

# Erzeugung einer verallgemeinerten Eigenwertaufgabe mit ANSYS an der TUHH

Andreas Pelzer

10. Juni 1998

## Zusammenfassung

Dieser Report ist eine kurze, stichwortartige Beschreibung der Abläufe, um eine verallgemeinerte Eigenwertaufgabe eines Finite-Elemente Modells aus ANSYS zu extrahieren.

## 1 Einleitung

Das Testen von Lösern für verallgemeinerte Eigenwertaufgaben vom Typ

$$Kx = \lambda Mx$$

mit symmetrischen, positiv definiten Matrizen  $K$  und  $M$  gestaltet sich im allgemeinen als aufwendig, da das Codieren praxisnaher Beispiele viel Zeit in Anspruch nimmt. Auch lassen einfache Strukturen der Matrizen in der Regel die Herkunft aus der Praxis vermissen. Andererseits gibt es einige kommerzielle Produkte, die die Modellierung von Problemen mit Finite Elemente Methoden (FEM) sehr anwendungsbezogen für den Ingenieur, komfortabel und mit einer hohen Parametervielfalt erlauben.

Allerdings ist es bei diesen Programmen im allgemeinen nicht oder nur sehr schwer möglich, die Matrizen am Ende des Modellierungsprozesses auszugeben. Generell haben die Programme ihre eigenen Löser, die es nicht nötig machen, die Matrizen zwischenspeichern. So stellt zum Beispiel das Programm Marc/Mentat keine Ausgabe zur Verfügung. Sollte eine Speicherung doch erfolgen, so ist sie im binären – und damit komprimierten – Format, das nicht lesbar ist.

Mit dem Programm ANSYS kann man dagegen lesbare Strukturmatrizen erzeugen. Dazu muß zuerst das Modell als Substruktur definiert werden. Danach erzeugt man mit ANSYS aus der Substruktur ein Superelement, wobei man beachtet, alle Freiheitsgrade auch als Masterfreiheitsgrade festzulegen. Die Struktur, bestehend unter anderem aus der Steifigkeits- und der Massenmatrix, wird dann binär abgespeichert. Aus der Datei erhält man nach einer internen und einer externen Konvertierung dann die Matrizen im gewünschten Format. Die Methode der Substrukturierung wird ausführlich in [4, Kapitel 17] erläutert.

Die externe Konvertierung erfolgt durch ein separates, in der Programmiersprache C geschriebenes Programm. Es läßt zur Zeit zwei verschiedene Formate der Speicherung zu.

Da aber der Quellcode zugänglich ist, kann man das Format jederzeit ändern. Es wurde der Dialekt ANSI C gewählt, damit es auf möglichst vielen Plattformen verfügbar ist.

Der Aufbau des Reports ist wie folgt. Der Abschnitt 2 behandelt das Einloggen in das Rechenzentrum und das Starten des Programms ANSYS. Abschnitt 3 erläutert die nötigen Schritte, die unter ANSYS auszuführen sind. Dazu gehören unter anderem die Erzeugung eines Modellproblems und die Speicherung als Superelement. Im darauf folgenden Abschnitt 4 wird die Funktionsweise des separaten Programms *exansys* erläutert, das Dateien mit den Strukturmatrizen in verschiedenen Formaten abspeichern kann. Ein Beispiel in Abschnitt 5 veranschaulicht noch einmal insbesondere die Formate der Dateien.

## 2 Einrichten der Umgebung

1. Einloggen ins Rechenzentrum der TUHH auf den Rechner `hpxx` mit `telnet`. Dabei steht `xx` für die entsprechende zweistellige Rechnernummer (01 bis 40).
2. In der Datei `.login` auf dem Rechenzentrumrechner `hpxx` muß folgende Zeile stehen:  
`setenv DISPLAY hp4.mat.tu-harburg.de:0`  
Danach ist ein Neustart erforderlich.
3. Von der Workstation, an der man sitzt, muß folgender Befehl eingegeben werden zur Anzeige der von der Workstation `hpxx` ausgesendeten Informationen: `xhost hpxx`
4. Tip: Man sollte sich ein separates Verzeichnis zum Arbeiten mit ANSYS anlegen (`mkdir ansys`) und danach in dieses wechseln (`cd ansys`).
5. Starten von ANSYS im separaten Fenster, wobei davon ausgegangen wird, das ANSYS in der aktuellen Version 5.3 vorliegt: `xansys53 &`

## 3 Arbeiten unter ANSYS

### 3.1 Einrichten globaler Parameter

1. Menugesteuertes Arbeiten: `Interactive`.
2. Modellname: `Initial jobname: myProblem`
3. Grafikkonfiguration ermitteln lassen: `GUI configuration ...` anklicken und mit `OK` wieder verlassen.
4. Entwicklungsumgebung aufrufen: `Run`

### 3.2 Beschreibung des Modellproblems

Diese Ablaufbeschreibung richtet sich im Wesentlichen nach dem Beispiel 8 (Static Analysis of a 2-D Truss) des ANSYS Expanded Workbook Release 5.3.

1. Überschrift festlegen: `File - Change Title`.
2. grafische Anzeige der Statik: `Preferences - Structural will show`.

3. Elementtyp festlegen: Preprocessor - Element Type - Add/ Edit/ Delete: Structural Link, 2D spar.
4. Preprocessor - Real Constants - Cross-sectional area: 0.5.
5. Preprocessor - Material Props - Constant - Isotropic: EX=3e7, DENS=1, NUXY=0.3. Die Dichte, hier mit dem Beispielwert 1, muß angegeben werden, da sonst keine Massenmatrix erzeugt wird.
6. Statik beschreiben. z.B.
  - (a) Preprocessor - Modeling - Create - Nodes - In Active CS.
  - (b) PlotCtrls - Numbering - Node numbers On, Element numbers.
  - (c) Preprocessor - Create - Elements - Auto Numbered - Thru Nodes.
7. Substruktur definieren. Substrukturierung wird unter ANSYS als Kondensierung einer Gruppe finiter Elemente zu einem sogenannten Superelement verstanden, das durch eine Matrix representiert wird. Ein Superelement kann viele Freiheitsgrade besitzen, sogenannte *Master degrees of freedom* bzw. *Master DOF*. Für weitere Erläuterungen sei auf [4, Kapitel 17] verwiesen.  
 Will man die Kondensierung vermeiden, weil sie z. B. extern durchgeführt werden soll, so muß man alle Freiheitsgrade der Substruktur als Master DOFs deklarieren.  
 Möchte man mit Punktmassen arbeiten, so muß man LUMPM: Yes einstellen und erhält eine diagonale Massenmatrix. Bei der im allgemeinen realitätsnäheren Wahl verstreuter Maßen (LUMPM: No) wird die erzeugte Massenmatrix in der Regel keine Diagonalmatrix sein.
  - (a) Analysis Modus wählen: Solution - New Analysis - Substructuring.
  - (b) Ausgabeparameter bestimmen: Solution - Analysis Options - SEMATR: Stiffnes+Mass, SEPR: LoadVect+Matrix, LUMPM: Yes/No.
8. Masterfreiheitsgrade definieren: Solution - Master DOFs - User Selected - Define.
9. Modell sicherheitshalber abspeichern: File - Save.
10. Solution - Solve - Current LS

Hiermit ist eine binäre Datei *myProblem.sub* erzeugt worden.

### 3.3 Konvertieren in lesbares ASCII-Format.

Das Konvertieren einer binären Datei in lesbares ASCII-Format wird auch als *dumpen* bezeichnet.

1. schreib `finish` unter ANSYS Input, um Solution-Modus zu verlassen.
2. File - List - Binary Files - DUMP: All records, FORM: Entire record, FILEAUX2: *myProblem.sub*, OK.
3. DUMP-Command-Window: File - Save as - *myProblem.lis*.

## 4 Konvertieren von ASCII-Format in Matrixdarstellung

Die Datei *myProblem.lis* ist in einem lesbaren Format. Allerdings sind dort eine Menge redundanter Informationen, wenn man nur an der Steifigkeits- und der Massenmatrix interessiert ist. Ferner sind die Matrizen in einer sehr ungünstigen Form abgespeichert, sodaß sie nicht direkt für weitere Algorithmen verwendet werden können.

Um das Problem zu lösen, wurde das separate Programm *exansys* geschrieben, das eine Datei mit der Endung *sub* liest und die Steifigkeits- und Massenmatrix in separaten Dateien abspeichert. Für die Ausgabe werden zwei verschiedene Formate angeboten: Einmal das Standardformat mit  $n$  Zeilen und Spalten, wobei die einzelnen Einträge durch Tabulatoren voneinander getrennt sind, und zum zweiten das sparse Format, das die Zeilen, Spalten und Werte der Elemente angibt, die von Null verschieden sind.

Die Dokumentation des Programms wird automatisch angezeigt, wenn das Programm mit einer falschen Anzahl an Parametern aufgerufen wird, z. B. mit `exansys`. Programm und Quellcode sind diesem Dokument beigelegt.

## 5 Beispiel

Das Beispiel wurde entnommen aus [2, Seiten 57ff und 135ff]. Zusätzlich wurde noch eine Dichte von 1 angegeben, da das dort stehende Beispiel eine Betrachtung der Massen nicht vorsieht.

Gegeben ist ein Fachwerkstab mit konisch verlaufendem Querschnitt. Das Material hat einen Elastizitätsmodul von  $E = 3000\text{kN/cm}^2$ . Die Länge ist 100cm. Die Querschnitte sind links  $10\text{cm}^2$  und rechts  $1\text{cm}^2$ , dazwischen linear veränderlich. Als Funktion der Richtung kann man den Querschnitt durch  $A(x) = 10 - 0.09x$  für  $x \in [0, 100]$  ausdrücken. Der Stab soll mit vier Elementen diskretisiert werden.

Für die Elemente wird der gleiche Abstand gewählt. Somit befinden sich fünf Knoten an den Positionen  $x = 0, 25, 50, 75, 100$ . Für die durchschnittlichen Querschnitte der Elemente nimmt man das arithmetische Mittel der Querschnitte an den zugehörigen Knoten. Also gilt für die Knoten  $i = 1, \dots, 4$ :

$$A_i = \frac{A(i * 25) + A((i - 1) * 25)}{2}. \quad (1)$$

Explizit ermittelt man so die durchschnittlichen Querschnitte, wie sie in Tabelle 1 angegeben sind.

Figure 1 aus Seite 7 zeigt die Darstellung, wie sie unter ANSYS erscheint. Man beachte, daß der konische Querschnitt nicht dargestellt wird. Er geht aber in die Berechnung mit ein. Die Ursache liegt wohl in der Wahl des Finiten Elements.

Die ANSYS-Eingabedaten sind in Tabelle 2 zusammengestellt und können anstelle der graphischen interaktiven Oberfläche direkt eingelesen werden. Die dadurch erzeugte Datei *fachwerk.lis* ist im Abschnitt A abgedruckt.

Das Programm EXANSYS erzeugt dann mit dem Aufruf `exansys fachwerk` folgende Dateien:

fachwerk.k

Tabelle 1: Durchschnittlicher Querschnitt an den Elementen des Beispiels, berechnet nach (1).

Element	Knoten	Querschnitt
1	1, 2	8.875
2	2, 3	6.625
3	3, 4	4.375
4	4, 5	2.125

```

1065  0 -1065  0  0  0  0  0  0  0  0
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
-1065  0 1860  0 -795  0  0  0  0  0  0
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0  0 -795  0 1320  0 -525  0  0  0  0
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0  0  0  0 -525  0  780  0 -255  0  0
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0  0  0  0  0  0 -255  0  255  0  0
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0

```

fachwerk.m

```

110.938  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0  110.938  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0  0  193.75  0  0  0  0  0  0  0  0
0  0  0  193.75  0  0  0  0  0  0  0
0  0  0  0  137.5  0  0  0  0  0  0
0  0  0  0  0  137.5  0  0  0  0  0
0  0  0  0  0  0  81.25  0  0  0  0
0  0  0  0  0  0  0  81.25  0  0  0
0  0  0  0  0  0  0  0  26.5625  0  0
0  0  0  0  0  0  0  0  0  26.5625  0

```

Mit dem Aufruf `exansys fachwerk sparse.k sparse.m s` werden dagegen die Dateien `sparse.k` und `sparse.m` im sparse Format erzeugt, von denen nur die erste hier abgedruckt ist.

```

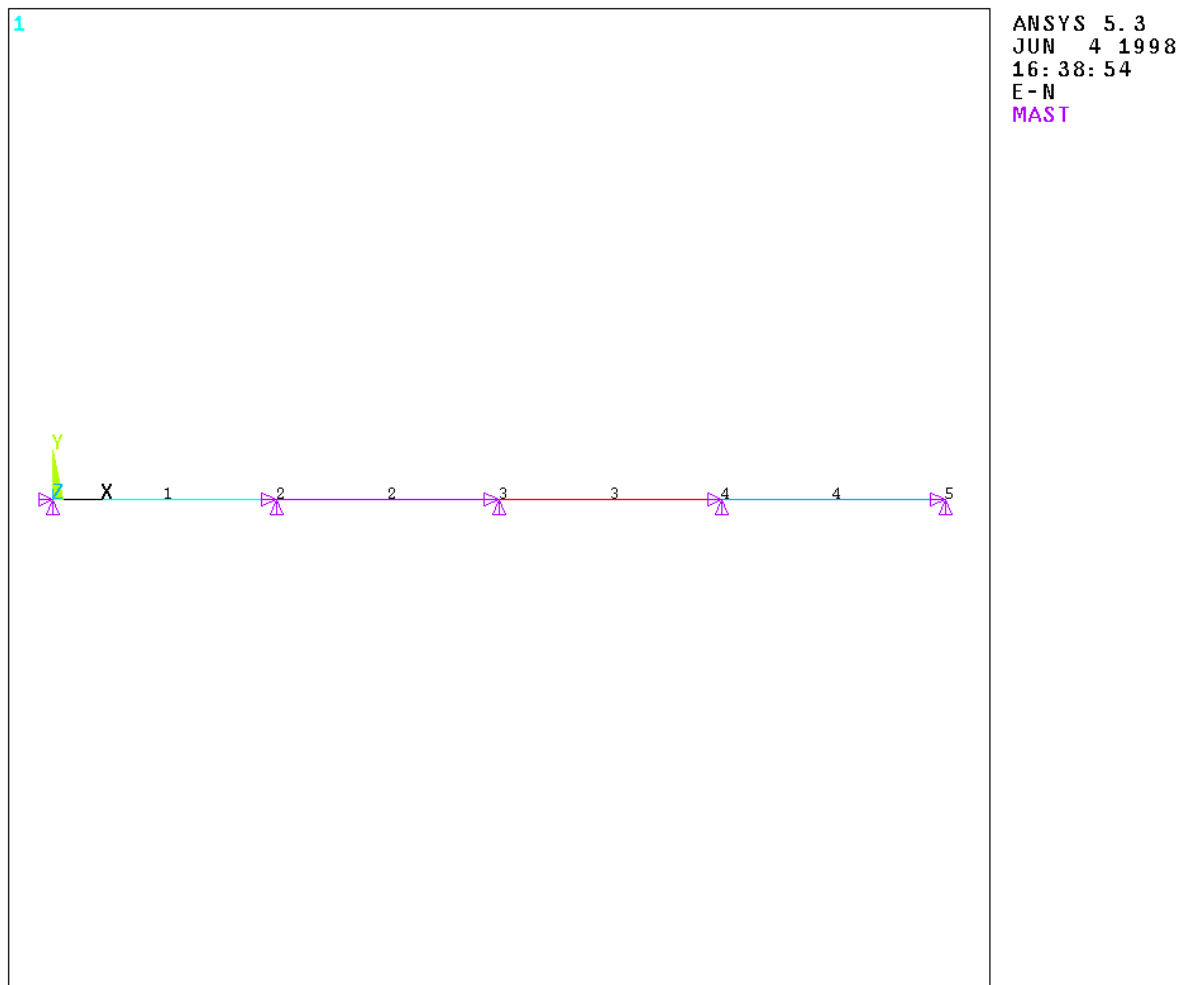
(1,1)= 1065
(1,3)= -1065
(3,1)= -1065
(3,3)= 1860
(3,5)= -795
(5,3)= -795
(5,5)= 1320
(5,7)= -525

```

Tabelle 2: ANSYS-Eingabedaten für das Beispiel.

Befehl	Erläuterung
/PREP7	Aufruf des Preprozessors
ET,1,1	Wahl der Elementart: 2-D Stabelement <i>LINK1</i>
MP,EX,1,3000	E-Modul
MP,DENS,1,1	Dichte
R,1,8.875	Festlegung der Querschnittsflächen
R,2,6.625	gemäß Tabelle 1
R,3,4.375	
R,4,2.125	
N,1,0,0	Knoten 1 im Punkt (0,0)
N,5,100,0	Knoten 5 im Punkt (100,0)
fill	Einfügen der Knoten 2, 3 und 4
real,1	Zuweisen der Querschnittsflächen
e,1,2	und Definition der Elemente
real,2	
e,2,3	
real,3	
e,3,4	
real,4	
e,4,5	
/pbc,all,1	Anzeige der Randbedingung
/pnum,elem,1	Numerierung der Elemente
/pnum,node,1	Numerierung der Knoten
eplot	Visualisierung
/solu	Aufruf des Solvers
ANTYPE,7	Analysetyp <i>Substructure</i> festlegen
SEOPT,fachwerk,2,1,0	Name und Inhalt von Matrix Datei
LUMPM,1	Approximation von Punktmassen
M,All,ALL, , ,	Definiere alle als Master DOF
SAVE	Modell abspeichern
SOLVE	Berechnen und abspeichern
fini	Beenden des Solvers
/AUX2	Aufruf des Hilfsprogramms
FORM,LONG	Daten vollständig ausgeben
FILEAUX2,fachwerk,sub,	Name der ASCII Datei
DUMP,ALL	Binär zu ASCII
	Gemäß Abschnitt 3.3 Nummer 3 unbedingt hier abspeichern!
FINI	Beenden des Hilfsprogramms
/EXIT	Beenden des ANSYS-Laufs

Abbildung 1: Graphische Darstellung unter ANSYS.



$$(7,5) = -525$$

$$(7,7) = 780$$

$$(7,9) = -255$$

$$(9,7) = -255$$

$$(9,9) = 255$$

## 6 Sonstiges

An der TUHH werden regelmäßig Kurse zum Arbeiten mit ANSYS angeboten. Die FEM Programme an der TUHH werden betreut von Frau Marlen Bredehöft. Sie hat auch die Handbücher. Aktuelle Informationen über ANSYS am Rechenzentrum der TUHH gibt es unter <http://www.tu-harburg.de/rzt/tuinfo/software/fem/ansys/>.

Für weitergehende Probleme wende man sich an die Hotline von CAD-FEM: Tel. 08092-7005-55. Außerdem gibt es Kontaktpersonen, die außerhalb der Universität bei Problemen weiterhelfen können: Herr C. Groth und Herr J. Nelz, CAD-FEM GmbH, Geschäftsstelle Hannover, Schmiedestraße 31, D-31303 Burgdorf, Tel. 05136-88092-0, Fax -893269.

Eine Lizenz über ein Jahr für einen Arbeitsbereich kostet derzeit DM 200,-. Das Lizenzjahr beginnt im August.

## A Beispieldatei

Die hier abgedruckte Datei *fachwerk.lis* ist nach dem im Abschnitt 5 erläuterten Beispiel von ANSYS erzeugt worden. Die Formatbeschreibung ist [3, Abschnitt *Format of the Substructure Matrices (.SUB) File*] zu entnehmen. Die Steifigkeits- und die Massenmatrix sind abwechselnd zeilenweise am Ende der Datei. Dahinter erscheint nur noch der Lastvektor.

```
DUMP OF FILE= fachwerk.sub
RECORDS      1 TO 1000000
```

```
RECORD=      1  LENGTH=   100  LOC=      0  KBF=   100      (HEADER RECORD)
SOURCE:  ANSYS PROGRAM
UNIT:    8      FILE FORMAT: External
RECORD LENGTH:  4096      FILE SIZE:      1123
CREATION TIME:  11:46:42
CREATION DATE:  05/27/98
RELEASE:   5.3      UPDATE:  071096
```

```
SYSTEM: HP 9000/700
PRODUCT NAME: FULL
JOBNAME: fachwerk
USER: matap
```

```
TITLE:
SUBTITLE:
```

```
UNITS: UNDEFINED
```

```
RECORD=      2  LENGTH=    50  LOC=    103  KBF=    50
      8          10          2          4          2
      5          11          5          5          0
      1          1          0          0          1
      0          0          1          10         1100
      0          640         156         103       1717658472
2003137131      0          0          538976288     538976288
      409         414         453         461         484
      492         567         627          0         427
      440          0          0          0          2
      0          538976288     538976288     538976288     538976288
```

```
RECORD=      3  LENGTH=   125  LOC=   156  KBF=    0
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
```





RECORD=	15	LENGTH=	6	LOC=	552	KBF=	0		
	100.000		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
			0.000000E+00						
RECORD=	16	LENGTH=	6	LOC=	567	KBF=	0		
	0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		25.0000		0.000000E+00
			0.000000E+00						
RECORD=	17	LENGTH=	6	LOC=	582	KBF=	0		
	25.0000		0.000000E+00		0.000000E+00		50.0000		0.000000E+00
			0.000000E+00						
RECORD=	18	LENGTH=	6	LOC=	597	KBF=	0		
	50.0000		0.000000E+00		0.000000E+00		75.0000		0.000000E+00
			0.000000E+00						
RECORD=	19	LENGTH=	6	LOC=	612	KBF=	0		
	75.0000		0.000000E+00		0.000000E+00		100.0000		0.000000E+00
			0.000000E+00						
RECORD=	20	LENGTH=	10	LOC=	627	KBF=	10		
	1		2		33		34		65
	66		97		98		129		130
RECORD=	21	LENGTH=	10	LOC=	640	KBF=	0		
	1065.00		0.000000E+00		-1065.00		0.000000E+00		0.000000E+00
			0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
RECORD=	22	LENGTH=	10	LOC=	663	KBF=	0		
	110.938		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
			0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
RECORD=	23	LENGTH=	10	LOC=	686	KBF=	0		
	0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
			0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
RECORD=	24	LENGTH=	10	LOC=	709	KBF=	0		
	0.000000E+00		110.938		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
			0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
RECORD=	25	LENGTH=	10	LOC=	732	KBF=	0		
	-1065.00		0.000000E+00		1860.00		0.000000E+00		-795.000
			0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
RECORD=	26	LENGTH=	10	LOC=	755	KBF=	0		
	0.000000E+00		0.000000E+00		193.750		0.000000E+00		0.000000E+00
			0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
RECORD=	27	LENGTH=	10	LOC=	778	KBF=	0		
	0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
			0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
RECORD=	28	LENGTH=	10	LOC=	801	KBF=	0		
	0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		193.750		0.000000E+00
			0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00
RECORD=	29	LENGTH=	10	LOC=	824	KBF=	0		
	0.000000E+00		0.000000E+00		-795.000		0.000000E+00		1320.00
			0.000000E+00		-525.000		0.000000E+00		0.000000E+00
RECORD=	30	LENGTH=	10	LOC=	847	KBF=	0		
	0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		0.000000E+00		137.500

```

0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
RECORD= 31 LENGTH= 10 LOC= 870 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
RECORD= 32 LENGTH= 10 LOC= 893 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
137.500 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
RECORD= 33 LENGTH= 10 LOC= 916 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 -525.000
0.000000E+00 780.000 0.000000E+00 -255.000 0.000000E+00
RECORD= 34 LENGTH= 10 LOC= 939 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
0.000000E+00 81.2500 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
RECORD= 35 LENGTH= 10 LOC= 962 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
RECORD= 36 LENGTH= 10 LOC= 985 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
0.000000E+00 0.000000E+00 81.2500 0.000000E+00 0.000000E+00
RECORD= 37 LENGTH= 10 LOC= 1008 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
0.000000E+00 -255.000 0.000000E+00 255.000 0.000000E+00
RECORD= 38 LENGTH= 10 LOC= 1031 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 26.5625 0.000000E+00
RECORD= 39 LENGTH= 10 LOC= 1054 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
RECORD= 40 LENGTH= 10 LOC= 1077 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 26.5625
RECORD= 41 LENGTH= 10 LOC= 1100 KBF= 0
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
END-OF-FILE ON FILE= fachwerk.sub

```

## Literatur

- [1] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [2] Günter Müller, Ingolf Rehfeld, and Willi Katheder. *FEM für Praktiker*, volume 441 of *Kontakt & Studium*. expert Verlag, Renningen-Malmsheim, zweite edition, 1994.
- [3] SAS IP, Inc. *ANSYS Programmer's Manual for Release 5.3*, dritte edition.
- [4] SAS IP, Inc. *Procedures Volume 1, ANSYS User's Manual, Revision 5.0*.