,B)) \subseteq N((A,B))^\perp.$$

Daher ergibt wegen $N((A,B)) = -N((A,B)) = J^2 N((A,B))$ die Inklusion

$$N((A,B)) = J^2 N((A,B)) \subseteq JN((A,B))^\perp = N((A,B))^{\perp_\omega}. \qquad //$$

2.8 Lemma. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A, B \in L(\mathcal{H})$. Dann sind äquivalent:*

(a) $N((A,B))$ ist langrangesch bezüglich der Standardform auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.
(b) AB^* ist selbstadjungiert und $(A,B)|_{J(N(A,B))}$ ist injektiv.

Beweis. Klar mit den Lemmata 2.6 und 2.7. //

2.9 Lemma ([8], Lemma 2.2)**.** *Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathrm{Rang}(A,B) = n$. Dann sind äquivalent:*

(a) $N((A,B))$ ist langrangesch bezüglich der Standardform ω auf $\mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$.
(b) AB^* ist selbstadjungiert.

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Dies folgt aus Lemma 2.6.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“: Aus Lemma 2.7 erhalten wir $JN((A,B))^\perp \subseteq N((A,B))$. Wegen

$$2n = \dim N((A,B)) + \mathrm{Rang}(A,B) = \dim N((A,B)) + \dim N((A,B))^\perp$$

folgt $\dim N((A,B)) = \dim N((A,B))^\perp = n$. Daher schlussfolgern wir auch $\dim JN((A,B))^\perp = n$ und wir erhalten $JN((A,B))^\perp = N((A,B))$. Lemma 2.5 liefert die Behauptung. //

2.2 Das Graphenmodell mit masselosen Knoten

Sei $\Gamma = (V, E, \eta)$ ein endlicher gerichteter Graph, d. h. wir fassen die Menge V als Knotenmenge auf, die Menge E interpretieren wir als die Menge der gerichteten Kanten und $\eta = (\eta_0, \eta_1) : E \to V \times V$ gebe jeder Kante $e \in E$ die Richtung, indem $\eta_0(e)$ als Start- und $\eta_1(e)$ als Endknoten von $e \in E$ aufgefasst wird. Insbesondere sind sowohl Schleifen als auch Mehrfachkanten erlaubt. Für $v \in V$ seien

$$\begin{aligned} E_{v,0} &:= \{e \in E;\ \eta_0(e) = v\}\,, \\ E_{v,1} &:= \{e \in E;\ \eta_1(e) = v\}\,, \\ E_v &:= (E_{v,0} \times \{0\}) \cup (E_{v,1} \times \{1\}). \end{aligned}$$

Außerdem setzen wir

$$E' := \bigcup_{v \in V} E_v = E \times \{0, 1\}\,,$$

wobei dies sogar eine disjunkte Vereinigung ist.

Jede Kante $e \in E$ lässt sich mit einem reellen Intervall $[a_e, b_e] \subseteq \mathbb{R}$ identifizieren. Nun benutzen wir auf jeder Kante $e \in E$, d. h. auf jedem Intervall $[a_e, b_e]$, das Modell aus Kapitel 1. Für $e \in E$ sei also μ_e ein endliches Borelmaß auf $[a_e, b_e]$ mit $a_e, b_e \in \operatorname{spt} \mu_e$, aber $\mu_e(\{a_e, b_e\}) = 0$. Wie schon in Kapitel 1 angedeutet, könnten wir auch $\mu_e = 0$ zulassen. Das bedeutet allerdings, dass wir dann die entsprechende Kante e vernachlässigen können: Es erfolgt keinerlei Aktion entlang dieser Kante. Im weiteren Verlauf der Arbeit beweisen wir alle Aussagen nur für $\mu_e \neq 0$ für alle $e \in E$.

Wir betrachten den Hilbertraum

$$\mathcal{H}_\Gamma := \bigoplus_{e \in E} L_2((a_e, b_e), \mu_e).$$

Wir definieren die Räume

$$\begin{aligned}
C(E) &:= \bigoplus_{e\in E} C[a_e, b_e],\\
C_\mu(E) &:= \bigoplus_{e\in E} C_{\mu_e}[a_e, b_e],\\
W_2^1(E) &:= \bigoplus_{e\in E} W_2^1(a_e, b_e),\\
W_{2,\mu}^1(E) &:= \bigoplus_{e\in E} W_{2,\mu_e}^1(a_e, b_e) = C_\mu(E) \cap W_2^1(E).
\end{aligned}$$

Sei $\hat{H}$ in $\mathcal{H}_\Gamma$ der Operator, der auf jeder Kante den Operator $\hat{H}$ aus Kapitel 1 repräsentiert:

$$\begin{aligned}
D(\hat{H}) := \Big\{ f \in \mathcal{H}_\Gamma;\ \exists\, g_e \in W_2^1(a_e, b_e) : g_e = f_e\ \mu_e\text{-f.ü.},&\\
\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)' \text{ exist.}, \partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)' \in L_2((a_e, b_e), \mu_e)\ (e \in E)\Big\},&\\
\hat{H} f := (-\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)')_{e\in E}.&
\end{aligned}$$

Dabei sei ι_e die zur Kante $e \in E$ gehörige Abbildung aus Kapitel 1. Für $f \in D(\hat{H})$ sei $\iota(f) := (\iota_e(f_e))_{e\in E}$. Es folgt dann $\iota(f) \in W_{2,\mu}^1(E)$.

Zur Beschreibung der Randbedingungen benötigen wir noch entsprechende Spur-Abbildungen, die für jeden Knoten die entsprechenden Randwerte liefern.

Definition. Sei $v \in V$. Wir definieren die *Spur in* v durch $\mathrm{tr}_v : C(E) \to \mathbb{K}^{E_v}$,

$$\mathrm{tr}_v\, f(e,j) := \begin{cases} f_e(a_e) & \text{falls} \quad j = 0,\ e \in E_{v,0},\\ f_e(b_e) & \text{falls} \quad j = 1,\ e \in E_{v,1}.\end{cases}$$

Die *signierte Spur in* v ist definiert durch $\mathrm{str}_v : \{(f_e)_e \in E;\ f_e \in L_1(a_e, b_e),$ $\partial_{\mu_e} f_e$ existiert, $\partial_{\mu_e} f_e \in L_2((a_e, b_e), \mu_e)\ (e \in E)\} \to \mathbb{K}^{E_v}$,

$$\mathrm{str}_v\, f(e,j) := \begin{cases} f_e(a_{e+}) & \text{falls} \quad j = 0,\ e \in E_{v,0},\\ -f_e(b_{e-}) & \text{falls} \quad j = 1,\ e \in E_{v,1}.\end{cases}$$

Weiterhin definieren wir die *Spur* und die *signierte Spur* durch

$$\operatorname{tr}(\cdot) := (\operatorname{tr}_v(\cdot))_{v\in V} \text{ und } \operatorname{str}(\cdot) := (\operatorname{str}_v(\cdot))_{v\in V}.$$

Die *kombinierte Spur* ist definiert durch $\operatorname{ctr} : D(\hat{H}) \to \mathbb{K}^{E'} \oplus \mathbb{K}^{E'}$,

$$\operatorname{ctr} f := \big(\operatorname{tr} \iota(f), \operatorname{str} \iota(f)'\big).$$

2.3 Lebesgue-Maß auf dem Graphen

Zunächst betrachten wir den Spezialfall, dass $\mu_e = \lambda|_{\mathcal{B}[a_e,b_e]}$ für alle $e \in E$ ist, d. h. wir haben das Lebesgue-Maß λ auf allen Kanten. Damit wollen wir zunächst einmal eine Vorstellung von dem Operator gewinnen und die zugehörige Form erarbeiten. Diese werden wir dann auch auf den Fall singulärer Maße übertragen.

Unsere Annahme an die Maße führt zu $W^1_{2,\mu}(E) = W^1_2(E)$ und $\iota = I$ die Identität. Wir schreiben trotzdem an den entsprechenden Stellen $\iota(f)$ anstatt f, damit die Analogie zum singulären Fall erhalten bleibt.

$$\begin{aligned} D(\hat{H}) &= \bigoplus_{e\in E} W^2_2(a_e, b_e), \\ (\hat{H}f)_e &= -f''_e \quad (e \in E). \end{aligned}$$

Wir bemerken noch, dass $\hat{H}$ der maximale mit $(-\partial^2)_{e\in E}$ assozzierte Differentialausdruck ist.

2.10 Lemma. *Die Abbildung* ctr *ist surjektiv.*

Beweis. Für $e \in E$ gilt $C^2[a_e, b_e] \subseteq W^2_2(a_e, b_e)$. //

Wir wollen „Interaktionen“ der verschiedenen Kanten des Graphen zulassen. Dafür benötigen wir Bedingungen, die die Funktion auf verschiedenen Kanten miteinander verknüpft. Dies führt zu (verallgemeinerten) Randwert-Bedingungen des entsprechenden Operators. Da es $|E'|$ Kantenenden gibt und wir einen Operator zweiter Ordnung betrachten wollen, haben wir $2\,|E'|$ Bedingungen, die wir stellen können (je eine Bedingung für den Funktionswert und eine für den Wert der Ableitung an dem Kantenende). Da unser Operator linear sein soll, können wir die Randbedingungen durch einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{K}^{E'} \oplus \mathbb{K}^{E'}$ charakterisieren. Da die kombinierte Spur in zwei Teile – den Spurteil und den signierten Spurteil der Ableitungen – zerfällt, bietet es sich an, auch den Unterraum U in einer solchen Art und Weise zu zerlegen.

2.11 Lemma. *Sei $U \subseteq \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$ ein Unterraum mit $\dim U = n$. Dann gibt es $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so dass $U = N((A,B))$.*

Beweis. Es gilt $\dim U^\perp = n$. Daher gibt es einen Vektorraumisomorphismus $Q : U^\perp \to \mathbb{K}^n$. Weil $U^\perp$ nichtleer, abgeschlossen und linear ist, gibt es eine zu $U^\perp$ gehörige Orthogonalprojektion $P : \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n \to U^\perp$. Sei (A,B) eine Darstellung der Abbildung QP bezüglich $\mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^n$, d. h. es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $(A,B) = QP$. Dann gilt

$$N((A,B)) = N(QP) = N(P) = U. \qquad //$$

2.12 Lemma. *Seien $f, g \in D(\hat{H})$. Dann gilt*

$$\left(\hat{H}f \,\middle|\, g\right)_{\mathcal{H}_\Gamma} = \sum_{e\in E} \int_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + \left(\operatorname{str}\iota(f)' \,\middle|\, \operatorname{tr}\iota(g)\right).$$

Beweis. Für $e \in E$ zeigt man wie im Beweis von Satz 1.12, dass

$$\begin{aligned}
&\int_{(a_e,b_e)} (-\iota_e(f_e)''(x))\overline{g_e(x)}\,dx \\
&= -\iota_e(f_e)'(b_e)\overline{\iota_e(g_e)(b_e)} + \iota_e(f_e)'(a_e)\overline{\iota_e(g_e)(a_e)} \\
&+ \int_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx
\end{aligned}$$

gilt. Summation über alle Kanten $e \in E$ liefert

$$
\begin{aligned}
&\left(\hat{H} f \,\middle|\, g\right) \\
&= \sum_{e \in E} \int_{(a_e, b_e)} (-\iota_e (f_e)''(x)) \overline{g_e(x)}\, dx \\
&= \sum_{e \in E} \int_{a_e}^{b_e} \iota_e (f_e)'(x) \overline{\iota_e (g_e)'(x)}\, dx \\
&+ \sum_{e \in E} \left(-\iota_e (f_e)'(b_e) \overline{\iota_e (g_e)(b_e)} + \iota_e (f_e)'(a_e) \overline{\iota_e (g_e)(a_e)} \right) \\
&= \sum_{e \in E} \int_{a_e}^{b_e} \iota_e (f_e)'(x) \overline{\iota_e (g_e)'(x)}\, dx + \left(\operatorname{str} \iota(f)' \,\middle|\, \operatorname{tr} \iota(g) \right).
\end{aligned}
$$

//

Wir nutzen zuerst eine Formulierung der Randbedingung mit Hilfe von linearen Operatoren in endlichdimensionalen Hilberträumen, also mittels Matrizen.

2.13 Satz (vgl. [8] bzw. [9], Theorem 3)**.** *Seien $A, B : \mathbb{K}^{E'} \to \mathbb{K}^{E'}$ linear, $H \subseteq \hat{H}$ definiert durch $D(H) := \operatorname{ctr}^{-1}(N((A, B)))$. Es sind äquivalent:*

(a) H ist selbstadjungiert.

(b) $N((A, B))$ ist lagrangesch, d.h. $(A, B)|_{J(N(A,B))}$ ist injektiv und AB^* ist selbstadjungiert.

Beweis. Wir definieren $\Omega : D(\hat{H}) \times D(\hat{H}) \to \mathbb{K}$,

$$
\begin{aligned}
\Omega(f, g) &:= \sum_{e \in E} \left(f_e \,\middle|\, -\iota_e (g_e)'' \right)_{L_2(a_e, b_e)} - \sum_{e \in E} \left(-\iota_e (f_e)'' \,\middle|\, g_e \right)_{L_2(a_e, b_e)} \\
&= \left(J \begin{pmatrix} (f_e)_e \\ (-\iota_e (f_e)'')_e \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} (g_e)_e \\ (-\iota_e (g_e)'')_e \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_\Gamma \oplus \mathcal{H}_\Gamma}.
\end{aligned}
$$

Ω wirkt also wie die Standardform auf $\mathcal{H}_\Gamma \oplus \mathcal{H}_\Gamma$. Nach Lemma 2.3 ist H genau dann selbstadjungiert, wenn $G(H)$ lagrangesch bezüglich der Standardform ist, d. h. wenn $D(H)$ lagrangesch (bezüglich Ω) ist. Sei ω die

Standardform auf $\mathbb{K}^{E'} \oplus \mathbb{K}^{E'}$. Wir zeigen $\Omega(f,g) = \omega(\operatorname{ctr} f, \operatorname{ctr} g)$ für alle $f, g \in D(\hat{H})$. Seien $f, g \in D(\hat{H})$. Aus Lemma 2.12 folgt

$$\begin{aligned}
\Omega(f,g) &= \sum_{e\in E} \bigl(f_e \,\big|\, -\iota_e(g_e)''\bigr)_{L_2(a_e,b_e)} - \sum_{e\in E} \bigl(-\iota_e(f_e)'' \,\big|\, g_e\bigr)_{L_2(a_e,b_e)} \\
&= -\bigl(\operatorname{str} \iota(f)' \,\big|\, \operatorname{tr} \iota(g)\bigr) + \bigl(\operatorname{tr}_v \iota(f) \,\big|\, \operatorname{str}_v \iota(g)'\bigr) \\
&= \omega(\operatorname{ctr} f, \operatorname{ctr} g).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.1 und der Bemerkung nach Lemma 2.3, denn H ist natürlich symmetrisch und es gilt $H^* \subseteq \hat{H}$ wegen der Maximalität von $\hat{H}$. //

2.14 Bemerkung. Die Abbildung ctr transformiert also Definitionsbereiche selbstadjungierter Operatoren in lagrangesche Unterräume im Randwertraum. Genauer: Ist U ein lagrangescher Unterraum von $\mathbb{K}^{E'} \oplus \mathbb{K}^{E'}$, so ist $\operatorname{ctr}^{-1}(U)$ der Definitionsbereich einer selbstadjungierten Realisierung der Diffusion. Diese Entsprechung ist sogar bijektiv, d. h. jede selbstadjungierte Realisierung korrespondiert zu einem solchen lagrangeschen Unterraum.

Wir haben hier nur den Fall endlicher Graphen behandelt. Entsprechende Verallgemeinerungen mit einigen Zusatzannahmen wurden zum Beispiel in [9] gemacht.

Weitere Formulierungen der Randbedingungen

Wir wollen nun noch zwei weitere Formulierungen der Randbedingungen erarbeiten. Ziel ist eine Formulierung, die die Randwerte $\operatorname{tr} \iota(f)$ und die Ableitungen $\operatorname{str} \iota(f)'$ direkt miteinander verknüpft. Damit lässt sich die mit H assoziierte Form τ leicht beschreiben. Im ersten Schritt charakterisieren wir die Verknüpfungsbedingungen bei selbstadjungierten Realisierungen durch Projektionen.

Wir fassen die dabei auftretenden Matrizen als lineare Abbildungen auf. Dies gibt uns die Möglichkeit, sie entsprechend einer Orthogonalzerlegung des $\mathbb{K}^n$ zu zerlegen.

2.15 Lemma ([9], Lemma 4, Corollary 5). *Seien* $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, *so dass* $\mathrm{Rang}(A,B) = n$ *gilt und* AB^* *selbstadjungiert ist. Seien* $P : \mathbb{K}^n \to N(B)$, $P_1 : \mathbb{K}^n \to N(B^*)$ *die Orthogonalprojektionen auf* $N(B)$ *und* $N(B^*)$, *seien* $Q := I - P$, $Q_1 := I - P_1$ *die komplementären Projektionen.*

(a) Dann gilt:

(i) $A(R(B^*)) \subseteq R(B)$.

(ii) $(P_1AP)|_{N(B)}$ *ist invertierbar.*

(iii) $B_1 := (Q_1BQ)|_{R(B^*)}$ *ist invertierbar.*

(iv) $L := -(B_1^{-1}AQ)|_{R(B^*)}$ *ist selbstadjungiert.*

(b) Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $Ax + By = 0$.

(ii) $Px = 0$ *und* $-Lx + Qy = 0$.

Beweis. (a) Aus $AB^* = BA^*$ folgt (i).

Mit dem Projektionssatz erhalten wir die Zerlegungen $\mathbb{K}^n = R(B) \oplus N(B^*)$ und $\mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n = R(B^*) \oplus N(B) \oplus R(B^*) \oplus N(B)$. Bezüglich dieser Zerlegungen sei

$$(A, B) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Nach (i) gilt $A_{21} = 0$. Wegen $P_1B = 0$ und $BP = 0$ ergeben sich $B_{12} = (Q_1BP)|_{N(B)} = 0$, $B_{21} = (P_1BQ)|_{R(B^*)} = 0$ und $B_{22} = (P_1BP)|_{N(B)} = 0$. Wir erhalten

$$(A, B) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Rangbedingung liefert nun die Invertierbarkeit von $A_{22} = (P_1AP)|_{N(B)}$.

Aus der Zerlegung $N(B) \oplus N(B)^\perp = \mathbb{K}^n$ in direkter Summe und der Dimensionsformel $\dim R(B) + \dim N(B) = n$ folgt $\dim R(B) = \dim N(B)^\perp$. Daraus schließen wir, dass $\dim R(B^*) = \dim N(B)^\perp = \dim R(B)$ gilt, d. h. die Matrizen A_{11} und B_{11} sind quadratisch. Außerdem ist $N(B_{11}) = \{0\}$ wegen der Zerlegung. Damit ist $B_{11} = B_1$ invertierbar.

Es gilt

$$AB^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Selbstadjungiertheit von AB^* folgt also die Selbstadjungiertheit von $A_{11}B_{11}^*$, d. h. $A_{11}B_{11}^* = B_{11}A_{11}^*$. Da B_1 $(= B_{11})$ invertierbar ist, erhalten wir

$$B_1^{-1}A_{11} = A_{11}^*(B_1^*)^{-1} = A_{11}^*(B_1^{-1})^*,$$

d. h. $B_1^{-1}A_{11} = (B_1^{-1}AQ)|_{R(B^*)}$ ist selbstadjungiert. Also ist auch L selbstadjungiert.

(b) Mit Hilfe der Projektionen Q_1 und P_1 ist $Ax + By = 0$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} Q_1Ax + Q_1By &= 0, \\ P_1Ax + P_1By &= 0. \end{aligned}$$

Nach (a) ergibt sich nun

$$\begin{aligned} Q_1Ax &= A_{11}Qx + A_{12}Px, \\ Q_1By &= B_{11}Qy, \\ P_1Ax &= A_{22}Px, \\ P_1By &= 0. \end{aligned}$$

Also folgt zunächst $A_{22}Px = 0$. Da A_{22} invertierbar ist, folgt $Px = 0$. Wir erhalten $A_{11}Qx + B_{11}Qy = 0$. Aus der Invertierbarkeit von B_{11} folgt die Behauptung. //

Nun können wir die selbstadjungierten Einschränkungen $H \subseteq \hat{H}$ mit Hilfe von Projektionen charakterisieren.

2.16 Folgerung (vgl. [9], Theorem 6)**.** *Seien $A, B : \mathbb{K}^{E'} \to \mathbb{K}^{E'}$ linear, $H \subseteq \hat{H}$ definiert durch $D(H) := \operatorname{ctr}^{-1}(N((A,B)))$, und H sei selbstadjun-*

giert. Dann gibt es Orthogonalprojektionen P und $Q := I - P$ in $\mathbb{K}^{E'}$ und eine selbstadjungierte Abbildung L in $R(Q)$ mit $LQ = L$, so dass

$$D(H) = \Big\{ f \in D(\hat{H});\ P \operatorname{tr} \iota(f) = 0,\ Q \operatorname{str} \iota(f)' - L \operatorname{tr} \iota(f) = 0 \Big\}.$$

Beweis. Nach Satz 2.13 ist $N((A, B))$ lagrangesch. Weiterhin folgt aus Lemma 2.5, dass $\dim N((A, B)) = n$, also auch $\operatorname{Rang}(A, B) = n$, ist. Sei P die Orthogonalprojektion auf $N(B)$ und $L := -B_1^{-1} AQ|_{R(B^*)}$. Nach Lemma 2.15 ist L eine selbstadjungierte Abbildung in $R(Q)$. Sei $f \in D(H)$. Dann gilt $(A, B) \operatorname{ctr} f = 0$. Anwendung von Lemma 2.15 (b) liefert die Behauptung. //

2.17 Folgerung. *Seien P und $Q := I - P$ Orthogonalprojektionen in $\mathbb{K}^{E'}$ und L eine selbstadjungierte Abbildung in $R(Q)$ mit $LQ = L$. Sei $H \subseteq \hat{H}$ definiert durch*

$$D(H) := \Big\{ f \in D(\hat{H});\ P \operatorname{tr} \iota(f) = 0,\ Q \operatorname{str} \iota(f)' - L \operatorname{tr} \iota(f) = 0 \Big\}.$$

Dann ist H selbstadjungiert.

Beweis. Wir definieren $A, B \in \mathbb{K}^{E' \times E'}$ durch

$$A := \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & I_{R(P)} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} I_{R(Q)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $(A, B) \operatorname{ctr} f = 0$ für alle $f \in D(H)$, wobei für $\operatorname{tr} \iota(f)$ bzw. $\operatorname{str} \iota(f)'$ die durch $R(Q) \oplus N(Q)$ gegebene Zerlegung benutzt wird. Außerdem ist $\operatorname{Rang}(A, B) = |E'|$. Weiterhin gilt

$$AB^* = \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da L selbstadjungiert ist, ist auch AB^* selbstadjungiert. Mit Lemma 2.9 und Satz 2.13 folgt die Behauptung. //

Nun können wir die gewünschte Formulierung angeben.

2.18 Satz. *Sei X ein Unterraum von $\mathbb{K}^{E'}$, L eine selbstadjungierte Abbildung in X und Q die Orthogonalprojektion auf X. Sei $H \subseteq \hat{H}$ definiert durch*

$$D(H) = \left\{ f \in D(\hat{H});\ \operatorname{tr} \iota(f) \in X,\ Q \operatorname{str} \iota(f)' = L \operatorname{tr} \iota(f) \right\}.$$

Dann ist H selbstadjungiert.

Beweis. Dies ist nur eine Umformulierung von Folgerung 2.17 mit $X = R(Q)$. //

Assoziierte Dirichlet-Formen

Sei X ein Unterraum von $\mathbb{K}^{E'}$, L eine selbstadjungierte Abbildung in X und Q die Orthogonalprojektion auf X. Sei $H \subseteq \hat{H}$ definiert durch

$$D(H) = \left\{ f \in D(\hat{H});\ \operatorname{tr} \iota(f) \in X,\ Q \operatorname{str} \iota(f)' = L \operatorname{tr} \iota(f) \right\}.$$

Nach Satz 2.18 ist H selbstadjungiert. Jetzt wollen wir die mit H assoziierte Form beschreiben. Wir könnten mittels H eine Form definieren, die abschließbar wird. Deren Abschluss wäre dann die zu H gehörige abgeschlossene Form. Wir wollen einen anderen Weg gehen und die Form τ – motiviert durch die partielle Integration in Lemma 2.12 und den Definitionsbereich von H in der Formulierung von Satz 2.18 – direkt definieren und dann zeigen, dass der zu τ gehörige Operator gerade H ist.

Sei τ in $\mathcal{H}_\Gamma$ definiert durch

$$\begin{aligned} D(\tau) &:= \{ f \in \mathcal{H}_\Gamma;\ \exists\, g \in W_2^1(E) : g_e = f_e\ \mu_e\text{-f.ü. } (e \in E), \\ &\qquad \operatorname{tr} \iota(f) \in X \}, \\ \tau(f,g) &:= \sum_{e \in E} \int_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x) \overline{\iota_e(g_e)'(x)}\, dx + (L(\operatorname{tr} \iota(f)) \,|\, \operatorname{tr} \iota(g)). \end{aligned}$$

2.19 Lemma. *Die Form τ ist symmetrisch und dicht definiert.*

Beweis. Klar. //

2.20 Lemma. *Die Form τ ist quasi-akkretiv und abgeschlossen.*

Beweis. Analog wie in Satz 1.5 folgt, dass τ quasi-akkretiv ist. Ebenso sieht man daran die Stetigkeit der Einbettung $D_\tau \ni f \mapsto \iota(f) \in C(E)$. Sei $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_\tau$-Cauchy-Folge in $D(\tau)$, $f^n \to f$ in $\mathcal{H}_\Gamma$. Dann ist $(\iota(f^n))$ eine $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy-Folge. Also gibt es $g \in C_\mu(E)$ mit $\|\iota(f^n) - g\|_\infty \to 0$. Wir folgern auch $\iota(f^n) \to g$ in $\mathcal{H}_\Gamma$, d. h. $f_e = g_e$ μ_e-f.ü. für alle $e \in E$.

Die Abbildung $C(E) \ni g \mapsto \operatorname{tr} g$ ist stetig. Da X ein abgeschlossener Unterraum ist, folgt $\operatorname{tr} g \in X$.

Sei $e \in E$. Da $(\iota(f^n)_e)$ gleichmäßig gegen g_e konvergiert und $(\iota(f^n)'_e)$ als Cauchy-Folge in $L_2(a_e, b_e)$ auch konvergent ist, folgt $g_e \in W_2^1(a_e, b_e)$ und $\iota(f^n)'_e \to g'_e$ in $L_2(a_e, b_e)$. Insgesamt erhalten wir $g \in W^1_{2,\mu}(E)$. Damit ist $f \in D(\tau)$ und es gelten $\iota(f) = g$ und

$$
\begin{aligned}
\tau(f^n - f) &= \sum_{e\in E} \int_{a_e}^{b_e} \left|\iota(f^n)'_e(x) - g'_e(x)\right|^2 \, dx \\
&\quad + (L(\iota(f^n) - \operatorname{tr} g) \mid \iota(f^n) - \operatorname{tr} g) \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

//

Wir haben bisher bewiesen, dass τ eine symmetrische quasi-akkretive dicht definierte abgeschlossene Form ist. Sei H_1 der mit τ assoziierte selbstadjungierte Operator in $\mathcal{H}_\Gamma$. Der nächste Satz liefert nun das gewünschte Resultat: Der zu τ gehörige Operator ist gerade H.

2.21 Satz. *Es gilt $H_1 = H$.*

Beweis. Wir zeigen $H \subseteq H_1$. Da beide selbstadjungiert sind, folgt daraus schon die Gleichheit. Sei $f \in D(H)$. Dann ist $\iota(f) \in W^1_{2,\mu}(E)$, $\iota(f)_e = f_e$ μ_e-f.ü. ($e \in E$) und $\operatorname{tr} \iota(f) \in X$, also $f \in D(\tau)$. Sei $g \in D(\tau)$. Nach Lemma

2.12 folgt

$$(Hf \,|\, g)_{\mathcal{H}_\Gamma} = \sum_{e\in E} \int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + \big(\operatorname{str}\iota_e(f)' \,\big|\, \operatorname{tr}\iota(g)\big)\,.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\tau(f,g) &= \sum_{e\in E} \int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + (L(\operatorname{tr}\iota(f)) \,|\, \operatorname{tr}\iota(g)) \\
&= \sum_{e\in E} \int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + \underbrace{\big(Q(\operatorname{str}\iota(f)') \,\big|\, \operatorname{tr}\iota(g)\big)}_{=(\operatorname{str}\iota(f)' \,|\, \operatorname{tr}\iota(g))} \\
&= (Hf \,|\, \iota(g))_{\mathcal{H}_\Gamma} = (Hf \,|\, g)_{\mathcal{H}_\Gamma}\,.
\end{aligned}$$

Wir lesen ab, dass $f \in D(H_1)$ ist und dass $H_1 f = Hf$ gilt. //

2.4 Singuläre Diffusion auf Graphen

Wir nutzen nun die im Spezialfall entwickelte Form und übertragen sie auf den singulären Fall. Sei X ein Unterraum von $\mathbb{K}^{E'}$, L eine selbstadjungierte Abbildung in X und Q die Orthogonalprojektion auf X.

Sei τ in $\mathcal{H}_\Gamma$ definiert durch

$$\begin{aligned}
D(\tau) &:= \{f \in \mathcal{H}_\Gamma;\ \exists\, g \in W_2^1(E) : g_e = f_e\ \mu_e\text{-f.ü. } (e \in E), \\
&\qquad\qquad \operatorname{tr}\iota(f) \in X\}, \\
\tau(f,g) &:= \sum_{e\in E} \int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + (L(\operatorname{tr}\iota(f)) \,|\, \operatorname{tr}\iota(g))\,.
\end{aligned}$$

2.22 Lemma. *τ ist symmetrisch und dicht definiert.*

Beweis. Die Symmetrie ist klar. Mit Satz 1.3, angewandt auf jede Kante $e \in E$, folgt, dass τ dicht definiert ist. //

2.23 Lemma. *Die Form τ ist quasi-akkretiv und abgeschlossen.*

Beweis. Dies folgt analog zum Spezialfall in Lemma 2.20. //

Sei H der mit τ assoziierte selbstadjungierte Operator.

2.24 Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned} D(H) &:= \left\{ f \in D(\hat{H});\ \operatorname{tr} \iota(f) \in X,\, Q \operatorname{str} \iota(f)' = L \operatorname{tr} \iota(f) \right\}, \\ Hf &:= (-\partial_{\mu_e} \iota_e (f_e)')_{e \in E}. \end{aligned}$$

Beweis. Ein Beweis wird im übernächsten Abschnitt angegeben, wo wir sogar einen allgemeineren Fall betrachten, indem wir auch Masse auf den Knoten zulassen. Dabei ergibt sich dieses Resultat in dem Spezialfall, dass alle Knotenmassen gleich 0 sind (dort ist das der Fall $V = V_0$). //

Lokale Randbedingungen

Definition. Die Randbedingungen eines Quantengraphen heißen *lokal*, falls es für $v \in V$ Unterräume $X_v \subseteq \mathbb{K}^{E_v}$ mit zugehöriger Orthogonalprojektion Q_v und selbstadjungierte Abbildungen L_v in X_v gibt, so dass

$$X = \bigoplus_{v \in V} X_v,$$

und die beiden Abbildungen L und Q bezüglich dieser Zerlegung zerfallen, also

$$L = \bigoplus_{v \in V} L_v, \qquad Q = \bigoplus_{v \in V} Q_v.$$

Im Fall von lokalen Randbedingungen vereinfachen sich die entsprechenden Resultate von oben in dem Sinne, dass Selbstadjungiertheit jetzt an jedem Knoten einzeln entschieden wird.

2.25 Satz. *Die Randbedingungen für den Operator H seien lokal, d. h. für $v \in V$ sei X_v ein Unterraum von $\mathbb{K}^{E_v}$, L_v eine selbstadjungierte Abbildung in X_v und Q_v die Orthogonalprojektion auf X_v. Dann gilt*

$$D(H) = \left\{ f \in D(\hat{H});\ \operatorname{tr}_v \iota(f) \in X_v,\, Q_v \operatorname{str}_v \iota(f)' = L_v \operatorname{tr}_v \iota(f)\ (v \in V) \right\}.$$

Beweis. Aus Satz 2.24 erhalten wir für den Definitionsbereich von H die Menge $D(H) = \left\{ f \in D(\hat{H});\ \operatorname{tr} \iota(f) \in X,\, Q \operatorname{str} \iota(f)' = L \operatorname{tr} \iota(f) \right\}$. Die Zerlegungen von X, Q und L liefern nun die Behauptung. //

Für die zugehörige Form ergibt sich auch so eine Zerlegung der Randwerte:

$$\begin{aligned} D(\tau) = \{ f \in \mathcal{H}_\Gamma;\ \exists\, g \in W_2^1(E) : g_e = f_e\ \mu_e\text{-f.ü. } (e \in E), \\ \operatorname{tr}_v \iota(f) \in X_v\ (v \in V) \}, \\ \tau(f,g) = \sum_{e \in E} \int_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x) \overline{\iota_e(g_e)'(x)}\, dx + \sum_{v \in V} (L_v(\operatorname{tr}_v \iota(f)) \,|\, \operatorname{tr}_v \iota(g)) \,. \end{aligned}$$

Nun zeigen wir noch, dass sich alle Randbedingungen auch als lokale Randbedingungen bezüglich eines eventuell modifizierten Graphen auffassen lassen, wobei sich die beiden Diffusionsprozesse (also die beiden) Operatoren auf den entsprechenden Graphen entsprechen. Dies lässt sich auch so interpretieren: Es gibt „nur“ lokale Randbedingungen, bei allen anderen Randbedingungen ist das zugrundeliegende Modell, d. h. der zugrundeliegende Graph, nicht von der richtigen Struktur. Man kann also diverse Knoten identifizieren, ohne die Diffusion zu modifizieren.

2.26 Satz. *Sei Γ ein Graph, so dass die Randbedingungen des Operators H auf $\mathcal{H}_\Gamma$ nicht lokal sind. Dann gibt es einen Graphen Γ' mit zugehörigem Operator H' in $\mathcal{H}_{\Gamma'}$, und eine unitäre Abbildung $\Psi : \mathcal{H}_\Gamma \to \mathcal{H}_{\Gamma'}$, so dass*

$$H' = \Psi H \Psi^{-1}$$

und die Randbedingungen von H' lokal sind.

Beweis. Wir identifizieren alle Knoten in V miteinander, also $V' := \{v'\}$. Damit wird jede Kante $e \in E$ zu einer Schleife $e' \in E'$, d. h. es gibt eine Bijektion $\psi : E \to E'$. Außerdem erhalten wir $\eta'(e') = \eta(\psi^{-1}(e'))$ für $e' \in E'$, d. h. die Orientierung der Kanten überträgt sich auch. Für $e' \in E'$ ist dann $[a_{e'}, b_{e'}] = [a_{\psi^{-1}(e')}, b_{\psi^{-1}(e')}]$; ebenso gelte für die Maße $\mu_{e'} = \mu_{\psi^{-1}(e')}$. Für $f \in \mathcal{H}_\Gamma$ und $e' \in E'$ definieren wir $(\Psi f)_{e'} := f_{\psi^{-1}(e')}$. Dann ist Ψ unitär. Wir setzen $H' := \Psi H \Psi^{-1}$. Dann ist H' ein Operator mit lokalen Randbedingungen, da es nur noch einen Knoten gibt. //

Wir hätten also von Anfang an nur mit lokalen Randbedingungen arbeiten können. Es ist aber vorteilhaft auch eine nichtlokale Formulierung zu haben um auch diskrete Diffusion mit unserem Modell beschreiben zu können.

2.5 Unterverbände von $\mathbb{K}^n$

Dieser Abschnitt dient als Vorbereitung. Er wird später zum Nachweis der Beurling-Deny-Kriterien für die Diffusion auf endlichen Graphen benutzt. Wir betrachten $\mathbb{K}^n$ als Verband, d. h. wir fassen $\mathbb{K}^n$ als den Raum $C(\{1, \dots, n\}, \mathbb{K})$ auf. Für $x \in \mathbb{K}^n$ ist $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ und für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n)$.

2.27 Lemma ([6], Lemma A.1)**.** *Sei X ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$, $m := \dim X$.*

(a) Es sind äquivalent:
(i) X ist ein Unterverband, d. h. $x \in X \Rightarrow |x| \in X$.
(ii) Es gibt $x^1, \dots, x^m \in X_+$, $x^j \wedge x^k = 0$ für $j, k \in \{1, \dots, m\}$, $j \neq k$, so dass $X = \operatorname{lin}\left\{x^j;\ j \in \{1, \dots, m\}\right\}$.

(b) Es sind äquivalent:
(i) X ist ein Stone'scher Unterverband, d. h. $x \in X$ reell $\Rightarrow x \wedge 1 \in X$.
(ii) Es gibt eine Partition $C_1, \dots, C_m$ einer Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$, so dass
$X = \operatorname{lin}\left\{\mathbb{1}_{C_j};\ j \in \{1, \dots, m\}\right\}$.

Beweis. (a) Offensichtlich folgt (i) aus (ii). Nach [14], Theorem III.14.1, ist jeder m-dimensionale Archimedische Vektorverband linear und verbandsisomorph zu $\mathbb{K}^m$. Daher folgt (ii) aus (i).

(b) Es ist klar, dass (i) aus (ii) folgt. Für die Implikation „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ stellen wir fest, dass (ii) aus Teil (a) gilt, denn X ist ein Unterverband. Sei $j \in \{1, \dots, m\}$. Wir setzen $C_j := \left\{k \in \{1, \dots, n\}\,;\; x_k^j \neq 0\right\}$. Angenommen, für alle $\gamma > 0$ gelte $\gamma x^j \neq \mathbb{1}_{C_j}$. Dann gibt es $\gamma > 0$, so dass $(\gamma x^j) \wedge 1$ linear unabhängig von x^j ist, also $(\gamma x^j) \wedge 1 \notin X$, im Widerspruch zu (i). Also gibt es $\gamma > 0$, so dass $\gamma x^j = \mathbb{1}_{C_j}$. //

Sei X ein Unterverband von $\mathbb{K}^n$, $m := \dim X$, und seien $x^1, \dots, x^m \in X_+$ aus Lemma 2.27 eine Orthonormalbasis von X. Die Koordinatenvektorabbildung $\kappa : X \to \mathbb{K}^m$ ist ein Hilbertraumisomorphismus. Sei L ein Operator in X. Dann hat L bezüglich der Orthonormalbasis eine Darstellung $(l_{jk})_{j,k\in\{1,\dots,m\}}$. Der Operator L ist genau dann selbstadjungiert, wenn die Matrix $(l_{jk})_{j,k\in\{1,\dots,m\}}$ selbstadjungiert, also hermitesch, ist.

Sei X ein Stone'scher Unterverband von $\mathbb{K}^n$, $m := \dim X$, und seien $C_1, \dots, C_m$ wie in Lemma 2.27. Für $j \in \{1, \dots, m\}$ sei $n_j := |C_j|$. Dann ist die Abbildung $\iota : \mathbb{K}^m \to X$ definiert durch

$$(\alpha_j)_{j\in\{1,\dots,m\}} \mapsto \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbb{1}_{C_j}$$

ein Verbandsisomorphismus. Dieser ist auch ein isometrischer Isomorphismus zwischen dem gewichteten Raum $\ell_p(\{1, \dots, m\}, (n_j)_{j\in\{1,\dots,m\}})$ und dem Raum $(X, \|\cdot\|_p)$ für $p \in [1, \infty]$.

2.28 Lemma ([6], Lemma A.3)**.** *Sei X ein Unterverband von $\mathbb{K}^n$ mit $m := \dim X$, L ein selbstadjungierter Operator in X mit Matrixdarstellung $(l_{jk})_{j,k\in\{1,\dots,m\}}$.*

(a) Dann sind äquivalent:
(i) Für $x \in X$ gilt $(L\,|x| \mid |x|) \leq (Lx \mid x)$.
(ii) Die C_0-Halbgruppe $(e^{-tL})_{t\geq 0}$ ist positiv.

(iii) L ist reell und für alle $j,k \in \{1,\dots,m\}$ mit $j \neq k$ gilt $l_{jk} \leq 0$.

(b) Sei X nun ein Stone'scher Unterverband. Dann sind äquivalent:

(i) Es gelten $(L\,|x|\,|\,|x|) \leq (Lx\,|\,x)$ $(x \in X)$ und $(L(x \wedge 1)\,|\,(x \wedge 1)) \leq (Lx\,|\,x)$ $(x \in X_+)$.

(ii) Die C_0-Halbgruppe $(e^{-tL})_{t\geq 0}$ ist submarkovsch.

(iii) L ist reell und für alle $j,k \in \{1,\dots,m\}$ mit $j \neq k$ gilt $l_{jk} \leq 0$. Weiterhin gilt

$$\sum_{j=1}^{m} \sqrt{n_j}\, l_{jk} \geq 0 \quad (k \in \{1,\dots,m\}).$$

Beweis. (a) Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus dem ersten Beurling-Deny-Kriterium in $\mathbb{K}^m$ mit Hilfe des Isomorphismus κ.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“: Da $(e^{-tL})_{t\geq 0}$ positiv, ist $(e^{-tL})_{t\geq 0}$ auch reell. Damit ist L reell. Seien $j,k \in \{1,\dots m\}$, $j \neq k$. Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) := \left(e^{-tL}x^k \,\middle|\, x^j\right)$. Dann ist f differenzierbar, $f(t) \geq 0$ für $t \in [0,\infty)$ und $f(0) = 0$. Für die rechtsseitige Ableitung in 0 erhalten wir

$$0 \leq f'(0) = \frac{d}{dt}\left(e^{-tL}x^k \,\middle|\, x^j\right)\Big|_{t=0} = \left(-Lx^k \,\middle|\, x^j\right) = -l_{jk}.$$

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)“: Es gibt $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $L - \gamma E_m \leq 0$. Für $t \geq 0$ sind damit $e^{t(L-\gamma E_m)}$ und daher auch $e^{-tL} = e^{-\gamma t}e^{-t(L-\gamma E_m)}$ positiv.

(b) Die Äquivalenz der zwei Aussagen (i) und (ii) folgt aus dem zweiten Beurling-Deny-Kriterium in $\mathbb{K}^m$ mit Hilfe des Isomorphismus ι.

„(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)“: Nach (a) ist die C_0-Halbgruppe $(e^{-tL})_{t\geq 0}$ positiv. Aus Lemma 2.27 folgt $\mathbb{1}_{C_j} = \sqrt{n_j}x^j$ für $j \in \{1,\dots,m\}$. Sei $x \in X_+$. Es gibt $\beta_1,\dots,\beta_m \geq 0$, so dass

$$e^{-tL}x = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{C_j} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sqrt{n_j}x^j.$$

Daraus folgt $(e^{-tL}x \mid x^j) = \beta_j\sqrt{n_j}$ für alle $j \in \{1,\dots,m\}$. Da ι eine

Isometrie zwischen den Räumen $\ell_1(\{1,\dots,m\},(n_j))$ und $(X,\|\cdot\|_1)$ ist, folgt

$$\left\|e^{-tL}x\right\|_1 = \sum_{j=1}^m \beta_j n_j = \sum_{j=1}^m \left(e^{-tL}x \,\middle|\, x^j\right)\sqrt{n_j}.$$

Es gibt $\alpha_1,\dots,\alpha_m \geq 0$, so dass $x = \sum_{j=1}^m \alpha_j x^j$ ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\left\|e^{-tL}x\right\|_1 &= \sum_{j=1}^m \left(e^{-tL}x \,\middle|\, x^j\right)\sqrt{n_j} = \sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m \alpha_k \left(e^{-tL}x^k \,\middle|\, x^j\right)\sqrt{n_j} \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m (e^{-tL})_{jk}\sqrt{n_j}\right)\alpha_k.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Darstellung erhalten wir als rechtsseitige Ableitung in 0:

$$\frac{d}{dt}\left\|e^{-tL}x\right\|_1\Big|_{t=0} = -\sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m l_{jk}\sqrt{n_j}\right)\alpha_k.$$

Damit ist $(e^{-tL})_{t\geq 0}$ genau dann substochastisch in $(X,\|\cdot\|_1)$, wenn

$$\sum_{j=1}^m \sqrt{n_j}\, l_{jk} \geq 0$$

für alle $k \in \{1,\dots,m\}$. Da $(X,\|\cdot\|_1)' = (X,\|\cdot\|_\infty)$ und $(e^{-tL})_{t\geq 0}$ reell und selbstadjungiert ist, ist $(e^{-tL})' = (e^{-tL})^T = e^{-tL}$. Daher ist die C_0-Halbgruppe $(e^{-tL})_{t\geq 0}$ genau dann substochastisch, wenn sie submarkovsch ist. Dies liefert die Behauptung. //

2.6 Graphen mit Knotenmasse

Ausgehend von der Beschreibung in den vorangegangenen Abschnitten zur Diffusion auf Graphen wollen wir nun das Modell erweitern, indem wir auch Punktmassen in einigen der Knoten des Graphen zulassen. Dabei erhebt sich die Frage, wie sich die Randbedingungen im Vergleich zum schon behandelten Fall verändern. Dazu benutzen wir die oben schon erarbeitete Form und erweitern sie entsprechend. Wir nutzen vorerst nicht notwendigerweise lokale Randbedingungen bei unserer Beschreibung des Operators. Das gibt uns die Möglichkeit, auch die diskreten Diffusionen auf Graphen – also solche, die nur zwischen den Knotenwerten erfolgt – als einen Spezialfall unseres Modells zu erkennen.

Wir wollen nun auch Masse auf den Knoten zulassen. Für $v \in V$ sei dazu $\mu_v \geq 0$ ein Gewicht. Wir setzen $V_0 := \{v \in V;\ \mu_v = 0\}$ und betrachten den Hilbertraum

$$\mathcal{H}_\Gamma := \bigoplus_{e\in E} L_2((a_e, b_e), \mu_e) \oplus \ell_2(V \setminus V_0, (\mu_v)_{v\in V\setminus V_0})\,.$$

In dieser Formulierung ist der in Abschnitt 2.4 erarbeitete Teil enthalten, und zwar für $V_0 = V$.

Durch die Einführung der Punktmassen in den Knoten ändern sich auch die Randbedingungen an den Knoten. Dafür erweitern wir die Spur-Abbildungen in geeigneter Weise.

Definition. Sei $v \in V \setminus V_0$. Wir definieren die *Randwerte* in v durch: $\operatorname{tr}_v : \mathcal{H}_\Gamma \cap C(E) \to \mathbb{K}^{\{v\}\cup E_v}$,

$$\operatorname{tr}_v f(v) := f(v), \qquad \operatorname{tr}_v f(e,j) := \begin{cases} f_e(a_e) & \text{falls } j = 0,\ e \in E_{v,0}, \\ f_e(b_e) & \text{falls } j = 1,\ e \in E_{v,1}. \end{cases}$$

Die *signierten Randwerte* in v definieren wir durch: $\operatorname{str}_v : \{f \in \mathcal{H}_\Gamma;\ f_e \in L_1(a_e, b_e),\ \partial_{\mu_e} f_e \text{ exist.},\ \partial_{\mu_e} f_e \in L_2((a_e, b_e), \mu_e)\ (e \in E)\} \to \mathbb{K}^{\{v\}\cup E_v}$,

$$\operatorname{str}_v f(v) := 0, \qquad \operatorname{str}_v f(e,j) := \begin{cases} f_e(a_{e+}) & \text{falls } j = 0,\ e \in E_{v,0}, \\ -f_e(b_{e-}) & \text{falls } j = 1,\ e \in E_{v,1}. \end{cases}$$

Außerdem setzen wir $\operatorname{tr}(\cdot) := (\operatorname{tr}_v(\cdot))_{v\in V}$ und $\operatorname{str}(\cdot) := (\operatorname{str}_v(\cdot))_{v\in V}$.

Für $v \in V \setminus V_0$ wird also auch der Funktionswert in v berücksichtigt. Die Definition $\operatorname{str}_v f(v) = 0$ bietet die Möglichkeit, die Randbedingungen kompakt zu notieren. Wir erweitern noch die Abbildung ι durch die Knotenfunktionswerte: Für $f \in \big\{f \in \mathcal{H}_\Gamma;\ \exists\, g \in W^1_{2,\mu}(E) : g_e = f_e\ \mu_e\text{-f.ü. } (e \in E)\big\}$ sei $\iota(f) := ((\iota_e(f_e))_{e\in E}, (f(v))_{v\in V\setminus V_0})$.

Sei X ein Unterraum von $\mathbb{K}^{V\setminus V_0 \cup E'}$ und L ein selbstadjungierter Operator in X.

Wir definieren τ in $\mathcal{H}_\Gamma$ durch

$$
\begin{aligned}
D(\tau) &:= \{f \in \mathcal{H}_\Gamma;\ \exists\, g \in W^1_{2,\mu}(E) : g_e = f_e\ \mu_e\text{-f.ü. } (e \in E), \\
&\qquad\qquad \operatorname{tr}\iota(f) \in X\}, \\
\tau(f,g) &:= \sum_{e\in E} \int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\, dx + (L(\operatorname{tr}\iota(f)) \,|\, \operatorname{tr}\iota(g))\,.
\end{aligned}
$$

Definition. Für eine endliche Menge M und $A \subseteq M$ sei $\mathrm{pr}_A : \mathbb{K}^M \to \mathbb{K}^A$ definiert durch

$$\mathrm{pr}_A(\xi) := (\xi_a)_{a\in A}.$$

Ist A einelementig, also $A = \{a\}$, so schreiben wir auch pr_a für $\mathrm{pr}_{\{a\}}$.

Sei

$$V_1 := \{v \in V \setminus V_0;\ \mathrm{pr}_v(X) = \{0\}\}\,.$$

Die Menge V_1 besteht aus den Knoten v, in denen zwar eine Knotenmasse $\mu_v \neq 0$ vorliegt, in dem aber die Randbedingung $f(v) = 0$ gestellt wird.

Wir fordern generell, dass die Funktionswerte in den Knoten voneinander unabhängig sind. Dies heißt, dass

$$\dim \mathrm{pr}_{V\setminus V_0}(X) = |V \setminus V_0| \tag{2.1}$$

gelten sollte. Das bedeutet aber nicht notwendigerweise, dass $\mathbb{1}_{\{v\}} \in X$ ist für $v \in V \setminus V_0$, da keinerlei Aussagen über eventuelle Abhängigkeiten zwischen Funktionswerten in den Knoten und Randwerten von den Kanten getroffen werden.

2.29 Lemma. *Die Form τ ist symmetrisch. Es gelte* (2.1)*. Dann ist τ genau dann dicht definiert, wenn $V_1 = \varnothing$.*

Beweis. Die Symmetrie ist klar.

Sei $V_1 = \varnothing$. Für $v \in V \setminus V_0$ sei $x^v \in X$ mit $x^v(v) = 1$ und $x^v(w) = 0$ für $w \in V \setminus (V_0 \cup \{v\})$. Außerdem sei $g^v \in \mathcal{H}_\Gamma$ definiert durch $\operatorname{tr} \iota(g^v) = x^v$, und g^v sei affin linear auf den Kanten $e \in E$ und verknüpfe die Randwerte. Dann gilt $g^v \in D(\tau)$. Sei $f \in \mathcal{H}_\Gamma$. Sei $\tilde{f} \in \mathcal{H}_\Gamma$ definiert durch

$$\tilde{f} := f - \sum_{v \in V \setminus V_0} f(v) g^v.$$

Dann gilt $\tilde{f}(v) = 0$ für alle $v \in V \setminus V_0$. Weiterhin lässt sich $\tilde{f}$ in $\mathcal{H}_\Gamma$ durch Funkionen aus $\left\{f \in D(\tau);\ f_e \in C_c^1(a_e, b_e)\ (e \in E),\ f(v) = 0\ (v \in V \setminus V_0)\right\}$ approximieren, da $C_c^1(a_e, b_e)$ dicht in $L_2((a_e, b_e), \mu_e)$ ist $(e \in E)$.

Sei nun andererseits $V_1 \neq \varnothing$, also $v \in V_1$. Sei $g \in D(\tau)$. Dann gilt $g(v) = 0$ wegen $\operatorname{tr} \iota(g) \in X$. Damit erhalten wir

$$\left\| \mathbb{1}_{\{v\}} - g \right\|_{\mathcal{H}_\Gamma}^2 \geq \mu_v > 0.$$

Also ist $D(\tau)$ nicht dicht in $\mathcal{H}_\Gamma$. //

Wir betrachten im Folgenden nur den Fall, dass $V_1 = \varnothing$, also τ dicht definiert, ist.

2.30 Lemma. *Die Form τ ist quasi-akkretiv und abgeschlossen.*

Beweis. Sei $M := \|L\| + 1$. Für $e \in E$ sei

$$r_e := \min\left\{b_e - a_e, \frac{1}{8M}\right\}$$
$$\gamma_e := 4M \max\left\{\mu_e((a_e, a_e + r_e))^{-1}, \mu_e((b_e - r_e, b_e))^{-1}\right\}.$$

Weiterhin sei

$$\gamma := \max\left\{\gamma_e;\ e \in E\right\} \vee \max\left\{M\mu_v^{-1};\ v \in V \setminus V_0\right\}.$$

Sei $f \in D(\tau)$. Dann gilt mit Lemma 1.4 wie im Beweis von Satz 1.5

$$\begin{aligned}
&\tau(f) \\
&= \sum_{e\in E} \left\|\iota_e(f_e)'\right\|^2_{L_2(a_e,b_e)} + (L \operatorname{tr}\iota(f) \,|\, \operatorname{tr}\iota(f)) \\
&\geq \sum_{e\in E} \left\|\iota_e(f_e)'\right\|^2_{L_2(a_e,b_e)} - M \left|\operatorname{tr}\iota(f)\right|^2 \\
&\geq \sum_{e\in E} \left\|\iota_e(f_e)'\right\|^2_{L_2(a_e,b_e)} \\
&- M \sum_{e\in E} \left(\frac{1}{2M} \left\|\iota_e(f_e)'\right\|^2_{L_2(a_e,b_e)} + \frac{\gamma}{M} \left\|f_e\right\|^2_{L_2((a_e,b_e),\mu_e)}\right) \\
&- M \sum_{v\in V\setminus V_0} |f(v)|^2 \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{e\in E} \left\|\iota_e(f_e)'\right\|^2_{L_2(a_e,b_e)} - \gamma \sum_{e\in E} \left\|f_e\right\|^2_{L_2((a_e,b_e),\mu_e)} - \gamma \sum_{v\in V\setminus V_0} |f(v)|^2 \mu_v \\
&= \frac{1}{2} \sum_{e\in E} \left\|\iota_e(f_e)'\right\|^2_{L_2(a_e,b_e)} - \gamma\, (f \,|\, f)_{\mathcal{H}_\Gamma}.
\end{aligned}$$

Also ist τ quasi-akkretiv und die Einbettung $D_\tau \ni f \mapsto \iota(f) \in (\mathcal{H}_\Gamma \cap C(E), \|\cdot\|_\infty)$ ist stetig.

Sei (f^n) in $D(\tau)$, $f^n \to f$ in $\mathcal{H}_\Gamma$, $\tau(f^n - f^m) \to 0$ für $m, n \to \infty$.

Da (f^n) eine $\|\cdot\|_\tau$-Cauchy-Folge ist, ist $(\iota(f^n))$ auch eine $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy-Folge. Daher gibt es $g \in \mathcal{H}_\Gamma \cap C_\mu(E)$ so dass

$$\begin{aligned}
\|\iota_e(f_e^n) - g_e\|_\infty &\to 0 \quad (e \in E), \\
\max_{v\in V\setminus V_0} |\iota(f^n)(v) - g(v)| &\to 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\iota_e(f_e^n) \to g_e$ in $L_2((a_e,b_e),\mu_e)$ für alle $e \in E$, d. h. $\iota(f^n) \to g$ in $\mathcal{H}_\Gamma$. Wir erhalten $f_e = g_e$ μ_e-f.ü. für alle $e \in E$.

Für $e \in E$ erhalten wir wie im Beweis von Satz 1.5, dass $g_e \in W_2^1(a_e, b_e)$ ist und dass $(\iota_e(f_e^n))'$ in $L_2(a_e, b_e)$ gegen g_e' konvergiert ($e \in E$). Wir schließen $\iota(f) = g$. Aus der Stetigkeit von tr bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ und der Abgeschlossenheit von X folgt $\operatorname{tr} g \in X$. Damit gilt $f \in D(\tau)$, und außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned}\tau(f^n - f) &= \sum_{e \in E} \int_{a_e}^{b_e} \left|\iota_e(f_e^n)'(x) - g_e'(x)\right|^2 \, dx \\ &\quad + (L(\operatorname{tr}(\iota(f^n) - g)) \,|\, \operatorname{tr}(\iota(f^n) - g)) \\ &\quad \to 0.\end{aligned}$$

//

Sei nun

$$\tilde{X} := \left\{\xi \in X;\ \operatorname{pr}_{V \setminus V_0}(\xi) = 0\right\}$$

und Q die Orthogonalprojektion auf $\tilde{X}$.

Sei H der mit τ assoziierte selbstadjungierte Operator.

2.31 Satz. *Nach* (2.1) *wählen wir für $v \in V \setminus V_0$ ein $\xi_v \in X$ mit $\xi_v(v) = 1$ und $\xi_v(w) = 0$ für $w \in V \setminus (V_0 \cup \{v\})$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}D(H) = \Big\{f \in \mathcal{H}_\Gamma;\ \exists\, g_e \in W_2^1(a_e, b_e) : g_e = f_e \ \mu_e\text{-f.ü.}, \ \partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)' \text{ ex.},\\ \partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)' \in L_2((a_e, b_e), \mu_e) \ (e \in E), \ \operatorname{tr}\iota(f) \in X,\\ Q(\operatorname{str}\iota(f)') = QL(\operatorname{tr}\iota(f))\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Hf)_e &= -\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)' \quad (e \in E),\\ Hf(v) &= \frac{1}{\mu_v}\left(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,\middle|\, \xi_v\right) \quad (v \in V \setminus V_0).\end{aligned}$$

Außerdem gilt: Für $f \in D(H)$ und $v \in V \setminus V_0$ hängt $Hf(v)$ nicht von der konkreten Wahl von ξ_v ab.

Beweis. Vorbemerkung: Sei $f \in \mathcal{H}_\Gamma$, es gebe $h \in W_2^1(E)$ mit $h_e = f_e$ μ_e-f.ü. ($e \in E$). Weiterhin existiere $\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)'$ und es gelte $\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)' \in$

$L_2((a_e,b_e),\mu_e)$ für alle $e \in E$. Sei $g \in D(\tau)$.

Wie im Beweis von Satz 1.12 gezeigt, gilt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{(a_e,b_e)} (-\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)')(x)\overline{g_e(x)}\,d\mu_e(x) \\
&= -\iota_e(f_e)'(b_e-)\overline{\iota_e(g_e)(b_e)} + \iota_e(f_e)'(a_e+)\overline{\iota_e(g_e)(a_e)} \\
&+ \int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx
\end{aligned}$$

für $e \in E$. Summation der Gleichung über alle Kanten $e \in E$ liefert

$$\begin{aligned}
&\sum_{e\in E}\int\limits_{(a_e,b_e)} (-\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)')(x)\overline{g_e(x)}\,d\mu_e(x) \\
&= \sum_{e\in E}\int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + \sum_{v\in V_0}\big(\mathrm{str}_v\,\iota(f)' \,\big|\, \mathrm{tr}_v\,\iota(g)\big) \\
&+ \sum_{v\in V\setminus V_0}\big(\mathrm{pr}_{E_v}(\mathrm{str}_v\,\iota(f)') \,\big|\, \mathrm{pr}_{E_v}(\mathrm{tr}_v\,\iota(g))\big) \\
&= \sum_{e\in E}\int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + \sum_{v\in V}\big(\mathrm{str}_v\,\iota(f)' \,\big|\, \mathrm{tr}_v\,\iota(g)\big) \\
&= \sum_{e\in E}\int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + \big(\mathrm{str}\,\iota(f)' \,\big|\, \mathrm{tr}\,\iota(g)\big)\,.
\end{aligned}$$

Sei nun $f \in D(H)$. Für $e \in E$ folgt wie im Beweis von Satz 1.12, dass $\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)'$ existiert, $\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)' \in L_2((a_e,b_e),\mu_e)$ ist und $(Hf)_e = -\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)'$ gilt. Mit Hilfe der Vorbemerkung ergibt sich

$$\begin{aligned}
(Hf\,|\,g)_{\mathcal{H}_\Gamma} &= \sum_{e\in E}\int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + \big(\mathrm{str}\,\iota(f)' \,\big|\, \mathrm{tr}\,\iota(g)\big) \\
&+ \sum_{v\in V\setminus V_0} Hf(v)\overline{g(v)}\mu_v.
\end{aligned}$$

Wegen

$$(Hf \,|\, g)_{\mathcal{H}_\Gamma} = \tau(f,g) = \sum_{e\in E} \int\limits_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + (L(\operatorname{tr}\iota(f)) \,|\, \operatorname{tr}\iota(g))$$

folgt also

$$\sum_{v\in V\setminus V_0} Hf(v)\overline{g(v)}\mu_v = \big(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,\big|\, \operatorname{tr}\iota(g)\big)\,.$$

Für $x \in \tilde{X}$ sei $g \in D(\tau)$ mit $\operatorname{tr}\iota(g) = x$ und g sei affin linear auf den Kanten und verknüpfe die Randwerte. Dann gilt

$$0 = \big(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,\big|\, x\big)\,,$$

also $QL(\operatorname{tr}\iota(f)) = Q(\operatorname{str}\iota(f)')$. Sei nun $v \in V \setminus V_0$ und $g \in D(\tau)$ mit $\operatorname{tr}\iota(g) = \xi_v$, und g sei affin linear auf den Kanten und verknüpfe die Randwerte. Dann gilt

$$Hf(v)\mu_v = \big(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,\big|\, \xi_v\big)\,.$$

Sei andererseits $\tilde{H}$ der in der rechten Seite der Behauptung angegebene Operator. Sei $f \in D(\tilde{H})$. Dann ist $f \in D(\tau)$. Sei $g \in D(\tau)$. Es gibt $\xi \in \tilde{X}$, so dass $\operatorname{tr}\iota(g) = \sum_{v\in V\setminus V_0} g(v)\xi_v + \xi$ gilt. Da $\xi \in \tilde{X}$ ist, gilt $(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,|\, \xi) = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{v\in V\setminus V_0} Hf(v)\overline{g(v)}\mu_v \\
&= \sum_{v\in V\setminus V_0} \big(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,\big|\, \xi_v\big)\,\overline{g(v)} \\
&= \left(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,\middle|\, \sum_{v\in V\setminus V_0} g(v)\xi_v\right) + \big(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,\big|\, \xi\big) \\
&= \big(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,\big|\, \operatorname{tr}\iota(g)\big)\,.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir unter Benutzung der Vorbemerkung

$$\begin{aligned}
&\left(\tilde{H}f \,\middle|\, g\right)_{\mathcal{H}_\Gamma} \\
&= \sum_{e\in E} \int_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + \left(\operatorname{str}\iota(f)' \,\middle|\, \operatorname{tr}\iota(g)\right) \\
&+ \sum_{v\in V\setminus V_0} Hf(v)\overline{g(v)}\mu_v \\
&= \sum_{e\in E} \int_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + \left(\operatorname{str}\iota(f)' \,\middle|\, \operatorname{tr}\iota(g)\right) \\
&+ \left(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,\middle|\, \operatorname{tr}\iota(g)\right) \\
&= \sum_{e\in E} \int_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\,dx + (L\operatorname{tr}\iota(f) \mid \operatorname{tr}\iota(g)) \\
&= \tau(f,g).
\end{aligned}$$

Die Definition von H liefert $f \in D(H)$ und $Hf = \tilde{H}f$.

Nun zur Unabhängigkeit von $Hf(v)$ von der Wahl der ξ_v. Sei $f \in D(H)$, $v \in V \setminus V_0$. Sei $\xi_1, \xi_2 \in X$ mit $\xi_1(v) = \xi_2(v) = 1$ und $\xi_1(w) = \xi_2(w) = 0$ für $w \in V \setminus (V_0 \cup \{v\})$. Dann ist $\xi_1 - \xi_2 \in \tilde{X}$, und es gilt

$$\left(L(\operatorname{tr}\iota(f)) - \operatorname{str}\iota(f)' \,\middle|\, \xi_1 - \xi_2\right) = 0.$$

Damit hängt $Hf(v)$ nicht von der Wahl der ξ_v ab. //

Positivität und Kontraktivität der assoziierten C_0-Halbgruppe

Nun untersuchen wir für den Operator H (bzw. für die Form τ) die Beurling-Deny-Kriterien.

2.32 Satz. *(a) Sei X ein Unterverband von $\mathbb{K}^{E'}$ und $(e^{-tL})_{t\geq 0}$ eine positive C_0-Halbgruppe. Dann ist $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ positiv.*

(b) Sei X ein Stone'scher Unterverband von $\mathbb{K}^{E'}$ und $(e^{-tL})_{t\geq 0}$ eine submarkovsche C_0-Halbgruppe. Dann ist $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ submarkovsch.

Beweis. (a) Sei $f \in D(\tau)$. Dann gilt wie im Beweis von Satz 1.14 (da $|\cdot|$ eine Normalkontraktion ist), dass $\iota_e(|f_e|) \in W^1_{2,\mu}(a_e, b_e)$ ist $(e \in E)$ und ebenso

$$\int\limits_{a_e}^{b_e} \left|\iota_e(|f_e|)'(x)\right|^2 \, dx \leq \int\limits_{a_e}^{b_e} \left|\iota_e(f_e)'(x)\right|^2 \, dx \quad (e \in E)$$

gilt. Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{tr}\iota(|f|) = |\operatorname{tr}\iota(f)| \in X$. Damit ist $|f| \in D(\tau)$. Mit Lemma 2.28 folgt $(L \operatorname{tr}\iota(|f|) \,|\, \operatorname{tr}\iota(|f|)) \leq (L \operatorname{tr}\iota(f) \,|\, \operatorname{tr}\iota(f))$, und daher $\tau(|f|) \leq \tau(f)$.

(b) Nach (a) ist $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ positiv. Sei $f \in D(\tau)$, $f \geq 0$. Wie im Beweis von Satz 1.14 folgt $\iota_e(f_e \wedge 1) \in W^1_{2,\mu}(a_e, b_e)$ $(e \in E)$, und

$$\int\limits_{a_e}^{b_e} \left|\iota_e(f_e \wedge 1)'(x)\right|^2 \, dx \leq \int\limits_{a_e}^{b_e} \left|\iota_e(f_e)'(x)\right|^2 \, dx \quad (e \in E).$$

Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{tr}(\iota(f) \wedge 1) = (\operatorname{tr}\iota(f)) \wedge 1 \in X$, also $f \wedge 1 \in D(\tau)$. Es gilt $(L \operatorname{tr}(\iota(f) \wedge 1) \,|\, \operatorname{tr}(\iota(f) \wedge 1)) \leq (L \operatorname{tr}\iota(f) \,|\, \operatorname{tr}\iota(f))$ nach Lemma 2.28. Daher folgt $\tau(f \wedge 1) \leq \tau(f)$. //

Lokale Randbedingungen

Im Fall lokaler Randbedingungen gibt es eine Zerlegung

$$X = \bigoplus_{v \in V} X_v$$

in Unterräume $X_v \subseteq \mathbb{K}^{E_v}$ bzw. $X_v \subseteq \mathbb{K}^{\{v\} \cup E_v}$, falls $v \in V_0$ bzw. $v \in V \setminus V_0$ ist. Bezüglich dieser Zerlegung zerfallen auch

$$L = \bigoplus_{v \in V} L_v$$

und

$$Q = \bigoplus_{v \in V} Q_v,$$

wobei L_v ein selbstadjungierter Operator in X_v und Q_v die Orthogonalprojektion auf

$$\tilde{X}_v := \begin{cases} X_v & \text{falls } v \in V_0, \\ \{\xi \in X_v;\ \xi(v) = 0\} & \text{falls } v \in V \setminus V_0 \end{cases}$$

für alle $v \in V$ ist. Für die Form τ erhalten wir

$$\begin{aligned} D(\tau) = \{f \in \mathcal{H}_\Gamma;\ \exists\, g \in W^1_{2,\mu}(E) : g_e = f_e\ \mu_e\text{-f.ü. } (e \in E), \\ \operatorname{tr}_v \iota(f) \in X_v\ (v \in V)\}, \end{aligned}$$

$$\tau(f,g) = \sum_{e \in E} \int_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x)\overline{\iota_e(g_e)'(x)}\, dx + \sum_{v \in V} \left(L_v(\operatorname{tr}_v \iota(f)) \,|\, \operatorname{tr}_v \iota(g)\right).$$

Die Bedingung (2.1), also

$$\dim \operatorname{pr}_{V \setminus V_0}(X) = |V \setminus V_0|\,,$$

zerfällt in

$$\forall\, v \in V \setminus V_0 : \tilde{X}_v \neq X_v,$$

d. h. für $v \in V \setminus V_0$ gibt es $\xi_v \in X_v$ mit $\xi_v(v) = 1$. Da $V_1 = \varnothing$ vorausgesetzt ist, ist das im lokalen Fall automatisch erfüllt.

Die Selbstadjungiertheit des mit τ assoziierten Operators H und die Beurling-Deny-Kriterien für die assoziierte Halbgruppe werden bei lokalen Randbedingungen wieder lokal an jedem Knoten separat entschieden. Wir geben die entsprechenden Resultate in diesem Kontext noch einmal an. Die Beweise ergeben sich sofort aus Satz 2.31 bzw. Satz 2.32 und den Zerlegungen für X, L und Q.

2.33 Folgerung. *Für $v \in V \setminus V_0$ sei $\xi_v \in X_v$ mit $\xi_v(v) = 1$. Es gilt*

$$\begin{aligned}
D(H) = \Big\{ f \in \mathcal{H}_\Gamma;\ \exists\, g_e \in W_2^1(a_e, b_e) : g_e = f_e\ \mu_e\text{-f.ü.},\ \partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)' \text{ ex.}, \\
\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)' \in L_2((a_e, b_e), \mu_e)\ (e \in E),\ \operatorname{tr}_v f \in X_v, \\
Q_v(\operatorname{str}_v \iota(f)') = Q_v L_v(\operatorname{tr}_v \iota(f))\ (v \in V) \Big\},
\end{aligned}$$

$$(Hf)_e = -\partial_{\mu_e}\iota_e(f_e)' \quad (e \in E),$$

$$Hf(v) = \frac{1}{\mu_v}\left(L_v(\operatorname{tr}_v \iota(f)) - \operatorname{str}_v \iota(f)' \,\middle|\, \xi_v \right) \quad (v \in V \setminus V_0).$$

Außerdem gilt: Für $f \in D(H)$ und $v \in V \setminus V_0$ hängt $Hf(v)$ nicht von der konkreten Wahl von ξ_v ab.

2.34 Folgerung. *(a) Für $v \in V$ sei X_v ein Unterverband von $\mathbb{K}^{E_v}$ bzw. $\mathbb{K}^{\{v\} \cup E_v}$ und es sei $(e^{-tL_v})_{t \geq 0}$ eine positive C_0-Halbgruppe. Dann ist $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ positiv.*

(b) Für $v \in V$ sei X_v ein Stone'scher Unterverband von $\mathbb{K}^{E_v}$ bzw. $\mathbb{K}^{\{v\} \cup E_v}$ und es sei $(e^{-tL_v})_{t \geq 0}$ eine submarkovsche C_0-Halbgruppe. Dann ist $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ submarkovsch.

2.7 Beispiele

Stetige Funktionen auf Graphen mit lokalen Randbedingungen

Das erste Beispiel ist der Fall stetiger Funktionen auf dem Graphen mit lokalen Randbedingungen. Stetigkeit in einem Knoten heißt dabei, dass alle zugehörigen Kantenfunktionswerte übereinstimmen und – falls die Knotenmasse ungleich Null ist – auch der Knotenfunktionswert diesen Wert hat. Dieses Beispiel wird auch in [6], Abschnitt 4, behandelt.

Für $v \in V_0$ sei $X_v := \operatorname{lin}\{\mathbb{1}_{E_v}\}$und für $v \in V \setminus V_0$ sei $X_v := \operatorname{lin}\big\{\mathbb{1}_{\{v\} \cup E_v}\big\}$.

Für $v \in V_0$ sei $a_v : \mathcal{H}_\Gamma \to \mathbb{K}$ linear. Wir definieren

$$C(\Gamma) := \Big\{ f \in \mathcal{H}_\Gamma \cap C(E); \operatorname{tr}_v \iota(f) = a_v(f) \mathbb{1}_{E_v} \ (v \in V_0), \\ \operatorname{tr}_v \iota(f) = f(v) \mathbb{1}_{\{v\} \cup E_v} \ (v \in V \setminus V_0) \Big\}.$$

Der Raum $C(\Gamma)$ besteht also aus solchen Funktionen auf Γ, die stetig sind.

Sei $v \in V$. Da $\dim X_v = 1$ ist, ist L_v eine Multiplikation mit einem Skalar, d. h. $L_v \in \mathbb{K}$. Aus der Selbstadjungiertheit von L_v ergibt sich sogar $L_v \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $l_v := (L_v \mathbb{1} \,|\, \mathbb{1})$. Dann gilt $l_v = L_v \, |E_v|$, falls $v \in V_0$ ist bzw. $l_v = L_v(|E_v| + 1)$, falls $v \in V \setminus V_0$ ist.

Für die Form τ erhalten wir in diesem Spezialfall

$$D(\tau) = \Big\{ f \in C(\Gamma); \ \exists\, g_e \in W_2^1(a_e, b_e) : g_e = f_e \ \mu_e\text{-f.ü.}, \\ \partial_{\mu_e} \iota_e(f_e)' \text{ ex.}, \partial_{\mu_e} \iota_e(f_e)' \in L_2((a_e, b_e), \mu_e) \ (e \in E) \Big\},$$

$$\tau(f, g) = \sum_{e \in E} \int_{a_e}^{b_e} \iota_e(f_e)'(x) \overline{\iota_e(g_e)'(x)} \, dx \\ + \sum_{v \in V_0} l_v a_v(f) \overline{a_v(g)} + \sum_{v \in V \setminus V_0} l_v f(v) \overline{g(v)}.$$

Sei $v \in V \setminus V_0$. Da X_v eindimensional ist, folgen $\tilde{X}_v = \{0\}$, $Q_v = 0$ und das einzige Element $\xi_v \in X_v$ mit $\xi_v(v) = 1$ ist $\xi_v = \mathbb{1}_{\{v\} \cup E_v}$. Für $v \in V_0$ ist $Q_v = (\cdot \,|\, \mathbb{1}_{E_v}) \, \mathbb{1}_{E_v}$. Für den Operator H erhalten wir damit als Definitionsbereich

$$D(H) = \Big\{ f \in C(\Gamma); \ \exists\, g_e \in W_2^1(a_e, b_e) : g_e = f_e \ \mu_e\text{-f.ü.}, \\ \partial_{\mu_e} \iota_e(f_e)' \text{ ex.}, \partial_{\mu_e} \iota_e(f_e)' \in L_2((a_e, b_e), \mu_e) \ (e \in E), \\ \sum_{e \in E_{v,0}} \iota_e(f_e)'(a_e +) - \sum_{e \in E_{v,1}} \iota_e(f_e)'(b_e -) = a_v(f) l_v \ (v \in V_0) \Big\},$$

und als Realisierung

$$\begin{aligned}
(Hf)_e &= -\partial_{\mu_e} \iota_e (f_e)' \quad (e \in E), \\
Hf(v) &= \frac{1}{\mu_v}\Bigg(l_v f(v) - \sum_{e \in E_{v,0}} \iota_e (f_e)'(a_e+) + \sum_{e \in E_{v,1}} \iota_e (f_e)'(b_e-) \Bigg) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (v \in V \setminus V_0).
\end{aligned}$$

2.35 Folgerung. *(a) Die C_0-Halbgruppe $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ ist positiv.*

(b) Gilt $L_v \geq 0$ für alle $v \in V$, so erfüllt τ die Bedingungen des zweiten Beurling-Deny-Kriteriums, d. h. die C_0-Halbgruppe $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ ist submarkovsch.

Beweis. Für $v \in V$ ist X_v ein Stone'scher Unterverband von $\mathbb{K}^{E_v}$ bzw. $\mathbb{K}^{\{v\}\cup E_v}$. Aus Lemma 2.28 und Folgerung 2.34 folgt die Behauptung. //

Der diskrete Laplace-Operator auf Graphen

In diesem Abschnitt geben wir einen Einblick in den diskreten Laplace-Operator auf Graphen und zeigen, dass wir ihn auch mit unserem Modell beschreiben können. Dafür seien $\mu_e = 0$ für $e \in E$ und $\mu_v = 1$ für alle $v \in V$, also $V_0 = \varnothing$. Unser Hilbertraum $\mathcal{H}_\Gamma$ wird dann zu

$$\mathcal{H}_\Gamma = \{0\}^E \oplus \ell_2(V) = \ell_2(V).$$

Geometrisch behalten wir die Kanten des Graphen, aber entlang den Kanten erfolgt keinerlei Aktion. Zugehörige Randbedingungen zu Kanten mit Maß $\mu_e = 0$ sind Dirichlet-Randbedingungen, da die einzige Funktion sowieso die Nullfunktion ist und damit alle Randbedingungen übereinstimmen.

Um den diskreten Laplace-Operator auf dem Graphen zu erhalten, müssen wir den Operator mit Hilfe nicht-lokaler Randbedingungen beschreiben.

Definition. Für $v, w \in V$ sei

$$E_{vw} := \{e \in E;\ (e,0) \in E_v \wedge (e,1) \in E_w\}$$

die Menge der (gerichteten) Kanten von v nach w. Die *Adjazenz-Matrix* $A = (a_{vw})_{v,w\in V}$ von Γ ist definiert durch

$$a_{vw} := |E_{vw} \cup E_{wv}| \quad (v, w \in V),$$

d. h. im Eintrag a_{vw} steht die Anzahl der Kanten zwischen v und w.

Sei $D := \operatorname{diag}((|E_v|)_{v\in V})$ die Diagonalmatrix der Knotengrade von Γ. Sei $|E_v| \geq 1$ für $v \in V$, d. h. es gebe keine isolierten Knoten. Dann ist D invertierbar.

Definition. Der diskrete Laplace-Operator Δ_d in $\ell_2(V)$ ist definiert durch $\Delta_d : \ell_2(V) \to \ell_2(V)$,

$$\Delta_d := I - D^{-1/2} A D^{-1/2}.$$

Wir betrachten $X := \mathbb{K}^V \oplus \{0\}^{E'} \cong \mathbb{K}^V$. An die Knotenwerte stellen wir keine Anforderungen. Sei $L := \Delta_d$. Mit $\xi_v := (\delta_{vw})_{w\in V}$ für $v \in V$ erhalten wir

$$\begin{aligned} D(H) &= \ell_2(V), \\ Hf(v) &= Lf(v) = \Delta_d f(v) \quad (v \in V). \end{aligned}$$

In diesem Sinn enthält unsere Beschreibung der Diffusion auf Graphen auch den diskreten Diffusionsfall. Für weitergehende Literatur zu diesem Thema sei auf [10] verwiesen.

3 Mehrdimensionale singuläre Diffusion

In diesem Kapitel werden wir singuläre Diffusion im Mehrdimensionalen erarbeiten. Dafür benötigen wir ein wenig Vorarbeit, denn die dafür zulässigen Maße μ unterliegen einer gewissen Einschränkung; sie müssen absolutstetig bezüglich der Kapazität sein. Außerdem ergibt sich eine weitere Schwierigkeit im Gegensatz zur eindimensionalen Situation: im Eindimensionalen hatten wir vermöge der Sobolev-Einbettung generell stetige Funktionen (bzw. Repräsentanten). Diese Regularität fällt im höherdimensionalen Fall weg. Es stellt sich dann die Frage, in welchem Sinn eine W_2^1-Funktion als Element in $L_2(\mu)$ aufgefasst werden kann. Die passende Antwort hierauf ist der quasi-stetige Repräsentant. Der erste Abschnitt beschäftigt sich daher mit Kapazitäten und Quasi-Stetigkeit. Im zweiten Abschnitt wird dann singuläre Diffusion mit Dirichlet-Randbedingungen vorgestellt. Wir zeigen auch, dass dafür die Bedingungen des zweiten Beurling-Deny-Kriteriums erfüllt sind.

3.1 Kapazität und Quasi-Stetigkeit

Dieser Abschnitt hat vorbereitenden Charakter. Wir definieren Kapazität und Quasi-Stetigkeit und beweisen grundlegende Eigenschaften.

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, $m : \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ ein Radon-Maß auf X mit $\operatorname{spt} m = X$. Sei τ eine reguläre Dirichlet-Form in $L_2(X,m)$.

Kapazität

Definition. Sei $V \subseteq X$ offen. Wir definieren

$$\begin{aligned} L_V &:= \{u \in D(\tau);\ u \geq 1\, m\text{-fast überall auf } V\}, \\ \operatorname{cap}(V) &:= \inf\left\{\|u\|_\tau^2;\ u \in L_V\right\}, \end{aligned}$$

wobei $\inf \varnothing = \infty$ ist. Für $A \subseteq X$ definieren wie die *Kapazität* (1-*Kapazität*) von A durch

$$\operatorname{cap}(A) := \inf_{V \subseteq X \text{ offen}, A \subseteq V} \operatorname{cap}(V).$$

3.1 Lemma ([3], Lemma 2.1.1)**.** *Sei $A \subseteq X$ offen,* $\operatorname{cap}(A) < \infty$.

(a) Es gibt es ein eindeutiges $e_A \in L_A$ mit $\|e_A\|_\tau^2 = \operatorname{cap}(A)$. Weiterhin gilt $\mathbb{1}_A \leq e_A \leq 1$ m-f.ü. Insbesondere ist e_A reell. Die Funktion e_A heißt Gleichgewichtspotential *von A.*

(b) Sei $v \in D(\tau)$, $v \geq 0$ m-f.ü. auf A. Dann gilt $\operatorname{Re}((\tau+1)(e_A, v)) \geq 0$. *Ist umgekehrt $u \in D(\tau)$ mit $u = 1$ m-f.ü. auf A und* $\operatorname{Re}((\tau+1)(u,v)) \geq 0$ *für alle $v \in D(\tau)$ mit $v \geq 0$ m-f.ü. auf A, so gilt $u = e_A$.*

(c) Ist $v \in D(\tau)$ mit $v = 0$ m-f.ü. auf A, so gilt $\operatorname{Re}((\tau+1)(e_A, v)) = 0$.

(d) Sei $B \subseteq X$ offen, $A \subseteq B$, $\operatorname{cap}(B) < \infty$. *Dann ist $e_A \leq e_B$ m-f.ü. Außerdem gilt dann*

$$\|e_B - e_A\|_\tau^2 = \operatorname{cap}(B) - \operatorname{cap}(A).$$

Beweis. (a) Aus $\operatorname{cap}(A) < \infty$ folgt $L_A \neq \varnothing$. Außerdem ist L_A konvex und abgeschlossen in D_τ. Daher besitzt 0 eine eindeutige Bestapproximation e_A in L_A.

Die Abbildungen $x \mapsto \operatorname{Re} x$ und $x \mapsto (0 \vee \operatorname{Re} x) \wedge 1$ sind Normalkontraktionen. Da auch $\operatorname{Re} e_A \in L_A$ ist und τ eine Dirichlet-Form ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\|\operatorname{Re} e_A\|_\tau^2 &= (\operatorname{Re} e_A \,|\, \operatorname{Re} e_A) + \tau(\operatorname{Re} e_A) \\ &\le (e_A \,|\, e_A) + \tau(e_A) = \|e_A\|_\tau^2 ,\end{aligned}$$

und damit wegen der Eindeutigkeit in (a), dass $e_A = \operatorname{Re} e_A$ gilt. Ebenso ergibt sich für $u := (0 \vee e_A) \wedge 1 \in L_A$, dass

$$\begin{aligned}\|u\|_\tau^2 &= (u \,|\, u) + \tau(u) \\ &\le (e_A \,|\, e_A) + \tau(e_A) = \|e_A\|^2\end{aligned}$$

gilt. Also erhalten wir $u = e_A$ und damit die restlichen zwei Behauptungen.

(b) Für $\varepsilon > 0$ gilt $e_A + \varepsilon v \in L_A$ und $\|e_A + \varepsilon v\|_\tau^2 \ge \|e_A\|_\tau^2$ nach Definition von e_A. Wegen

$$\|e_A + \varepsilon v\|_\tau^2 = \|e_A\|_\tau^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}\left((\tau+1)(e_A, v)\right) + \varepsilon^2 \|v\|_\tau^2$$

folgt $\operatorname{Re}\left((\tau+1)(e_A, v)\right) \ge 0$.

Sei nun $u \in D(\tau)$, $u = 1$ m-f.ü. auf A. Es gilt $u \in L_A$ und $w - u \ge 0$ m-f.ü. auf A für alle $w \in L_A$. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}\|w\|_\tau^2 &= \|u + (w-u)\|_\tau^2 \\ &= \|u\|_\tau^2 + 2\operatorname{Re}(\tau+1)(u, w-u) + \|u - w\|_\tau^2 \\ &\ge \|u\|_\tau^2\end{aligned}$$

für alle $w \in L_A$. Dies impliziert $u = e_A$.

(c) Nach Teil (b) folgen $\operatorname{Re}\left((\tau+1)(u,v)\right) \ge 0$ und $\operatorname{Re}\left((\tau+1)(u,-v)\right) \ge 0$, und damit die Behauptung.

(d) Da $e_A - e_A \wedge e_B = (e_A - e_B)^+ = 0$ m-f.ü. auf A ist, folgt mit (b) und

$(u^+ \mid u^-) + \tau(u^+, u^-) \le 0$ für reelles $u \in D(\tau)$, dass

$$\begin{aligned}
&\|e_A - e_A \wedge e_B\|_\tau^2 \\
&= \underbrace{(\tau+1)(e_A, (e_A - e_B)^+)}_{=0} + (\tau+1)(-e_A \wedge e_B, (e_A - e_B)^+) \\
&= (\tau+1)((e_A - e_B)^-, (e_A - e_B)^+) - \underbrace{(\tau+1)(e_B, (e_A - e_B)^+)}_{\ge 0} \\
&\le 0
\end{aligned}$$

ist. Daher ist $e_A = e_A \wedge e_B$ m-f.ü. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\|e_B - e_A\|_\tau^2 &= \|e_B\|_\tau^2 - 2\operatorname{Re}(\tau+1)(e_B, e_A) + \|e_A\|_\tau^2 \\
&= \|e_A\|_\tau^2 - \underbrace{2\operatorname{Re}(\tau+1)(e_B - e_A, e_A)}_{=0} - 2\,\|e_A\|_\tau^2 + \|e_A\|_\tau^2 \\
&= \operatorname{cap}(B) - \operatorname{cap}(A).
\end{aligned}$$

//

3.2 Lemma ([3], Lemma 2.1.2)**.** *(a)* cap *ist monoton auf* $\mathcal{T}$.

(b) cap *ist stark subadditiv auf* $\mathcal{T}$, *d. h. für* $A, B \in \mathcal{T}$ *gilt*

$$\operatorname{cap}(A \sup B) + \operatorname{cap}(A \cap B) \le \operatorname{cap}(A) + \operatorname{cap}(B).$$

(c) cap *ist* σ*-stetig von unten auf* $\mathcal{T}$.

Beweis. (a) Seien $A, B \in \mathcal{T}$, $A \subseteq B$. Es gilt $L_B \subseteq L_A$, und daher auch $\operatorname{cap}(A) \le \operatorname{cap}(B)$.

(b) Seien $A, B \in \mathcal{T}$ mit $\operatorname{cap}(A), \operatorname{cap}(B) < \infty$. Wegen

$$\begin{aligned}
e_A + e_B &= (e_A \vee e_B) + (e_A \wedge e_B) \\
|e_A - e_B| &= (e_A \vee e_B) - (e_A \wedge e_B)
\end{aligned}$$

ergibt sich mit der Parallelogrammidentität

$$\|e_A \vee e_B\|_\tau^2 + \|e_A \wedge e_B\|_\tau^2 = \frac{1}{2}\,\|e_A + e_B\|_\tau^2 + \frac{1}{2}\,\||e_A - e_B|\|_\tau^2\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cap}(A \cup B) + \operatorname{cap}(A \cap B) \le \|e_A \vee e_B\|_\tau^2 + \|e_A \wedge e_B\|_\tau^2 \\
&= \frac{1}{2}\|e_A + e_B\|_\tau^2 + \frac{1}{2}\||e_A - e_B|\|_\tau^2 \le \frac{1}{2}\|e_A + e_B\|_\tau^2 + \frac{1}{2}\|e_A - e_B\|_\tau^2 \\
&= \|e_A\|_\tau^2 + \|e_B\|_\tau^2 = \operatorname{cap}(A) + \operatorname{cap}(B).
\end{aligned}$$

(c) Sei (A_k) eine aufsteigende Folge in $\mathcal{T}$ mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{cap}(A_k) < \infty$. Sei $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $n \ge m$. Aus Lemma 3.1 folgt

$$\|e_{A_n} - e_{A_m}\|_\tau^2 = \operatorname{cap}(A_n) - \operatorname{cap}(A_m).$$

Damit ist (e_{A_n}) $\|\cdot\|_\tau$-konvergent gegen ein $u \in D(\tau)$. Für m-f.a. $x \in A$ ist $(e_{A_k}(x))$ ist monoton wachsend und konvergent gegen 1. Damit ist $u = 1$ m-f.ü. auf A. Sei $v \in D(\tau)$ mit $v \ge 0$ m-f.ü. auf A. Dann gilt

$$0 \le \operatorname{Re}\left((\tau + 1)(e_{A_n}, v)\right) \to \operatorname{Re}\left((\tau + 1)(u, v)\right).$$

Wir erhalten $u = e_A$ nach Lemma 3.1, und daher

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cap}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \|e_{A_n}\|_\tau^2 = \|e_A\|_\tau^2 = \operatorname{cap}(A). \qquad //$$

3.3 Satz ([3], Theorem 2.1.1)**.** *Sei $\mathcal{K} := \{K \subseteq X;\ K \text{ kompakt}\}$. Dann ist* cap *eine $\mathcal{K}$-Choquet-Kapazität (die Definition einer Choquet-Kapazität ist im Anhang aufgeführt). Insbesondere ist* cap *σ-subadditiv.*

Beweis. Nach Satz A.9 und Lemma 3.2 ist cap eine $\mathcal{K}$-Choquet-Kapazität. Sei (A_n) in $\mathcal{P}(X)$ und $G_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (G_n) eine aufsteigende Folge von Teilmengen von X. Da cap eine Choquet-Kapazität ist, folgt $\operatorname{cap}(G_n) \le \sum_{k=1}^n \operatorname{cap}(A_k)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= \operatorname{cap}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cap}(G_n) \\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^n \operatorname{cap}(A_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cap}(A_n). \qquad //
\end{aligned}$$

3.4 Bemerkung. Wir benötigen im Weiteren nur, dass cap monoton und σ-subadditiv ist. Es hätte also auch ausgereicht, diese beiden Eigenschaften der Kapazität nachzuweisen. Allerdings ist es ein nur geringfügig größerer Aufwand zu zeigen, dass cap eine Choquet-Kapazität ist. Deswegen haben wir uns entschieden, gleich diesen Begriff einzuführen, da er die benötigten Eigenschaften sehr gut zusammenfasst.

3.5 Lemma ([1], Bemerkung 1.11 (c))**.** *Seien* $U, V \subseteq X$ *offen,* $V \subseteq U$*. Ist* $m(U \setminus V) = 0$*, so folgt* $\operatorname{cap}(U) = \operatorname{cap}(V)$*.*

Beweis. Sei $u \in L_V$. Dann ist $u \geq 1$ m-f.ü. auf V. Wegen $m(U \setminus V) = 0$ gilt auch $u \geq 1$ m-f.ü. auf U, d.h. $u \in L_U$. Also gilt die Inklusion $L_V \subseteq L_U$. Aus $V \subseteq U$ folgt $L_U \subseteq L_V$ und damit $\operatorname{cap}(U) = \operatorname{cap}(V)$. //

3.6 Lemma ([1], Lemma 1.15)**.** *Seien* $u \in D(\tau) \cap C(X)$ *und* $c > 0$*. Dann gilt*

$$\operatorname{cap}(\{x \in X;\ |u(x)| > c\}) \leq \frac{1}{c^2} \|u\|_\tau^2 .$$

Beweis. Da u stetig ist, ist $G := \{x \in X;\ |u(x)| > c\} = |u|^{-1}((c, \infty))$ offen. Außerdem gilt $\frac{|u|}{c} \in L_G$. Daher folgt

$$\operatorname{cap}(G) \leq \left\| \frac{|u|}{c} \right\|_\tau^2 = \frac{1}{c^2} \left(\| |u| \|_{L_2(X,m)}^2 + \tau(|u|) \right).$$

Da $\||u|\|_{L_2(X,m)} = \|u\|_{L_2(X,m)}$ und $\tau(|u|) \leq \tau(u)$ gelten, folgt die Behauptung. //

Definition. Sei $A \subseteq X$. Wir sagen, dass eine Aussage *quasi-überall* (*q.ü.*) auf A gilt, falls es $N \subseteq A$ mit $\operatorname{cap}(N) = 0$ gibt, und die Aussage für alle $x \in A \setminus N$ gilt.

Quasi-Stetigkeit

Definition. Sei $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge abgeschlossener Teilmengen von X. Die Folge (F_k) heißt *Nest* auf X, falls $\operatorname{cap}(X \setminus F_k) \to 0$ für $k \to \infty$.

Ist (F_k) ein Nest, dann sei

$$C((F_k)_{k\in\mathbb{N}}) := \{u : X \to \mathbb{K};\ u|_{F_k} \in C(F_k)\ (k \in \mathbb{N})\}\,.$$

Definition. Sei $u : X \to \mathbb{K}$. u heißt *quasi-stetig*, falls es ein Nest (F_k) gibt, so dass $u \in C((F_k)_{k\in\mathbb{N}})$.

3.7 Bemerkung. Eine Funktion $u : X \to \mathbb{K}$ ist genau dann quasi-stetig, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt, so dass $\operatorname{cap}(U) < \varepsilon$ und $u|_{X\setminus U} \in C(X \setminus U)$ gelten.

3.8 Lemma (vgl. [3], Lemma 2.1.4)**.** *Sei $u \in D(\tau)$ reell und quasi-stetig, $U \subseteq X$ offen, $u \geq 0$ m-f.ü. auf U. Dann gilt $u \geq 0$ q.ü. auf U.*

Beweis. Sei (F_k) ein Nest, so dass $u \in C((F_k))$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen $F_k' := \operatorname{spt}(\mathbb{1}_{F_k} \cdot m)$. Dann gilt $F_k' \subseteq F_k$ und

$$m(\complement F_k' \setminus \complement F_k) = \int\limits_{\complement F_k'} \mathbb{1}_{F_k}\, dm = 0.$$

Aus Lemma 3.5 folgt daher

$$\operatorname{cap}(\complement F_k') = \operatorname{cap}(\complement F_k),$$

d. h. (F_k') ist ebenfalls ein Nest und $u \in C((F_k'))$. Sei $x \in F_k'$ und $V \subseteq X$ offen mit $x \in V$. Es gilt $m(V \cap F_k') > 0$, denn $\operatorname{spt}(\mathbb{1}_{F_k'} \cdot m) = F_k'$.

Sei $x \in U \cap F_k'$ und $u(x) < 0$. Da $u|_{F_k'}$ stetig ist, gibt es $V \subseteq X$ offen mit $x \in V$, so dass $u(y) < 0$ für alle $y \in V \cap (U \cap F_k')$ ist. Wir erhalten $m(V \cap (U \cap F_k')) = m((U \cap V) \cap F_k') > 0$. Dies zeigt, dass $u \geq 0$ auf $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k' \cap U$ gilt, also $u \geq 0$ q.ü. auf U ist. //

3.9 Satz ([3], Theorem 2.1.3)**.** *Sei $u \in D(\tau)$. Dann besitzt u einen quasi-überall eindeutig definierten quasi-stetigen Repräsentanten $\tilde{u}$.*

Beweis. Sei (u_k) in $D(\tau) \cap C_c(X)$ mit $u_k \to u$ in D_τ. Ohne Einschränkung (Übergang zu einer geeigneten Teilfolge) sei dabei $\|u_{k+1} - u_k\|_\tau^2 \leq 2^{-3k}$ für

$k \in \mathbb{N}$ und $u_k \to u$ m-f.ü. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$G_k := \left\{ x \in X;\ |u_{k+1}(x) - u_k(x)| > 2^{-k} \right\}.$$

Nach Lemma 3.6 gilt $\operatorname{cap}(G_k) \le 2^{-k}$. Wir definieren

$$F_k := \bigcap_{l=k}^{\infty} \complement G_l \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dann ist $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Nest, denn (F_k) ist aufsteigende Folge abgeschlossener Mengen und es gilt

$$\operatorname{cap}(\complement F_k) = \operatorname{cap}(\bigcup_{l=k}^{\infty} G_l) \le \sum_{l=k}^{\infty} \operatorname{cap}(G_l) \le \sum_{l=k}^{\infty} 2^{-l} \to 0.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $x \in F_k$. Für $l > m > k$ erhalten wir

$$|u_l(x) - u_m(x)| \le \sum_{j=m}^{l-1} |u_{j+1}(x) - u_j(x)| \le \sum_{j=m}^{l-1} 2^{-j} \to 0 \quad (l, m \to \infty).$$

Für $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ existiert also der Limes

$$\tilde{u}(x) := \lim_{k \to \infty} u_k(x).$$

Für $l \to \infty$ erhalten wir

$$|\tilde{u}(x) - u_m(x)| \le \sum_{j=m}^{\infty} |u_{j+1}(x) - u_j(x)| \le \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

für alle $x \in F_k$. Damit konvergiert u_m auf F_k gleichmäßig gegen $\tilde{u}$. Da (u_m) eine Folge stetiger Funktionen auf F_k ist, ist $\tilde{u}$ stetig auf F_k. Wir setzen $\tilde{u}$ durch 0 auf ganz X fort. Da $\operatorname{cap}(\complement \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k) = 0$ ist, konvergiert (u_m) auch m-f.ü. gegen $\tilde{u}$. Damit ist $\tilde{u} = u$ m-f.ü.

Für die Eindeutigkeit seien $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ zwei quasi-stetige Repräsentanten von u. Dann ist $|\tilde{u} - \tilde{v}|$ quasi-stetig und $|\tilde{u} - \tilde{v}| = 0$ m-f.ü. auf X. Nach Lemma 3.8 ist $|\tilde{u} - \tilde{v}| = 0$ q.ü., also $\tilde{u} = \tilde{v}$ q.ü. //

Mit Hilfe von Satz 3.9 lässt sich das Resultat aus Lemma 3.6 auf quasi-stetige Funktionen in $D(\tau)$ übertragen.

3.10 Folgerung ([3], Lemma 2.1.6). *Sei $u \in D(\tau)$ quasi-stetig und $c > 0$. Dann gilt*

$$\operatorname{cap}(\{x \in X;\ |u(x)| > c\}) \leq \frac{1}{c^2}\left(\|u\|^2_{L_2(X,m)} + \tau(u)\right).$$

Beweis. Sei (u_n) in $D(\tau) \cap C_c(X)$ und $\tilde{u}$ wie im Beweis von Satz 3.9. Dann gilt $u = \tilde{u}$ q.ü. Für $\varepsilon > 0$ gibt es $U \subseteq X$ offen, so dass $\operatorname{cap}(U) < \varepsilon$ gilt und $u_n \to u$ gleichmäßig auf $X \setminus U$ konvergiert. Für $\delta \in (0, c)$ gibt es daher $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ die Inklusion

$$\{x \in X;\ |u(x)| > c\} \subseteq \{x \in X;\ |u_n(x)| > c - \delta\} \cup U$$

gilt. Aus Lemma 3.6 folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}(\{x \in X;\ |u(x)| > c\}) &\leq \operatorname{cap}(\{x \in X;\ |u_n(x)| > c - \delta\} \cup U) \\ &\leq \frac{\|u_n\|^2_\tau}{(c-\delta)^2} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ und $\delta \to 0$ erhalten wir

$$\operatorname{cap}(\{x \in X;\ |u(x)| > c\}) \leq \frac{1}{c^2}\|u\|^2_\tau + \varepsilon. \qquad //$$

3.11 Lemma ([3], Theorem 2.1.2 (i)). *Sei $(u_j)_j$ eine Folge quasi-stetiger Funktionen auf X. Dann gibt es ein Nest (F_k), so dass $u_j \in C((F_k))$ für alle $j \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Für $j \in \mathbb{N}$ gibt es ein Nest $(F_k^j)_k$, so dass $u_j \in C((F_k^j)_k)$ ist und $\operatorname{cap}(X \setminus F_k^j) \leq \frac{1}{2^j}\frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $F_k := \bigcap_{j=1}^\infty F_k^j$. Dann ist F_k abgeschlossen und $\operatorname{cap}(X \setminus F_k) \leq \sum_{j=1}^\infty \operatorname{cap}(X \setminus F_k^j) \leq \frac{1}{k}$. Damit ist (F_k) ein Nest und $u_j \in C((F_k))$ für $j \in \mathbb{N}$. //

Definition. Sei (u_n) in $D(\tau)$, $u \in D(\tau)$. Die Folge (u_n) konvergiert *quasi-gleichmäßig* gegen u, falls es ein Nest (F_k) gibt, so dass $u_n \to u$ gleichmäßig auf F_k für alle $k \in \mathbb{N}$.

3.12 Satz ([1], Satz 1.24). *Sei* (u_n) *in* $D(\tau)$, $u \in D(\tau)$, $u_n \to u$ *in* D_τ. *Dann gibt es eine Teilfolge* $(u_{n_k})_k$ *von* (u_n), *so dass* $\tilde{u}_{n_k}$ *quasi-gleichmäßig, also insbesondere quasi-überall, gegen* $\tilde{u}$ *konvergiert.*

Beweis. Es gibt eine Teilfolge $(u_{n_k})_k$ von (u_n), so dass $\|u_{n_k} - u\|_\tau^2 \le 2^{-3k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Aus Folgerung 3.10 erhalten wir

$$\operatorname{cap}\left(\left\{x \in X;\ |\tilde{u}_{n_k}(x) - \tilde{u}(x)| > 2^{-k}\right\}\right) \le 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Für $j \in \mathbb{N}$ sei $A_j := \bigcup_{k=j}^\infty \left\{x \in X;\ |\tilde{u}_{n_k}(x) - \tilde{u}(x)| > 2^{-k}\right\}$. Dann gilt

$$\operatorname{cap}(A_j) \le \sum_{k=j}^\infty 2^{-k} = 2^{1-j}$$

und $\tilde{u}_{n_k}$ konvergiert auf $X \setminus A_j$ gleichmäßig gegen $\tilde{u}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Für $j \in \mathbb{N}$ gibt es $G_j^\varepsilon \subseteq X$ offen mit $A_j \subseteq G_j^\varepsilon$, so dass $\operatorname{cap}(G_j^\varepsilon) \le \operatorname{cap}(A_j) + \varepsilon$ gilt. Mit $G_j := G_j^{2^{1-j}}$ ergibt sich $\operatorname{cap}(G_j) \le 2^{2-j}$ und $|\tilde{u}_{n_k} - \tilde{u}| \le 2^{-j}$ auf $F_j := X \setminus G_j$. Das Nest (F_j) liefert die Behauptung. //

Kapazitäts-absolutstetige Maße

Für ein Borelmaß μ auf X schreiben wir $\mu \ll \operatorname{cap}$, falls $\mu(N) = 0$ für alle $N \in \mathcal{B}(X)$ mit $\operatorname{cap}(N) = 0$ ist, d. h. falls μ absolutstetig bezüglich cap ist.

Sei

$$M_0 := \{\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty];\ \mu \text{ Maß},\ \mu \ll \operatorname{cap}\}$$

die Menge aller Kapazitäts-absolutstetigen Borelmaße auf X.

3.13 Lemma ([13], Proposition 1.1). *Sei* $\mu \in M_0$. *Dann definiert*

$$D(\mu) := \{u \in D(\tau);\ \tilde{u} \in L_2(X, \mu)\},$$
$$\mu(u, v) := \int_X \tilde{u}(x)\overline{\tilde{v}(x)}\, d\mu(x) \quad (u, v \in D(\mu)),$$

eine abgeschlossene Form in D_τ.

Beweis. Sei (u_n) in $D(\mu)$, $u_n \to u$ in D_τ, $\mu(u_n - u_m) \to 0$ für $m, n \to \infty$. Nach Satz 3.12 gibt es eine Teilfolge $(u_{n_k})_k$ von (u_n), so dass $\tilde{u}_{n_k}$ q.ü. gegen $\tilde{u}$ konvergiert. Aus $\mu \in M_0$ folgt $\tilde{u}_{n_k} \to \tilde{u}$ μ-f.ü. Da $(\tilde{u}_{n_k})$ eine Cauchy-Folge in $L_2(X, \mu)$ ist, ist $\tilde{u} \in L_2(X, \mu)$. Damit erhalten wir $u \in D(\mu)$, und $\mu(u_{n_k} - u) \to 0$. //

3.14 Beispiel. Wir wollen nun einige Beispiele von Kapazitäts-absolutstetigen Maßen geben.

(a) Sei μ ein Borelmaß mit $\mu \ll m$. Dann gilt $\mu \in M_0$, denn für $N \in \mathcal{B}(X)$ mit $\operatorname{cap}(N) = 0$ folgt $m(N) = 0$ und daher $\mu(N) = 0$.

(b) Sei Γ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und vol_{n-1} das $(n-1)$-dimensionale Hausdorff-Maß auf Γ. Dann ist $\mu := \operatorname{vol}_{n-1}(\cdot \cap \Gamma) \in M_0$. Dies folgt aus [2], Theorem 4.1. Insbesondere sind also alle $(n-1)$-dimensionalen Oberflächenmaße kompakter C^1-Untermannigfaltigkeiten bzw. Hyperebenen in M_0.

3.2 Singuläre Diffusion mit Dirichlet-Randbedingungen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die Form τ in $L_2(\Omega)$ definiert durch

$$\begin{aligned} D(\tau) &:= W^1_{2,0}(\Omega), \\ \tau(u, v) &:= \int_\Omega \nabla u(x) \overline{\nabla v(x)}\, dx \quad (u, v \in D(\tau)), \end{aligned}$$

ist eine Dirichlet-Form.

3.15 Bemerkung. Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, mit zugehörigen Kapazitäten cap_1 und cap_2. Sei $N \subseteq \Omega_1$. Dann ist $\operatorname{cap}_1(N) = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{cap}_2(N) = 0$ gilt.

Sei Ω nun zusätzlich noch beschränkt. Sei $\mu \in M_0$ ein endliches Borelmaß auf Ω und $\mathcal{H} := L_2(\Omega, \mu)$. Sei $U := \Omega \setminus \operatorname{spt} \mu$. Weiterhin gelte

$$W^1_{2,0}(U) = \left\{u \in W^1_{2,0}(\Omega);\ \tilde{u} = 0\, \mu\text{-f.ü.}\right\}.$$

Die Inklusion $W^1_{2,0}(U) \subseteq \left\{u \in W^1_{2,0}(\Omega);\ \tilde{u} = 0\, \mu\text{-f.ü.}\right\}$ ist klar. Die andere Inklusion ist im Allgemeinen nicht immer erfüllt und führt daher zu einer echten Forderung an μ. Dies machen wir an einem Beispiel deutlich.

3.16 Beispiel. Zunächst wollen wir eine Hilfsaussage voranstellen: Sei $n \geq 2$. Seien $\varepsilon > 0$ und $r_0 > 0$. Dann gibt es $0 < r < r' \leq r_0$ und $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{spt} \varphi \subseteq B(0, r')$ und $\mathbb{1}_{B[0,r]} \leq \varphi \leq 1$, so dass $\|\varphi\|_{2,1} \leq \varepsilon$.

Sei $B_+ := \{x \in B(0,1);\ x_1 > 0\}$. Unter Benutzung der Hilfsaussage gibt es (x^k) in B_+, (r_k), (r'_k) in $(0, \infty)$ mit $r_k < r'_k$ $(k \in \mathbb{N})$ und (φ_k) in $C^1_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{spt} \varphi_k \subseteq B(x^k, r'_k)$, $\mathbb{1}_{B[x^k, r_k]} \leq \varphi_k \leq 1$, so dass die Menge der Häufungswerte von (x^k) gerade $\{x \in B(0,1);\ x_1 = 0\}$ ist, so dass $B(x^k, r'_k) \cap B(x^j, r'_j) = \varnothing$ $(k, j \in \mathbb{N}, k \neq j)$ gilt und so dass $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{2,1} < \infty$. Sei $\Omega \supseteq \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B[x^k, r'_k]}$ offen und beschränkt und μ das Lebesgue-Maß auf $K := \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B[x^k, r_k]}$. Sei $\varphi := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k$. Sei $\psi \in C^1_c(\Omega)$, $\psi = 1$ in einer Umgebung von K. Dann ist $\psi - \varphi$ quasi-stetig und $\psi - \varphi = 1$ auf $\{x \in B(0,1);\ x_1 = 0\}$. Diese Menge hat positive Kapazität. Andererseits ist $\psi - \varphi = 0$ μ-f.ü., da $\psi - \varphi = 0$ auf $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B[x^k, r_k]$ und die Menge $K \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B[x^k, r_k] = \{x \in B(0,1);\ x_1 = 0\}$ eine μ-Nullmenge ist. Also ist $\psi - \varphi \in \left\{u \in W^1_{2,0}(\Omega);\ \tilde{u} = 0\, \mu\text{-f.ü.}\right\}$, aber es gilt auch

$$\psi - \varphi \notin \left\{u \in W^1_{2,0}(\Omega);\ \tilde{u} = 0 \text{ q.ü. auf } K\right\}.$$

Nach [4], Theorem 1.13, gilt für $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$$W^1_{2,0}(V) = \left\{u \in W^1_2(\mathbb{R}^n);\ \tilde{u} = 0 \text{ q.ü. auf } \mathbb{R}^n \setminus V\right\}.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} W^1_{2,0}(\Omega \setminus K) &= \left\{u \in W^1_2(\mathbb{R}^n);\ \tilde{u} = 0 \text{ q.ü. auf } \mathbb{R}^n \setminus (\Omega \setminus K)\right\} \\ &= \left\{u \in W^1_{2,0}(\Omega);\ \tilde{u} = 0 \text{ q.ü. auf } K\right\}. \end{aligned}$$

Damit schließen wir, dass $\psi - \varphi \notin W^1_{2,0}(\Omega \setminus K)$.

3.17 Satz. *Sei* $D^1_{2,0}(U) := \{u \in W^1_{2,0}(\Omega);\ \Delta u|_U = 0\}$. *Sei* $u \in W^1_{2,0}(\Omega)$. *Dann gibt es genau ein* $Ju \in D^1_{2,0}(U)$ *mit* $Ju - u \in W^1_{2,0}(U)$. *Die dadurch definierte Abbildung* J *in* $W^1_{2,0}(\Omega)$ *ist linear. Außerdem ist* J *die Orthogonalprojektion auf* $D^1_{2,0}(U)$.

Beweis. Mit $v := Ju - u$, d. h. $Ju = u + v$, zeigen wir: Es gibt genau ein $v \in W^1_{2,0}(U)$, so dass

$$0 = \int_U Ju\Delta\varphi = \int_U u\Delta\varphi - \int_U v\Delta\varphi \quad (\varphi \in C_c^\infty(U)).$$

Nach der Poincaré-Ungleichung wird $W^1_{2,0}(U)$ mit dem Skalarprodukt

$$(f,g) \mapsto (f\,|\,g)_0 := \int_U \nabla f \overline{\nabla g}$$

ein Hilbertraum. Es gilt

$$\left|\int_U u\Delta\varphi\right| = \left|\int_U \nabla u \nabla\varphi\right| \le \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)^n}\,\|\varphi\|_0 \quad (\varphi \in C_c^\infty(U)).$$

Damit ist $C_c^\infty(U) \ni \varphi \mapsto \int_U u\Delta\varphi$ ein stetiges lineares Funktional auf $W^1_{2,0}(U)$ und besitzt daher eine eindeutige stetige lineare Fortsetzung ℓ auf $W^1_{2,0}(U)$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es ein eindeutiges $v \in W^1_{2,0}(U)$, so dass

$$\ell(\varphi) = (\varphi\,|\,\overline{v})_0 \quad (\varphi \in W^1_{2,0}(U)).$$

Die Linearität von J folgt aus der Eindeutigkeit im Darstellungssatz von Riesz. Da $Ju - u \in W^1_{2,0}(U)$ ist, gibt es (φ_k) in $C_c^\infty(U)$ mit $\varphi_k \to Ju - u$ in $W^1_{2,0}(U)$. Sei $v \in D^1_{2,0}(U)$. Dann gilt

$$0 = \int_U \overline{v}\Delta\varphi_k = -\int_U \overline{\nabla v}\nabla\varphi_k = -\,(\varphi_k\,|\,v)_0 \to (u - Ju\,|\,v)_0\,,$$

d. h. $u - Ju \perp D^1_{2,0}(U)$; J ist die Orthogonalprojektion auf $D^1_{2,0}(U)$. //

3.18 Bemerkung. (a) Für $u \in W^1_{2,0}(\Omega)$ ist $\widetilde{Ju} = \tilde{u}$ μ-f.ü., denn $Ju - u \in W^1_{2,0}(U)$ und daher $\widetilde{Ju} - \tilde{u} = (\widetilde{Ju - u}) = 0$ μ.-f.ü.

(b) Für $u \in W^1_{2,0}(\Omega)$ gilt $\tau(Ju) \leq \tau(u)$, da $\|J\| \leq 1$.

(c) Aus Satz 3.17 folgt

$$W^1_{2,0}(\Omega) = W^1_{2,0}(U) \oplus D^1_{2,0}(U).$$

Sei $u \in D := \left\{u \in \mathcal{H};\ \exists\, v \in W^1_{2,0}(\Omega) : \tilde{v} = u \ \mu\text{-f.ü.}\right\}$ und $v \in W^1_{2,0}(\Omega)$ mit $\tilde{v} = u$ μ-f.ü. Dann ist $Jv \in D^1_{2,0}(U)$ und es gilt auch $\widetilde{Jv} = u$ μ-f.ü. Jv ist als $D^1_{2,0}(U)$-Element dann eindeutig durch u bestimmt, denn ist $u = 0$ μ-f.ü., so ist $\tilde{v} = 0$ μ-f.ü., also $v \in W^1_{2,0}(U)$. Damit ist $Jv = 0$ in $D^1_{2,0}(U)$. Sei $\iota(u) := Jv \in D^1_{2,0}(U)$. Dann ist $\iota : D \to D^1_{2,0}(U)$ eine lineare Abbildung.

Die maximale Form τ_D in $\mathcal{H}$ mit Dirichlet-Randbedingungen ist definiert durch

$$\begin{aligned} D(\tau_D) &:= \left\{u \in \mathcal{H};\ \exists\, v \in W^1_{2,0}(\Omega) : \tilde{v} = u \ \mu\text{-f.ü.}\right\}, \\ \tau_D(u,v) &:= \tau(\iota(u), \iota(v)) = \int_\Omega \nabla\iota(u)(x)\overline{\nabla\iota(v)(x)}\, dx \quad (u, v \in D(\tau_D)). \end{aligned}$$

3.19 Bemerkung. Die Wohldefiniertheit von ι lässt sich auch so interpretieren: Die Abbildung $\kappa : \left\{u \in D^1_{2,0}(U);\ \tilde{u} \in \mathcal{H}\right\} \to \mathcal{H}$, $\kappa u := \tilde{u}$ ist injektiv. Damit lässt sich

$$\begin{aligned} D(\tau_0) &:= \left\{u \in D^1_{2,0}(U);\ \tilde{u} \in \mathcal{H}\right\}, \\ \tau_0(u,v) &:= \tau(u,v) \quad (u, v \in D(\tau_0)) \end{aligned}$$

als Form in $\mathcal{H}$ auffassen, genauer: Die Form

$$\begin{aligned} D(\tilde{\tau}_0) &:= \kappa(D(\tau_0)), \\ \tilde{\tau}_0(u,v) &:= \tau(\kappa^{-1}(u), \kappa^{-1}(v)) \quad (u, v \in D(\tilde{\tau}_0)) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert in $\mathcal{H}$. Es gilt $\tilde{\tau}_0 = \tau_D$.

3.20 Lemma. *τ_D ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei (u_n) in $D(\tau_D)$, $u_n \to u$ in $\mathcal{H}$, $\tau_D(u_n - u_m) \to 0$. Nach der Poincaré-Ungleichung gibt es $v \in W^1_{2,0}(\Omega)$, so dass $\iota(u_n) \to v$ in $W^1_{2,0}(\Omega)$. Für $\varphi \in C_c^\infty(U)$ gilt

$$0 = \int_U \iota(u_n)\Delta\varphi \to \int_U v\Delta\varphi.$$

Also ist $v \in D^1_{2,0}(U)$.

Nach Satz 3.12 gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}), so dass $\widetilde{\iota(u_{n_k})}$ q.ü. gegen $\tilde{v}$ konvergiert. Da $\mu \in M_0$ ist, folgt $\widetilde{\iota(u_{n_k})} \to \tilde{v}$ μ-f.ü. Aus $u_n \to u$ in $\mathcal{H}$ und $\widetilde{\iota(u_n)} = u_n$ μ-f.ü. erhalten wir $\tilde{v} = u$ μ-f.ü. Also ist $u \in D(\tau_D)$ und es gilt

$$\tau_D(u_n - u) = \tau(\iota(u_n) - v) \to 0. \qquad //$$

3.21 Lemma. *τ_D ist dicht definiert.*

Beweis. Es gilt $C^1_c(\Omega) \subseteq D(\tau_D)$ und $C^1_c(\Omega)$ ist dicht in $\mathcal{H}$. //

Damit ist τ_D eine positive symmetrische dicht definierte abgeschlossene Form in $\mathcal{H}$. Wir zeigen noch, dass $C_c^\infty(\Omega)$ wesentlich für τ_D ist.

3.22 Satz. *$C_c^\infty(\Omega)$ ist wesentlich für τ_D.*

Beweis. Es genügt, $0 \le u \in D(\tau_D)$ zu approximieren.

Sei zunächst $u \in L_\infty(\mu)$ beschränkt. Dann gibt es eine Folge (φ_l) in $C_c^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_l \to \iota(u)$ in $W^1_{2,0}(\Omega)$ und $M := \sup\left\{\|\varphi_l\|_{\infty,\operatorname{spt}\mu}\,;\, l \in \mathbb{N}\right\} < \infty$. Wegen Satz 3.12 kann ohne Einschränkung davon ausgegangen werden, dass zusätzlich φ_l $(= \tilde{\varphi}_l)$ q.ü. gegen $\widetilde{\iota(u)}$ konvergiert. Wegen $\mu \in M_0$ erhalten wir daraus $\varphi_l \to \widetilde{\iota(u)}$ μ-f.ü. Aus $\widetilde{\iota(u)} = u$ μ-f.ü. folgt auch $\varphi_l \to u$ μ-f.ü. Da μ endlich ist, ist $M\mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{H}$ und $|\varphi_l| \le M\mathbb{1}_\Omega$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert $\varphi_l \to u$ in $\mathcal{H}$.

Sei nun $u \in D(\tau_D)$, $u \ge 0$. Es gibt $v \in W^1_{2,0}(\Omega)$, so dass $\tilde{v} = u$ μ-f.ü. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $u_k := u \wedge k \in D(\tau_D)$, denn es ist $v \wedge k \in W^1_{2,0}(\Omega)$ und

$\widetilde{v \wedge k} = \tilde{v} \wedge k = u_k$ μ-f.ü. Für $k \in \mathbb{N}$ gibt es also $(\varphi_l^k)_l$ in $C_c^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_l^k \to \iota(u_k)$ in $W_{2,0}^1(\Omega)$ und $\varphi_l^k \to u_k$ in $\mathcal{H}$. Es gilt $u_k \to u$ in $\mathcal{H}$. Außerdem gilt auch $v \wedge k \to v$ in $W_{2,0}^1(\Omega)$, also auch $\iota(u_k) = J(v \wedge k) \to Jv = \iota(u)$ in $W_{2,0}^1(\Omega)$. Damit folgt $u_k \to u$ in D_{τ_D}. //

Sei H der mit τ_D assoziierte selbstadjungierte Operator. Nun wollen wir den Operator H beschreiben.

Definition. Seien $F \in L_{1,loc}(\Omega)^n$, $g \in L_1(\Omega, \mu)$ und es gelte

$$\int_\Omega F(x)\nabla\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,d\mu(x) \quad (\varphi \in C_c^\infty(\Omega)).$$

Dann heißt g *distributionelle Divergenz von F bezüglich μ*. Wir schreiben

$$\operatorname{div}_\mu F := g.$$

3.23 Bemerkung. Sei $\operatorname{div}_\mu F = g$. Dann gilt $\operatorname{div} F|_U = 0$: Für $\varphi \in C_c^\infty(U)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_U F(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega F(x)\nabla\varphi(x)\,dx &= -\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,d\mu(x)\\ &= -\int_U g(x)\varphi(x)\,d\mu(x) = 0,\end{aligned}$$

da $\operatorname{spt}\varphi \subseteq U$ und $\operatorname{spt}\mu \cap U = \varnothing$ gilt.

3.24 Lemma. *Sei $u \in D(\tau_D)$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt*

$$\tau(\iota(u), \varphi) = \int_\Omega \nabla\iota(u)\overline{\nabla\varphi} = \int_\Omega \nabla\iota(u)\overline{\nabla\iota(\varphi)} = \tau(\iota(u), \iota(\varphi)).$$

Beweis. Wegen $\iota(\varphi) = J\varphi$ ist die behauptete Gleichheit der Integrale äquivalent zu

$$\int_\Omega \nabla\iota(u)\overline{\nabla(\varphi - J\varphi)} = 0.$$

Da $\varphi - J\varphi \in W^1_{2,0}(U)$ ist, folgt die Behauptung. //

3.25 Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned} D(H) &= \{u \in D(\tau_D);\ \operatorname{div}_\mu \nabla\iota(u) \textit{ existiert}, \operatorname{div}_\mu \nabla\iota(u) \in \mathcal{H}\}, \\ Hu &= -\operatorname{div}_\mu \nabla\iota(u) \quad (u \in D(H)). \end{aligned}$$

Beweis. Sei H_1 der durch die rechte Seite der Behauptung definierte Operator. Sei $u \in D(H_1)$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Nach Lemma 3.24 gilt

$$\begin{aligned} \tau_D(u,\varphi) &= \int_\Omega \nabla\iota(u)(x)\overline{\nabla\iota(\varphi)(x)}\, dx = \int_\Omega \nabla\iota(u)(x)\overline{\nabla\varphi(x)}\, dx \\ &= -\int_\Omega \operatorname{div}_\mu \nabla\iota(u)(x)\overline{\varphi(x)}\, d\mu(x) = (H_1 u \,|\, \varphi)_{\mathcal{H}}\,. \end{aligned}$$

Da beide Seiten $\|\cdot\|_{\tau_D}$-stetig sind, gilt die Gleichheit auch für $v \in D(\tau_D)$, also

$$(H_1 u \,|\, v) = \tau_D(u,v) \quad (v \in D(\tau_D)).$$

Das bedeutet, dass $u \in D(H)$ ist und dass $Hu = H_1 u$ gilt.

Sei $u \in D(H) \subseteq D(\tau_D)$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla\iota(u)(x)\overline{\nabla\varphi(x)}\, dx &= \int_\Omega \nabla\iota(u)(x)\overline{\nabla\iota(\varphi)(x)}\, dx \\ &= \tau_D(u,\varphi) \\ &= (Hu \,|\, \varphi)_{\mathcal{H}} \\ &= \int_\Omega Hu(x)\overline{\varphi(x)}\, d\mu(x). \end{aligned}$$

Wir lesen ab: $\operatorname{div}_\mu \nabla\iota(u)$ existiert, $\operatorname{div}_\mu \nabla\iota(u) = -Hu \in \mathcal{H}$. Also erhalten wir $u \in D(H_1)$ und $Hu = -\operatorname{div}_\mu \nabla u = H_1 u$. //

Beurling-Deny-Kriterien

Wir zeigen nun, dass die von $-H$ erzeugte C_0-Halbgruppe $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ submarkovsch ist. Die dabei wesentliche Rechnung fassen wir in einem Lemma zusammen.

3.26 Lemma. *Sei F eine C^∞-Normalkontraktion, $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt*

$$J(F \circ u) = J(F \circ Ju).$$

Beweis. Vorbemerkung: Sei $v \in W_{2,0}^1(\Omega)$. Sei $(F_k)_k$ ein Nest, so dass $\tilde{v}|_{F_k}$ stetig ist ($k \in \mathbb{N}$). Dann ist $(F \circ \tilde{v})|_{F_k}$ stetig für alle $k \in \mathbb{N}$, also $F \circ \tilde{v}$ quasi-stetig. Da $\tilde{v} = v$ λ^n-f.ü. ist, folgt $F \circ \tilde{v} = F \circ v$ λ^n-f.ü. Aus der Eindeutigkeit des quasi-stetigen Repräsentanten erhalten wir $\widetilde{F \circ v} = F \circ \tilde{v}$ q.ü., also auch μ-f.ü.

Wegen $u = \tilde{u} = \widetilde{Ju}$ μ-f.ü. ist $\widetilde{F \circ u} = F \circ u = F \circ \widetilde{Ju} = \widetilde{F \circ Ju}$ μ-f.ü. Damit ist also $F \circ u - F \circ (Ju) \in W_{2,0}^1(U)$. Daraus erhalten wir

$$J(F \circ u) - J(F \circ (Ju)) = J(F \circ u - F \circ (Ju)) = 0. \qquad //$$

3.27 Satz. *τ_D erfüllt die Bedingungen des zweiten Beurling-Deny-Kriteriums, also ist die C_0-Halbgruppe $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ submarkovsch.*

Beweis. Sei $F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eine C^∞-Normalkontraktion und $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann ist $F \circ u \in C_c^\infty(\Omega) \subseteq D(\tau_D)$. Mit Lemma 3.26 folgt weiter

$$\begin{aligned} \tau_D(F \circ u) &= \tau(\iota(F \circ u)) = \tau(J(F \circ u)) = \tau(J(F \circ Ju)) \\ &\leq \tau(F \circ Ju) \leq \tau(Ju) = \tau(\iota(u)) = \tau_D(u). \end{aligned}$$

Aus Satz A.8 folgt die Behauptung. //

Beispiel

Sei $\Omega := (-1,1)^n \subseteq \mathbb{R}^n$, und $\Gamma := \Omega \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Sei $\mu := \lambda^{n-1}(\cdot \cap \Gamma)$ das $(n-1)$-dimensionale Lebesgue-Maß auf Γ. Dann ist $\mu \in M_0$ und μ ist endlich. Es gilt $\operatorname{spt}\mu = \Gamma$. Sei $U := \Omega \setminus \operatorname{spt}\mu$. Um die vorgestellte Theorie anwenden zu können, muss μ auch die letzte Bedingung erfüllen. Gilt also

$$W^1_{2,0}(U) = \big\{u \in W^1_{2,0}(\Omega);\ \tilde{u} = 0\,\mu\text{-f.ü.}\big\}?$$

Dazu ist nur „$\supseteq$“ zu zeigen.

Wir benötigen ein Resultat, das wir hier nur zitieren wollen.

3.28 Satz ([12], Theorem 5.29 für $p = 2$ und $m = 1$)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer und erfülle die* Segment-Eigenschaft*, d. h. für alle $x \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x und $y_x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass $z + ty_x \in \Omega$ für alle $z \in \overline{\Omega} \cap U_x$ und $t \in (0,1)$. Für $u \in L_2(\Omega)$ sei*

$$Eu(x) := \begin{cases} u(x) & \textit{falls } x \in \Omega, \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$$

die Nullfortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

(a) $u \in W^1_{2,0}(\Omega)$.
(b) $Eu \in W^1_2(\mathbb{R}^n)$.

Offenbar ist Ω offen, nichtleer und erfüllt die Segment-Eigenschaft. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir

$$A_+ := A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)), \quad A_- := A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty,0))$$

für $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sei $u \in W^1_{2,0}(\Omega)$, $\tilde{u} = 0$ μ-f.ü. Dann gibt es (φ^k) in $C_c^\infty(\Omega)$, so dass $\varphi^k \to u$ in $W^1_{2,0}(\Omega)$ und $\varphi^k = \tilde{\varphi}^k \to \tilde{u}$ q.ü. konvergiert. Aus der speziellen Wahl von μ folgt $\varphi^k(\cdot,0) \to \tilde{u}(\cdot,0) = 0$ λ^{n-1}-f.ü.

Für $v \in W^1_{2,0}(\Omega)$ sei $v_+ := (Ev)|_{\mathbb{R}^n_+}$. Dann erhalten wir $\varphi^k_+ \to u_+$ in $W^1_2(\mathbb{R}^n_+)$.

Nach [12], Theorem 5.36 für $p = 2$ und $m = 1$, gibt es einen stetigen linearen Spur-Operator $\operatorname{tr} : W^1_2(\mathbb{R}^n_+) \to L_2(\mathbb{R}^{n-1})$.

Wir erhalten $\operatorname{tr}\varphi_+^k \to \operatorname{tr} u_+$ in $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$. Aus $\operatorname{tr}\varphi_+^k = \varphi_+^k(\cdot,0)$ $(k \in \mathbb{N})$ und $\varphi_+^k(\cdot,0) \to \tilde{u}_+(\cdot,0) = 0$ λ^{n-1}-f.ü. folgt $\operatorname{tr} u_+ = \tilde{u}_+(\cdot,0) = 0$. Aus [12], Theorem 5.37, folgt daher $u_+ \in W^1_{2,0}(\mathbb{R}^n_+)$, denn es gilt $u_+ \in W^1_2(\mathbb{R}^n_+)$ und $\operatorname{tr}_+ = 0$. Zweimalige Anwendung des Satzes 3.28 liefert $u|_{\Omega_+} \in W^1_{2,0}(\Omega_+)$. Analog erhalten wir $u|_{\Omega_-} \in W^1_{2,0}(\Omega_-)$ und damit insgesamt $u \in W^1_{2,0}(U)$.

Also ist unsere vorgestellte Theorie für das singuläre Maß μ anwendbar.

A Anhang

Absolutstetige Funktionen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{K}$.

Definition. f heißt *absolutstetig*, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Familie $((a_j, b_j))_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ paarweise disjunkter Teilintervalle von $[a, b]$ mit $\sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| < \delta$ die Abschätzung

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$$

gilt.

Es gelten folgenden Implikationen:

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \Rightarrow f \text{ absolutstetig} \Rightarrow f \text{ gleichmäßig stetig.}$$

A.1 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral)**.** *Es sind äquivalent:*

(a) f ist absolutstetig.

(b) Es gibt $g \in L_1(a, b)$ so dass

$$f(x) = f(a) + \int_{(a,x)} g(y)\,dy \quad (x \in [a, b]).$$

Gilt (b), so ist f λ-fast überall differenzierbar, und es gilt $f' = g$ λ-f.ü., und die klassische und distributionelle Ableitung von f stimmen überein.

Formen in Hilberträumen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

Definition. Sei $D \subseteq \mathcal{H}$ ein Teilraum. Eine *Form* τ in $\mathcal{H}$ is eine sesquilineare Abbildung[1]

$$\tau : D \times D \to \mathbb{K}$$

Der Teilraum $D(\tau) := D$ heißt *Definitionsbereich* von τ. Die Form τ heißt *symmetrisch*, falls

$$\tau(f, g) = \overline{\tau(g, f)} \quad (f, g \in D(\tau)),$$

und sie heißt *positiv*, falls

$$\tau(f) := \tau(f, f) \geq 0 \quad (f \in D(\tau)).$$

Ist τ eine symmetrische Form, so gilt $\tau(f) \in \mathbb{R}$ für $f \in D(\tau)$. Ist τ positiv, so schreiben wir auch $\tau \geq 0$.

A.2 Bemerkung. Sei $\gamma \geq 0$. Dann ist die skalare Form γ definiert durch

$$\begin{aligned} D(\gamma) &:= \mathcal{H}, \\ \gamma(f, g) &:= \gamma\,(f \,|\, g)_{\mathcal{H}} \quad (f, g \in D(\gamma)). \end{aligned}$$

Sei τ eine Form in $\mathcal{H}$.

Definition. τ heißt *akkretiv*, falls

$$\operatorname{Re} \tau(f) \geq 0 \quad (f \in D(\tau)).$$

[1] Sesquilinear bedeutet bei uns linear im ersten Argument und konjugiert linear im zweiten Argument.

Wir nennen τ *quasi-akkretiv*, falls es $\gamma > 0$ gibt, so dass die Form $\tau + \gamma$ mit Definitionsbereich $D(\tau + \gamma) := D(\tau)$ akkretiv ist, d. h. falls

$$(\operatorname{Re}\tau + \gamma)(f) = \operatorname{Re}\tau(f) + \gamma\,(f\,|\,f) \geq 0 \quad (f \in D(\tau)).$$

Ist τ eine symmetrische akkretive Form, so ist τ positiv.

Definition. Sei τ eine symmetrische quasi-akkretive Form, $\gamma \geq 0$ so, dass $\tau + \gamma \geq 0$. Dann definiert

$$(f\,|\,g)_\tau := (f\,|\,g)_{\mathcal{H}} + (\operatorname{Re}\tau + \gamma)(f,g) = (1+\gamma)\,(f\,|\,g)_{\mathcal{H}} + \operatorname{Re}\tau(f,g)$$

ein Skalarprodukt auf $D(\tau)$ und induziert daher eine Norm $\|\cdot\|_\tau$.

τ heißt *abgeschlossen*, falls $(D(\tau), \|\cdot\|_\tau)$ vollständig ist. τ heißt *abschließbar*, falls es eine abgeschlossene Fortsetzung von τ gibt.

Sei τ abschließbare Form. Sei $(\mathcal{H}_1, (\cdot\,|\,\cdot)_1)$ die Vervollständigung des Prähilbertraumes $(D(\tau), (\cdot\,|\,\cdot)_\tau)$. Dann ist $\mathcal{H}_1$ ein Hilbertraum. Wir definieren $\overline{\tau}$ in $\mathcal{H}$ durch

$$\begin{aligned} D(\overline{\tau}) &:= \mathcal{H}_1, \\ \overline{\tau}(f,g) &:= (f\,|\,g)_1 - (f\,|\,g)_{\mathcal{H}} \quad (f,g \in D(\overline{\tau})). \end{aligned}$$

Dann ist $\overline{\tau}$ eine abgeschlossene Fortsetzung von τ. Sie heißt *Abschließung* von τ und ist die kleinste abgeschlossene Fortsetzung.

A.3 Lemma. *Sei τ eine quasi-akkretive Form. Dann sind äquivalent:*

(a) τ ist abgeschlossen.

(b) Ist (f_n) in $D(\tau)$, $f \in \mathcal{H}$ mit $f_n \to f$ in $\mathcal{H}$ und $\tau(f_n - f_m) \to 0$ für $m, n \to \infty$, so gelten $f \in D(\tau)$ und $\tau(f_n - f) \to 0$ für $n \to \infty$.

A.4 Lemma. *Sei $H \geq 0$ ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$. Dann definiert*

$$\begin{aligned} D(\tau) &:= D(H), \\ \tau(f,g) &:= (Hf\,|\,g) \quad (f,g \in D(H)), \end{aligned}$$

eine abschließbare symmetrische positive Form.

A.5 Satz (erster Darstellungssatz)**.** *Sei τ eine symmetrische quasi-akkretive dicht definierte abgeschlossene Form in $\mathcal{H}$, $\gamma \geq 0$ so, dass $\tau + \gamma \geq 0$. Sei H in $\mathcal{H}$ definiert durch*

$$D(H) := \{f \in D(\tau);\ \exists\, Hf := g \in D(\tau)\,\forall\, h \in D(\tau) : \\ \tau(f,h) = (g \mid h)\}.$$

Dann gilt

(a) *H ist selbstadjungiert und es gilt $H + \gamma I \geq 0$.*
(b) *$D(H)$ ist wesentlich für τ, d. h. $D(H)$ ist dicht in $D_\tau := (D(\tau), \|\cdot\|_\tau)$.*
(c) *H ist der einzige selbstadjungierte Operator in $\mathcal{H}$ mit $D(H) \subseteq D(\tau)$ und*

$$\tau(f,g) = (Hf \mid g) \quad (f \in D(H), g \in D(\tau)).$$

Der Operator H heißt der mit τ assoziierte Operator*.*

Beurling-Deny-Kriterien

Die Beurling-Deny-Kriterien charakterisieren Positivität und Kontraktivität von C_0-Halbgruppen. Dabei werden Bedingungen an die mit dem Erzeuger der C_0-Halbgruppe assoziierten Form gestellt. Positivität und Kontraktivität können also direkt an der assoziierten Form entschieden werden.

A.6 Satz (erstes Beurling-Deny-Kriterium)**.** *Sei τ eine symmetrische quasi-akkretive dicht definierte abgeschlossene Form in L_2 und $\gamma \geq 0$ so, dass $\tau + \gamma \geq 0$. Sei H der mit τ assoziierte Operator. Dann sind äquivalent:*

(a) *e^{-tH} ist positiv für alle $t \geq 0$.*
(b) *Ist $f \in D(\tau)$, so ist $|f| \in D(\tau)$ und es gilt $\tau(|f|) \leq \tau(f)$.*
(c) *e^{-tH} ist reell für alle $t \geq 0$, und ist $f \in D(\tau)$ reell, so sind $f^+, f^- \in D(\tau)$ und es gilt $\tau(f^+, f^-) \leq 0$.*

A.7 Satz (zweites Beurling-Deny-Kriterium). *Sei τ eine symmetrische quasi-akkretive dicht definierte abgeschlossene Form in L_2 und $\gamma \geq 0$ so, dass $\tau + \gamma \geq 0$. Sei H der mit τ assoziierte Operator. Dann sind äquivalent:*

(a) e^{-tH} ist submarkovsch, d. h. positiv und L_∞-kontraktiv ($t \geq 0$).

(b) e^{-tH} ist positiv ($t \geq 0$), und ist $0 \leq f \in D(\tau)$, so ist $f \wedge 1 \in D(\tau)$ und es gilt $\tau(f \wedge 1) \leq \tau(f)$.

(c) Ist $F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eine Normalkontraktion und $f \in D(\tau)$, so gilt $F \circ f \in D(\tau)$ und $\tau(F \circ f) \leq \tau(f)$.

A.8 Satz. *Sei τ eine symmetrische positive dicht definierte abgeschlossene Form in L_2, $D \subseteq D(\tau)$ wesentlich für τ.*

(a) Sei $F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Normalkontraktion. Für $f \in D$ gelte $F \circ f \in D(\tau)$, $\tau(F \circ f) \leq \tau(f)$. Dann gilt

$$F \circ f \in D(\tau), \quad \tau(F \circ f) \leq \tau(f)$$

für alle $f \in D(\tau)$.

(b) Für alle Normalkontraktionen $F \in C^\infty(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$) und alle $f \in D$ gelte $F \circ f \in D(\tau)$, $\tau(F \circ f) \leq \tau(f)$. Dann erfüllt τ die Bedingungen des zweiten Beurling-Deny-Kriteriums.

Definition. Eine *Dirichlet-Form* ist eine symmetrische positive dicht definierte abgeschlossene Form, die die Bedingungen des zweiten Beurling-Deny-Kriteriums erfüllt.

Definition. Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, $m : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ ein Radon-Maß auf X mit $\operatorname{spt} m = X$. Sei τ eine Dirichlet-Form in $L_2(X, m)$. τ heißt *regulär*, falls $D(\tau) \cap C_c(X)$ wesentlich für τ und dicht in $C_0(X)$ ist.

Choquet-Kapazitäten

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $\mathcal{K} := \{K \subseteq X;\ K \,\text{kompakt}\}$.

Definition. Sei $I : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$. I heißt *$\mathcal{K}$-Choquet-Kapazität*, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(a) I ist monoton, d. h. für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \subseteq B$ folgt $I(A) \leq I(B)$,

(b) I ist σ-stetig von unten, d. h. für (A_n) in $\mathcal{P}(X)$ aufsteigend gilt

$$I(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} I(A_n).$$

(c) I ist σ-stetig von oben auf $\mathcal{K}$, d. h. für (A_n) in $\mathcal{K}$ absteigend gilt

$$I(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} I(A_n).$$

A.9 Satz ([3], Theorem A.1.2)**.** *Sei $I : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ monoton, stark subadditiv, d. h. für $A, B \in \mathcal{T}$ gilt $I(A \cup B) + I(A \cap B) \leq I(A) + I(B)$, und σ-stetig von unten. Für $A \subseteq X$ sei*

$$I^*(A) := \inf_{U \subseteq X \text{ offen}, A \subseteq U} I(U).$$

Dann ist I^* eine Fortsetzung von I und I^* ist eine $\mathcal{K}$-Choquet-Kapazität. I^* heißt äußere Kapazität von I.

Literaturverzeichnis

[1] O. Ascherl: *Störung von Dirichlet-Formen durch Maße*, Universität Regensburg, Diplomarbeit, Mai 2000

[2] J. F. Brasche, P. Exner, Y. A. Kuperin und P. Šeba: Schrödinger Operators with Singular Interactions. In: *J. Math. Anal. Appl.* 184 (1994), Nr. 1, S. 112–139

[3] M. Fukushima, Y. Oshima und M. Takeda: *Dirichlet Forms and Symmetris Markov Processes.* Walter de Gruyter, 1994

[4] L. I. Hedberg: Spectral synthesis and stability in Sobolev spaces. In: Euclidean Harmonic Analysis*. Proceedings Maryland, J. J. Benedetto (ed.), Lect. Notes in Math.* 779 (1980), S. 73–103

[5] U. Kant: *Dirichletformen auf Graphen und assoziierte Operatoren*, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, November 2007

[6] U. Kant, T. Klauss, J. Voigt und M. Weber: Dirichlet forms for singular one-dimensional operators and on graphs. In: *J. Evol. Equ.*. – in Veröffentlichung

[7] V. Kostrykin, J. Potthoff und R. Schrader: *Contraction Semigroups on Metric Graphs.* `http://arxiv.org/abs/0712.0914v2`, 2008

[8] V. Kostrykin und R. Schrader: Kichhoff's Rule for Quantum Wires. In: *J. Phys. A* 32 (1999), Nr. 4, S. 595–630

[9] P. Kuchment: Quantum graphs: I. Some basic structures. In: *Waves Random Media* 14 (2004), Nr. 1, S. 107–128

[10] L. Lu und F. R. K. Chung: *Complex Graphs and Networks.* American Mathematical Society, 2006

[11] E. M. Ouhabaz: *Analysis of Heat Equations on Domains.* Princeton University Press, 2005

[12] R. A. Adams und J. J. F. Fournier: *Sobolev Spaces.* 2nd Edition. Elsevier, 2003

[13] P. Stollmann: Smooth Perturbations of regular Dirichlet Forms. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 116 (1992), Nr. 3, S. 747–752

[14] B. Z. Vulikh: *Introduction to the theory of partially ordered spaces.* Wolters-Noordhoff, 1967

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema

„Behandlung singulärer Diffusion mit Hilfe von Dirichletformen“

unter Betreuung von Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Jürgen Voigt selbstständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

Dresden, den ______________ ________________________

Datum Christian Seifert