

0 Zum Inhalt

Das Praktikum “Qualitatives Verhalten dynamischer Systeme”, das vom Arbeitsbereich Mathematik der TUHH veranstaltet wird, setzt sich hauptsächlich zum Ziel, Sie mit der Theorie der dynamischen Systeme bis hin zur Verzweigungstheorie in Kontakt zu bringen. Sie werden zentrale Begriffe kennenlernen, mit denen jeder, der auf dem Gebiet der dynamischen Systeme arbeitet, sei er nun Mathematiker, Naturwissenschaftler oder forschender Ingenieur, regelmäßig umgeht, und mit Hilfe derer man sich üblicherweise über dynamische Systeme verständigt. Wir versuchen dabei, auf Formalismen weitgehend zu verzichten und trotzdem ausreichend präzise zu sein. Sehr vieles kann natürlich im Rahmen dieser Veranstaltung nur kurz angerissen werden. Es werden nur Sachverhalte wiedergegeben, die man mit angemessenem Aufwand überhaupt formulieren kann; auf Beweise wird im allgemeinen ganz verzichtet.

Das Stichwort “qualitatives Verhalten” besagt, daß man sich nur für gewisse quantitative Merkmale des Systems interessiert: Zum Beispiel ist man an der ungefähren Lage eines Gleichgewichtspunktes interessiert und an der Frage, ob sich der Systemzustand in Form einer gedämpften Schwingung dem Gleichgewichtspunkt nähert, aber nicht an der Frage, nach welcher Zeit die abklingende Schwingung sich dem Punkt bis auf eine vorgegebene Toleranz genähert hat. Diese Schwerpunktsetzung ist typisch für das Studium dynamischer Systeme: Man hat es eher mit geometrischen Begriffen und Strukturen zu tun als mit Zahlenkolonnen und Fehlerschranken. Wir ermutigen Sie an dieser Stelle ausdrücklich, diesen Umstand zu nutzen, indem Sie versuchen, anschauliche Vorstellungen von den präsentierten Begriffen zu bilden und auch intuitiv damit umzugehen. Daß Anschauung und Intuition in die Irre führen können, versteht sich von selbst, aber sie sind trotzdem die besten Führer durch dieses Praktikum.

Die Übungsaufgaben für das Praktikum sind zum größten Teil am Computer auszuführen: Sie sollen dazu dienen, die gelernten Begriffe an Beispielen einzuüben. Analytische Ansätze werden auf ein Minimum beschränkt; Sie werden zwar gelegentlich gebeten, zum Stift zu greifen, aber den größten Teil des Praktikums werden Sie in der Umgebung der numerischen Software `MATLAB` und `SIMULINK` verbringen. Das kommt der üblichen praktischen Vorgehensweise auch recht nahe; wenn man sich, wie in den meisten Anwendungen, mit vom Computer erzeugten *Indizien* für das Verhalten eines Systems begnügen kann, so wird man auf strenge *Beweise* verzichten. Außerdem sind ab einem gewissen Schwierigkeitsgrad analytische Ansätze in konkreten Problemen ohnehin zum Scheitern verurteilt.

Wir versuchen allerdings nicht, im Rahmen dieser Veranstaltung in die Numerik dynamischer Systeme einzuführen: Das Vorstellen und Diskutieren von numerischen Verfahren und Lösungsansätzen, vergleichende Analysen erreichbarer Software oder auch nur Faustregeln zur Einstufung eines Systems und der Wahl geeigneter Software müssen einer anderen Veranstaltung vorbehalten bleiben.

1 Definition, grundlegende Eigenschaften

Aus dem Grundstudium sind Ihnen *gewöhnliche Differentialgleichungen* geläufig, Gleichungen also, die zwischen gewissen Zustandsvariablen und ihren zeitlichen Ableitungen Beziehungen herstellen und die zur Bestimmung der Zustandsgrößen verwendet werden. Sie wissen, daß man Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen in vielen Fällen in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ schreiben kann. Bekanntlich spricht man dann von *expliziten Differentialgleichungen*. Wir wollen uns auf *autonome* Differentialgleichungen beschränken, also solche Gleichungen, in denen \mathbf{f} die Zeit nicht explizit enthält:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Man kann zwar argumentieren, daß theoretisch die Voraussetzung der Autonomie keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt, da man nämlich die Zeitabhängigkeit durch eine neue Hilfsvariable x_{n+1} und eine zusätzliche Gleichung $\dot{x}_{n+1} = 1$ eliminieren kann; man muß aber fairerweise zugeben, daß eine solche Vorgehensweise in der Praxis mit Problemen verbunden sein kann. Man kann dennoch festhalten, daß in vielen Modellierungen die Zeitunabhängigkeit der rechten Seite sich ganz von selbst einstellt.

Andererseits betrachten Sie bitte die Beschränkung des Definitionsbereichs auf eine Teilmenge des \mathbb{R}^n nicht als einen mathematischen Exzeß: Beschränkungen an die Zustandsgrößen ergeben sich in der Regel ganz natürlich, man denke nur an nichtnegative physikalische oder chemische Größen oder an krummlinige Koordinaten.

Der Begriff des (kontinuierlichen) dynamischen Systems nun zielt auf das qualitative Verhalten der Lösungen von (1) ab. Es gibt auch allgemeinere Fassungen des Begriffs; man kann zum Beispiel auch wohlgestellte parabolische oder hyperbolische Anfangs- oder Anfangsrandwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen (etwa Wärmeleitprobleme, Wellenausbreitungsprobleme) als dynamische Systeme auffassen. Ferner ist neben dem Begriff des kontinuierlichen dynamischen Systems auch der des *diskreten* dynamischen Systems gebräuchlich, wie es durch Differenzgleichungen definiert wird. Wir beschränken uns hier aber auf den Fall der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

Definition und Satz 1.1 *Es sei in (1) D eine offene Menge und \mathbf{f} stetig differenzierbar. Wir ergänzen die Differentialgleichung durch $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ zu einer Anfangswertaufgabe. Die Abbildung*

$$\Phi : t \mapsto \Phi(\mathbf{x}^0, t), \quad (2)$$

die jedem $\mathbf{x}^0 \in D$ für alle geeigneten t die Lösung der Anfangswertaufgabe zuordnet, ist wohldefiniert. Wir bezeichnen sie als den durch das Vektorfeld \mathbf{f} induzierten Fluß auf D bzw. das induzierte (autonome kontinuierliche) dynamische System.

BEWEIS. Man kann hierfür viele Standardwerke über gewöhnliche Differentialgleichungen zitieren, etwa [2, Kap. 2, Abschn. 10]. Möchte man auf der Grundlage des Skriptes [15] argumentieren, so kann man das wie folgt tun:

Die Glattheitsvoraussetzung an \mathbf{f} impliziert, daß \mathbf{f} auf jeder kompakten Teilmenge von D einer Lipschitz-Bedingung genügt ([15, Bsp 27.7]). Daher liefert der Satz von Picard und Lindelöf ([15, Satz 27.17]) die Existenz einer lokal eindeutigen Lösung der Anfangswertaufgabe. Da um *jeden* Punkt von D Lipschitz-Stetigkeit vorliegt (D ist als offen vorausgesetzt), bleibt die Lösung eindeutig, soweit sie (sowohl für steigende als auch für fallende t) fortgesetzt werden kann. Es ist damit Φ wohldefiniert. ■

Bemerkung 1.2 *Es läßt sich zeigen, daß die Lösung der Anfangswertaufgabe sich für alle Zeiten oder bis an den Rand von D fortsetzen läßt, vgl. den angegebenen Abschnitt in [2].*

Wir werden die Operatorschreibweise $\Phi(\mathbf{x}, t)$ nicht über Gebühr strapazieren. Insbesondere werden wir im Zusammenhang mit den Beispielen durchgehend die vertrautere Formulierung über Differentialgleichungen verwenden.

Bei der Untersuchung dynamischer Systeme konzentriert man sich typischerweise auf den sogenannten Phasenraum, den Raum der Zustandsvariablen. Man hält dort nach bestimmten Lösungstypen der Anfangswertaufgaben Ausschau und wird auch häufig bei der Visualisierung ein Diagramm der Ortskurve einem Plot über der Zeitskala vorziehen. Zunächst definieren wir in diesem Zusammenhang:

Definition 1.3 *Unter den Voraussetzungen von Definition und Satz 1.1 wird D als Phasenraum oder Zustandsraum des dynamischen Systems bezeichnet. (Von uns bevorzugte Bezeichnungen sind jeweils hervorgehoben.) Die Darstellung einer Lösungskurve von (1) im Phasenraum, also die Menge aller $\mathbf{x}(t)$ zu einer gegebenen Anfangswertaufgabe, nennt man Bahn, Orbit, Phasenkurve oder Trajektorie. Eine Teilmenge \tilde{D} von D heißt (positiv) flußinvariant, wenn Bahnen sie nicht verlassen, wenn also aus $\mathbf{x} \in \tilde{D}$ stets $\Phi(\mathbf{x}, t) \in \tilde{D}$ folgt für alle $t > 0$.*

Mit diesen Bezeichnungen formulieren wir nun die grundlegende Eigenschaft autonomer dynamischer Systeme, die die Analyse des Phasenraums überhaupt erst sinnvoll macht:

Satz 1.4 *Autonome dynamische Systeme sind translationsinvariant, d.h. es gilt stets $\Phi(\mathbf{x}, s+t) = \Phi(\Phi(\mathbf{x}, s), t)$. Daraus ergibt sich: Bei einem autonomen dynamischen System verläuft durch jeden Punkt des Phasenraums genau eine Phasenkurve. Das heißt insbesondere, daß Phasenkurven schon durch einen Punkt eindeutig festgelegt sind und daß sich zwei verschiedene Phasenkurven niemals schneiden (und nicht einmal “berühren”).*

Den BEWEIS überlassen wir Ihnen als Übung. Bitte überzeugen Sie sich davon, daß die behauptete Eigenschaft sich direkt aus der Autonomie der Differentialgleichung ergibt. ■

Um das Verhalten des Systems im gesamten Phasenraum darzustellen, müßte man eigentlich alle Phasenkurven zeichnen. Es ist zwar nicht möglich, das zu tun, aber man kann häufig eine repräsentative Auswahl von Kurven finden, die das qualitative Verhalten des Systems erkennen lassen.

Definition 1.5 Eine Sammlung von Phasenkurven bzw. Abschnitten von Phasenkurven nennen wir Phasenporträt eines dynamischen Systems, wenn sie das Aussehen aller Phasenkurven erkennen läßt. Ein Phasenporträt besteht in der Regel aus:

- Koordinatenachsen für den Phasenraum,
- Phasenkurven bzw. ausreichend langen Abschnitten von Phasenkurven besonders ausgezeichnete Lösungen (siehe weiter unten),
- Linien oder Flächen, die Bereiche unterschiedlichen Lösungsverhaltens trennen,
- repräsentativen (Abschnitten von) Phasenkurven in den jeweiligen Bereichen ähnlichen Lösungsverhaltens.

Phasenkurven sollten mit Pfeilen versehen sein, die die Richtung markieren, welche zu wachsendem t gehört.

Beispiel 1.6 Abbildung 1 zeigt ein Phasenporträt des Systems aus Beispiel 2.8 für $\lambda = 0.7$. Die gepunkteten Kurven sind repräsentativ für ihre jeweiligen Bereiche im Phasenraum. Die übrigen Bildelemente bezeichnen besonders ausgezeichnete Orbits. Wir kommen später noch auf dieses Bild zurück.

Es liegt in der Natur der Sache (und im Umfang dieser Veranstaltung) begründet, daß wir bei der letzten Definition etwas vage bleiben mußten. Sie werden jedoch im folgenden eine intuitive Vorstellung von Phasenporträts gewinnen. Da wir uns hier um die qualitative Analyse dynamischer Systeme kümmern wollen, definieren wir noch, wann wir zwei dynamische Systeme als qualitativ gleich betrachten wollen.

Definition 1.7 Wir bezeichnen zwei dynamische Systeme bzw. ihre Phasenporträts als topologisch äquivalent, wenn es eine stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung zwischen ihren Phasenräumen gibt, die aus jedem Phasenporträt des einen Systems ein Phasenporträt des anderen Systems macht, wobei der Orientierungssinn der Phasenkurven (also die Pfeilrichtung) erhalten bleiben muß. Man kann dann also durch Koordinatenwechsel im Phasenraum die Phasenporträts der beiden Systeme ineinander überführen. Wir sprechen von lokaler topologischer Äquivalenz in zwei Punkten der Phasenräume, wenn das zumindest für geeignete Umgebungen dieser Punkte (also die darauf beschränkten Phasenporträts) gilt.

Beispiel 1.8 Die Abbildungen 3 – 6 aus Abschnitt 5 stellen topologisch äquivalente Phasenporträts dar, die Abbildungen 3 und 8 dagegen beispielsweise nicht.

Damit können wir schließlich diejenigen Phasenporträts benennen, die für die Praxis am vertrauenswürdigsten sind: Da beim Aufstellen eines mathematischen Modells für eine technisch–naturwissenschaftliche Fragestellung Kompromisse eingegangen werden und da weiter die Simulation auf Computern Fehler produzieren kann, dürfen wir strenggenommen

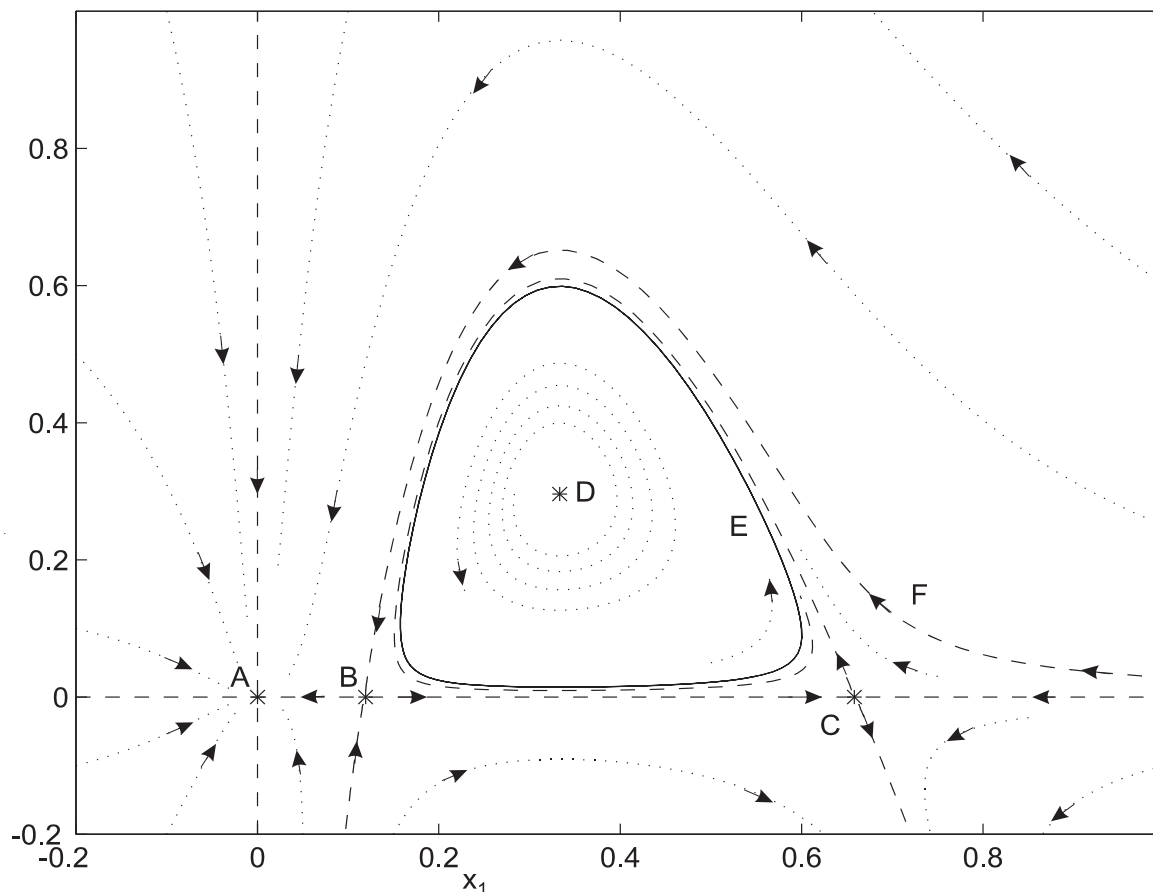


Abbildung 1: Phasenporträt zu Beispiel 2.8

nur solchen Phasenporträts trauen, die sich durch kleine Änderungen des Vektorfeldes f nicht signifikant ändern. Das veranlaßt uns zu folgender Definition:

Definition 1.9 *Wir nennen eines dynamisches System strukturell stabil, wenn sich bei hinreichend kleinen (stetig differenzierbaren) Störungen des Vektorfeldes nur wieder äquivalente Phasenporträts ergeben.*

In Definition 3.5 folgt eine lokale Variante dieses Begriffes, die andeutungsweise in Abschnitt 4 erweitert wird. Auf eine mögliche Modifikation des Begriffes werden wir in Abschnitt 5 hinweisen.

2 Unsere Beispiele

Unsere Beispiele für dieses Praktikum sind alle klein und handlich. Das liegt natürlich daran, daß wir unseren Blick aufs wesentliche konzentrieren wollen, und das heißt in diesem Zusammenhang auf typische Phänomene, die man meist schon an kleinen (geschickt eingerichteten)

Prototypen dynamischer Systeme beobachten kann. Außerdem sind wir daran interessiert, den rechnerischen Aufwand für diesen Kurs klein zu halten.

In der Praxis sieht man sich freilich mit größeren (und komplexeren) dynamischen Systemen konfrontiert. Diese Systeme werden analytisch kaum zu bewältigen sein, man wird sie von vornherein mit einer geeigneten Software untersuchen. Wie so oft kann aber auch hier die Notwendigkeit gewisser Vorkenntnisse über das vorliegende System (z.B. die ungefähre Lage eines gesuchten Gleichgewichtspunktes) und die Nützlichkeit einer geschickten Modellierung (z.B. geeignete Koordinaten, Fortlassen unwesentlicher Terme) kaum überbetont werden.

Bedenken Sie, daß auch die hier vorgestellten Beispiele ihre Handlichkeit nur der geschickten Vereinfachung komplizierter Zusammenhänge verdanken! Wie weit die Vereinfachung eines Modells sich rechtfertigen läßt, hängt natürlich letzten Endes auch von der Problemstellung ab.

Beispiel 2.1 (gedämpfte harmonische Schwingung) *Ein Standardbeispiel ist die Schwingungsgleichung*

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Sie kann zum Beispiel die mechanischen Schwingungen einer Masse an einer Feder bei kleinen Auslenkungen beschreiben oder die Schwingungen eines Pendels bei kleinen Auslenkungen oder das Spannungsverhalten in einem elektrischen Schwingkreis. Um diese Gleichung unserem Formalismus zugänglich zu machen, müssen wir sie in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung transformieren. Das geschieht häufig, indem man eine geschwindigkeitsproportionale Größe als neue Zustandsgröße einführt. Man erhält dann (mit $x_1 := x$, $x_2 := \frac{1}{c}\dot{x}$)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= cx_2, \\ \dot{x}_2 &= -2\delta x_2 - \frac{1}{c}\omega_0^2 x_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Im Falle der Feder werden x_1 und x_2 die Auslenkung aus der Ruhelage bzw. die darauf bezogene Geschwindigkeit sein, im Falle des Pendels der Winkel zur senkrechten Lage und die Winkelgeschwindigkeit, beim elektrischen Schwingkreis etwa die Spannung am Kondensator und der Strom. Die Konstanten sind dafür natürlich geeignet mit Leben zu füllen.

Als Phasenraum wählt man der Bequemlichkeit halber \mathbb{R}^2 , wobei man aber im Auge behalten muß, daß das System für große Werte von x_1 oder x_2 sicher keinen physikalischen Zustand mehr beschreibt.

Wie Sie im Grundstudium gesehen haben, betrachtet man allgemeiner Systeme von linearen Differentialgleichungen, also

Beispiel 2.2 (lineares System) *Dies ist ganz allgemein das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5)$$

für eine reelle (n, n) -Matrix \mathbf{A} . (Man kann auch komplexe Matrizen zulassen, was wir aber hier nicht problematisieren wollen.) Der Phasenraum ist \mathbb{R}^n . Auch im allgemeinen linearen System ist man hauptsächlich an "kleinen Auslenkungen" interessiert, also am Verhalten von Lösungen in einer Umgebung von $\{\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

Die große praktische Bedeutung linearer Systeme werden Sie nicht bezweifeln, denn neben Beispiel 2.1 haben Sie vermutlich schon viele weitere Modelle kennengelernt, die auf lineare Systeme führen. Zusätzliches Gewicht gewinnen lineare Systeme, wenn man sich an das Prinzip der *Linearisierung* erinnert. Auch bei dynamischen Systemen ist es oft hilfreich, ein nichtlineares System durch ein lineares zu ersetzen, das die Eigenschaften des nichtlinearen Systems in der Nähe eines vorgegebenen Punktes möglichst gut repräsentiert. Zur Analyse eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes $\hat{\mathbf{x}}$ reicht zum Beispiel die Kenntnis von $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ schon hin; das System verhält sich lokal wie das *linearisierte System*, das durch das Vektorfeld $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) := D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ gegeben ist (vgl. die Sätze 3.4 und 5.2). (Eigentlich sind das Erkenntnisse, die Ihnen auch das Grundstudium schon vermittelt haben sollte, vgl. im Skript [15] Abschnitt 29.2.) Letztlich sind die meisten linearen Systeme, die Sie kennen, durch eine Art von Linearisierung entstanden; vergleichen Sie zur Illustration das mathematische Pendel aus dem folgenden Beispiel 2.3 mit der linearisierten Variante aus Beispiel 2.1!

Beispiel 2.3 (mathematisches Pendel) Für größere Auslenkungen ist in der Gleichung (3) für das Pendel x durch $\sin(x)$ zu ersetzen, denn die Rückstellkraft ist in Wirklichkeit proportional zur Tangentialkomponente der Erdschwerkraft, also, da x der Winkel der Auslenkung ist, zu $\sin(x)$. Man erhält so das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2\delta x_2 - \omega_0^2 \sin(x_1).\end{aligned}\tag{6}$$

Ein beliebtes Beispiel aus der sog. Biomathematik, das die Populationsdynamik zweier Spezies modellieren soll, ist das folgende *Räuber-Beute-Modell*:

Beispiel 2.4 (Lotka-Volterra-Gleichungen) Wir nehmen an, wir haben eine Population von Pflanzenfressern (die "Beute"), deren Anzahl proportional zur Variablen x_1 sei, und eine Population von Fleischfressern (die "Räuber"), die sich von den Pflanzenfressern ernähren und deren Anzahl proportional zu x_2 sei. Vereinfachend modellieren wir beide Zahlen als kontinuierliche Größen. Wir nehmen an, daß über ein kurzes Zeitintervall in Abwesenheit von Räubern die Beutepopulation proportional zu ihrer jeweiligen Größe zunehme. (Jedes Beutetier hat eine feste durchschnittliche Anzahl von Nachkommen.) Umgekehrt schrumpfe in Abwesenheit von Beute die Räuberpopulation proportional zu ihrer aktuellen Größe. (Die Sterberate überwiegt dann die Geburtenrate). Zur Interaktion beider Spezies nehmen wir an, daß die Beutepopulation durch die Räuber in dem Maße dezimiert werde, in dem sich Räuber und Beute zufällig begegnen, daß sie also proportional zu $x_1 x_2$ schrumpfe. Nach einer ähnlichen Gesetzmäßigkeit nehme dagegen die Population der Räuber zu. Wir erhalten damit Gleichungen vom Typ

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 - \beta x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\gamma x_2 + \delta x_1 x_2\end{aligned}\tag{7}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Für Literaturhinweise konsultiere man [8, Abschn. 2.1].

Als Phasenraum wird man in diesem Beispiel aus naheliegenden Gründen von vornherein nur $[0, \infty) \times [0, \infty)$ zulassen.

Beispiel 2.5 (von Mises–Stabwerk) Man stelle sich das von Mises–Stabwerk der Abbildung 2 aus zwei gleichartigen flexiblen Stäben (bzw. Federn) zusammengesetzt vor. An der Verbindungsstelle greift eine lotrechte Kraft λ an. Unter Annahme einer geschwindigkeitsproportionalen Reibung lassen sich die Schwingungen des Stabwerks durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} = k \tan x \cos \alpha_0 - k \sin x + \lambda \quad (8)$$

beschreiben, wobei ε die Reibungskonstante, k die Federkonstante und α_0 der Auslenkungswinkel für $\lambda = 0$ ist (siehe [14]). Diese Gleichung kann man wie oben in ein System erster Ordnung überführen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon x_1 + k \tan x_1 \cos \alpha_0 - k \sin x_1 + \lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

Man vergleiche auch Beispiel 23.8 im Skript [15]. Dort wird zwar das Stabwerk nicht dynamisch modelliert, aber die auftretenden Gleichgewichtspunkte (Definition folgt) sind dieselben.

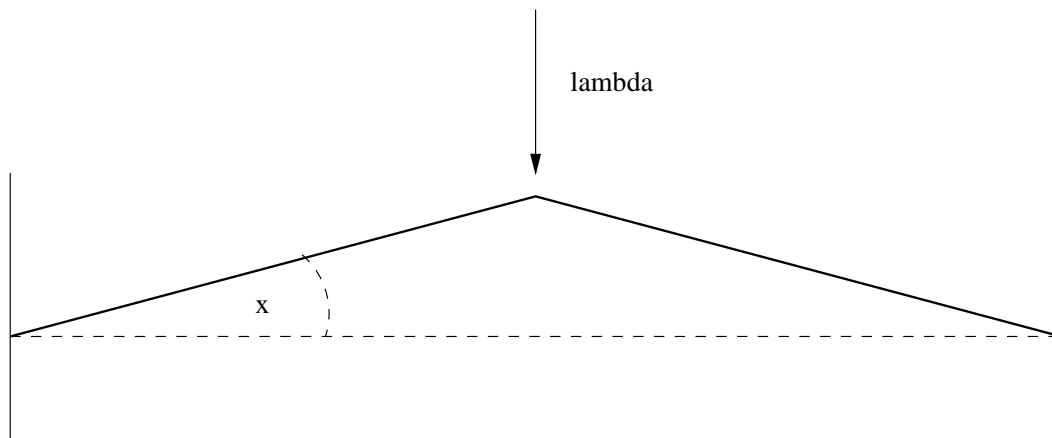


Abbildung 2: von Mises–Stabwerk

Beispiel 2.6 (van der Pol’sche Gleichung) Die berühmte van der Pol’sche Gleichung der Elektrotechnik beschreibt einen elektrischen Schwingkreis mit einer Triodenröhre mit stromabhängigem Widerstand (siehe etwa [7]):

$$\ddot{x} + \gamma(3x^2 - \lambda)\dot{x} + x = 0. \quad (10)$$

Sie wird in der Literatur gern in ein System transformiert, indem sie über t integriert wird: Setzt man $x_1 := x$ und $x_2 := -\int^t x(\tau) d\tau$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \gamma(x_1^3 - \lambda x_1), \\ \dot{x}_2 &= -x_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Man nennt (11) auch die Liénard’sche Darstellung der van der Pol’schen Gleichung.

Beispiel 2.7 (Lorenz–Gleichungen) Die ebenfalls berühmten Lorenz–Gleichungen entstammen einem Modell zum Studium von Fluidkonvektion in einer zweidimensionalen, von unten geheizten Schicht. Sie lauten

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2,\end{aligned}\tag{12}$$

wobei die Parameter σ (die Prandtlsche Zahl), ρ (der Rayleigh–Koeffizient) und β (ein Längenverhältnis) positiv sind (siehe [9]).

Das folgende dynamische System entstammt der Demo pp2 des Softwarepakets AUTO, siehe [6]. Der Autor, Eusebius Doedel, bietet eine Deutung als Räuber–Beute–Modell an.

Beispiel 2.8 (Räuber–Beute–Modell nach Doedel) Das System lautet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1(1 - x_1) - x_1 x_2 - \lambda(1 - \exp(-5x_1)), \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + 3x_1 x_2.\end{aligned}\tag{13}$$

Man kann sich hierbei x_1 als Beutefische und x_2 als Haie vorstellen, wobei der Term $\lambda(1 - \exp(-5x_1))$ Fischfang mit einer Fischfangquote λ repräsentiert. Die übrigen Terme sind im wesentlichen wie im Lotka–Volterra–Modell zu interpretieren. Neu ist der Term $-3x_1^2$ in der ersten Gleichung, der dem Umstand Rechnung trägt, daß die Fischpopulation mit begrenzten Ressourcen leben muß und sich nicht beliebig vergrößern kann. Bei $x_1 = 1$ ist eine Sättigung erreicht.

3 Gleichgewichtspunkte

Der einfachste und wichtigste spezielle Lösungstyp bei dynamischen Systemen ist der Gleichgewichtspunkt. Wie der Name schon sagt, repräsentieren Gleichgewichtspunkte Ruhelagen oder Balancezustände des Systems. Die (dynamische) Stabilität dieser Lösungen ist von großer Bedeutung, denn sie entscheidet, ob eine Ruhelage sich (physikalisch, chemisch etc.) überhaupt *beobachten* läßt oder ob sie nur “auf dem Papier” existiert. (Machen Sie sich das ggf. klar!) Ein Gleichgewichtspunkt kann je nach Modell natürlich für etwas anderes stehen als für Bewegungslosigkeit, obwohl das in einfachen mechanischen Modellen oft der Fall ist. Wenn Ihr Phasenraum z.B. Fourier–Koeffizienten in einem Schwingungssystem darstellt, dann entspricht ein Gleichgewichtspunkt einer periodischen Schwingung. Bedenken Sie, daß sich alle geometrisch motivierten Bezeichnungen auch im folgenden stets zwangsläufig nur an der Geometrie der Modellgleichungen orientieren!

Definition 3.1 Ein Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ heißt Gleichgewichtspunkt oder stationärer Punkt des von \mathbf{f} induzierten dynamischen Systems, wenn $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ gilt, also die Bahn durch $\hat{\mathbf{x}}$ mit $\{\hat{\mathbf{x}}\}$ identisch ist. Die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}$, also $\mathbf{x}(t) \equiv \hat{\mathbf{x}}$, wird auch als stationäre Lösung bezeichnet.

Wir definieren nun die dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten wie im Grundstudium die Stabilität stationärer Lösungen (vgl. [15, Kapitel 29]).

Definition 3.2 *Der Gleichgewichtspunkt $\hat{\mathbf{x}}$ des dynamischen Systems heißt*

- (dynamisch) stabil, wenn es für jede (noch so kleine) Umgebung $U_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}})$ eine (möglicherweise kleinere) Umgebung $U_\delta(\hat{\mathbf{x}})$ von $\hat{\mathbf{x}}$ gibt, so daß in $U_\delta(\hat{\mathbf{x}})$ startende Bahnen für wachsende t nicht aus $U_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}})$ austreten. Dies sichert, daß bei einer kleinen Störung des Anfangswertes $\hat{\mathbf{x}}$ auch die Bahn nahe bei $\hat{\mathbf{x}}$ bleiben wird.
- attraktiv, wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}})$ von $\hat{\mathbf{x}}$ gibt, so daß alle in $U_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}})$ startenden Bahnen für $t \rightarrow \infty$ gegen $\hat{\mathbf{x}}$ streben. Der Gleichgewichtspunkt “zieht” dann also aus einer gewissen Umgebung alle Bahnen an.
- asymptotisch stabil, wenn er stabil und attraktiv ist,
- instabil, wenn er nicht stabil ist. Das heißt, es gibt eine Umgebung $U_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}})$ von $\hat{\mathbf{x}}$, über die man sagen kann, daß sie von gewissen beliebig nahe bei $\hat{\mathbf{x}}$ startenden Bahnen verlassen wird. Jede noch so kleine Störung des Startwertes $\hat{\mathbf{x}}$ kann dann also eine Störung der Lösung von mindestens der Größe ε verursachen.

Bemerkung 3.3 *Es ist wichtig festzuhalten, daß ein attraktiver Gleichgewichtspunkt nicht auch stabil sein muß. Man wird dies zwar meistens in der Praxis beobachten, aber es lassen sich Gegenbeispiele angeben. Man ziehe etwa [15, Bsp. 29.3] oder [9, figure 1.6.3] zurate.*

Das bekannteste Kriterium zur Stabilitätsanalyse für Gleichgewichtspunkte verwendet das Spektrum der Linearisierung:

Satz 3.4 *Sei $\hat{\mathbf{x}}$ ein Gleichgewichtspunkt des von \mathbf{f} induzierten dynamischen Systems. Besitzt die Jacobimatrix $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ nur Eigenwerte mit negativem Realteil, so ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil, besitzt sie hingegen einen Eigenwert mit positivem Realteil, so ist der Gleichgewichtspunkt instabil.*

Man kann aus den Eigenwerten von $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ sogar Rückschlüsse auf die lokalen Phasenporträts eines Systems ziehen, vgl. Satz 5.1 und Satz 5.2. Das folgt aus der Tatsache, daß sogenannte *hyperbolische* Gleichgewichtspunkte im unten präzisierten Sinne strukturell stabil sind und nichtlineare Systeme sich lokal als leicht gestörte lineare Systeme auffassen lassen. (Letzteres ist Ihnen bekannt! Es ist damit nichts anderes gemeint, als daß man

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \varepsilon D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{h} + O(\varepsilon^2) \quad (14)$$

schreiben kann.)

Wenn man sich mit der Frage befaßt, was bei kleinen Störungen des Systems mit einzelnen Gleichgewichtspunkten geschieht, dann ist der Begriff der strukturellen Stabilität aus Abschnitt 1 zu streng. Man benötigt wie schon bei der topologischen Äquivalenz eine lokale Variante:

Definition 3.5 Wir nennen einen Gleichgewichtspunkt strukturell stabil bzw. das dynamische System lokal strukturell stabil im Gleichgewichtspunkt, wenn es bei geringer (stetig differenzierbarer) Störung des Systems wieder einen Gleichgewichtspunkt des gestörten Systems in der Nähe des ursprünglichen Gleichgewichtspunktes gibt, so daß die Flüsse nahe den beiden Punkten lokal topologisch äquivalent sind.

Damit können wir nun formulieren:

Definition und Satz 3.6 Wenn $Df(\hat{x})$ keine Eigenwerte mit verschwindendem Realteil besitzt, heißt der Gleichgewichtspunkt hyperbolisch. Hyperbolische Gleichgewichtspunkte sind strukturell stabil, nicht-hyperbolische nicht.

Um sich die Aussage klar zu machen, daß nicht-hyperbolische Gleichgewichtspunkte nicht strukturell stabil sind, kehre man die entsprechende Definition um: Bei nicht-hyperbolischen Gleichgewichtspunkten kann man mit geeigneten beliebig kleinen Störungen ein dynamisches System erzeugen, das keinen im obigen Sinne äquivalenten Gleichgewichtspunkt nahe dem ursprünglichen Punkt mehr besitzt.

Zum BEWEIS siehe [12, §16] oder [4, Abschn. 3.2]. Überlegen Sie sich, daß die Aussage über die Existenz eines “gestörten” Gleichgewichtspunktes direkt aus dem Satz über implizite Funktionen ([15, Satz 23.9]) folgt. ■

Ein weiteres, allgemeineres Hilfsmittel zur Prüfung der Stabilität, das häufig auch bei nicht-hyperbolischen Punkten angewendet werden kann, ist die sogenannte *Liapunov-Funktion*, vgl. das Skript [15] oder die Bücher [3] und [2].

4 periodische Orbits, Limesmengen, Attraktoren

Der nach dem Gleichgewichtspunkt einfachste und wichtigste spezielle Lösungstyp ist der *periodische Orbit*. Er repräsentiert periodische Schwingungen des zugrundeliegenden Systems. Auch hier läßt sich sinnvoll zwischen stabilen und instabilen Lösungen unterscheiden, und die stabilen werden die beobachtbaren sein. Die Definition der Stabilität ist eine Verallgemeinerung des Stabilitätsbegriffs für Gleichgewichtspunkte; wir gehen gleich einen Schritt weiter und definieren den allgemeinen Begriff der *anziehenden Mengen* im Phasenraum, wobei der asymptotisch stabile periodische Orbit (s.u.) als Spezialfall erfaßt ist. Wer zunächst den Begriff der Stabilität einer Lösung nachlesen möchte, sei auf Kapitel 29 des Skripts [15] verwiesen oder auf eines der zitierten Standardwerke, etwa [10]. Zur Stabilitätsanalyse bei periodischen Orbits gibt es wieder spezielle Techniken, deren bekannteste wohl der sogenannte *Poincaré-Schnitt* ist. Wir gehen darauf nicht ein, aber wer sich gezielt mit periodischen Orbits befassen will, sollte sich auch mit solchen Techniken bekannt machen.

Definition und Satz 4.1 *Eine Bahn heißt periodischer Orbit oder geschlossene Bahn eines dynamischen Systems, wenn sie zu einer periodischen Lösung des Differentialgleichungssystems gehört. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Bahn aus mehr als einem Punkt besteht und eine geschlossene Kurve darstellt.*

Der BEWEIS der letzten Behauptung erschöpft sich wieder in der Berücksichtigung der Autonomie des Systems. Ist die Bahn eine geschlossene Kurve, so gibt es ein \mathbf{x} auf der Bahn und ein $T > 0$, so daß $\Phi(\mathbf{x}, T) = \mathbf{x}$. Ist $\tilde{\mathbf{x}}$ ein weiterer Punkt auf der Bahn, so gibt es ein \tilde{T} mit $\Phi(\mathbf{x}, \tilde{T}) = \tilde{\mathbf{x}}$. Nun ergibt die Translationsinvarianz

$$\Phi(\tilde{\mathbf{x}}, T) = \Phi(\Phi(\mathbf{x}, \tilde{T}), T) = \Phi(\mathbf{x}, \tilde{T} + T) = \Phi(\Phi(\mathbf{x}, T), \tilde{T}) = \Phi(\mathbf{x}, \tilde{T}) = \tilde{\mathbf{x}}, \quad (15)$$

also ist die zugehörige Lösung periodisch. Wird umgekehrt die Periodizität vorausgesetzt, so ist es klar, daß die Bahn eine geschlossene Kurve sein muß. ■

In der Literatur findet man häufig geschlossene Kurven, die Gleichgewichtspunkte enthalten. Es handelt sich aber hierbei streng genommen nicht um einzelne Bahnen, sondern um den Zusammenschluß mehrerer Bahnen. (Warum muß das so sein?) Trotzdem wird traditionell von Orbits gesprochen. Enthält solch eine Kurve genau einen Gleichgewichtspunkt, so spricht man von einem *homoklinischen Orbit*, anderenfalls von einem *heteroklinischen Orbit*. Beides sind Phänomene, die man nicht in strukturell stabilen Systemen antrifft. (Vgl. aber die Bemerkungen zur strukturellen Stabilität in Abschnitt 5.)

Es gibt weitere spezielle Lösungstypen in dynamischen Systemen, z.B. quasiperiodische Orbits, die durch die Überlagerung von periodischen Schwingungen mit nicht-rationalem Verhältnis der Frequenzen entstehen. Wir gehen aber auf diese Phänomene nicht mehr gesondert ein, zum einen, weil unsere Zeit begrenzt ist, zum anderen aber auch, weil diese Lösungstypen teils erst für recht spezielle Fragestellungen interessant werden und teils von rein akademischem Interesse sind.

Stattdessen gehen wir nun über zu der allgemeineren Definition des *Attraktors*. Dieser Begriff, der asymptotisch stabile Gleichgewichtspunkte und periodische Orbits umfaßt, bezeichnet sehr abstrakt eine Menge von Punkten, die “im wesentlichen” aus einem Orbit besteht und aus einer vollen Umgebung Lösungsbahnen anzieht. Die technisch etwas umständliche Definition des Attraktors mag Ihnen unnötig mühsam erscheinen, hat sich jedoch im jahrzehntelangen Umgang mit dynamischen Systemen als mathematisch zweckmäßig erwiesen. Fühlen Sie sich bitte nicht entmutigt, wenn Sie sich nur eine ungefähre Vorstellung von den Implikationen des Begriffs machen können; mehr ist hier auch nicht verlangt. Zunächst definieren wir die Limesmenge eines Punktes:

Definition 4.2 *In einem dynamischen System ist die Limesmenge (zur Unterscheidung von der sog. α -Limesmenge auch ω -Limesmenge) des Punktes \mathbf{x} die Menge aller Punkte, denen die Bahn durch \mathbf{x} für unbegrenzt wachsendes t beliebig oft beliebig nahe kommt, also die Menge aller Häufungspunkte für alle Folgen $\{\mathbf{x}_n\}$ der Form $\{\mathbf{x}_n = \Phi(\mathbf{x}, t_n)\}$ mit $t_n \rightarrow \infty$. Erreicht die Bahn in endlicher Zeit den Rand des Definitionsbereiches, so definieren wir in Übereinstimmung damit die Limesmenge als leer.*

Dieser Begriff ist auch unabhängig von dem des Attraktors von Interesse: Er beschreibt den asymptotischen Zustand einer Lösung für $t \rightarrow \infty$. Es leuchtet vermutlich intuitiv ein, daß Bahnen, die in einer Limesmenge starten, diese auch nicht verlassen. Tatsächlich läßt sich beweisen:

Satz 4.3 *Für jedes \mathbf{x} ist die Limesmenge abgeschlossen und (positiv) flußinvariant.*

Wir müssen nun für die Definition des Attraktors zunächst einige topologische Begriffe bereitstellen. Der eine oder andere mag ihnen bekannt vorkommen; die meisten sind simple Verallgemeinerungen von Begriffen der mathematischen Grundausbildung, vgl. im Skript [15] den Abschnitt 22.1.

Definition 4.4 *In Analogie zu Punkten bezeichnen wir U als Umgebung einer Menge $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$, wenn \tilde{D} im Inneren von U enthalten ist (also $\tilde{D} \subset U$, aber kein Punkt von \tilde{D} liegt auf dem Rand von U). Als ε -Umgebung einer Menge \tilde{D} definieren wir die Menge aller Punkte, deren Abstand zu \tilde{D} höchstens ε beträgt. Ist \tilde{D} eine Kurve, so spricht man auch anschaulicher von einem ε -Schlauch. Eine Kurve $\mathbf{x}(t)$ konvergiert gegen \tilde{D} , wenn für $t \rightarrow \infty$ der Abstand von $\mathbf{x}(t)$ zu \tilde{D} gegen 0 konvergiert. Eine Menge \hat{D} liegt dicht in \tilde{D} , wenn sich beliebig nahe an jedem Element von \tilde{D} auch stets ein Element von \hat{D} findet.*

Auch für Limesmengen kann man die Begriffe der asymptotischen Stabilität und der strukturellen Stabilität einführen, indem man im wesentlichen den Begriff der Umgebung eines Punktes durch den Begriff der Umgebung einer Menge ersetzt. Es ergeben sich dabei bemerkenswerte Analogien zwischen periodischen Orbits und Gleichgewichtspunkten: Zum Beispiel gibt es analog den hyperbolischen Gleichgewichtspunkten eine große Klasse von periodischen Orbits, deren Stabilität sich ebenfalls über die Eigenwerte einer geeigneten Linearisierung analysieren läßt und die auch strukturell stabil sind. Wir belassen es hier bei der Andeutung und bringen wie angekündigt:

Definition 4.5 *Eine abgeschlossene und flußinvariante Teilmenge \tilde{D} des Definitionsbereichs heißt anziehende Menge, wenn sie eine ihrerseits flußinvariante Umgebung U besitzt, so daß alle Bahnen in U schließlich gegen \tilde{D} konvergieren. Eine anziehende Menge heißt Attraktor, wenn eine Bahn in ihr dicht liegt. Die Menge aller Punkte, für die die zugehörigen Bahnen gegen \tilde{D} konvergieren, heißt Einzugsbereich des Attraktors. Dies ist offensichtlich eine Obermenge der obigen Umgebung U .*

Die Definition des Attraktors ist offensichtlich auf Limesmengen ausgelegt. Man denkt dabei an Limesmengen, denen sich nicht nur die Bahn durch *einen* Punkt \mathbf{x} nähert, sondern *alle* Bahnen aus einer vollen Umgebung. Typische Attraktoren sind asymptotisch stabile hyperbolische Gleichgewichtspunkte sowie anziehende periodische Orbits, die in bezug auf die Bahnen in ihrem Einzugsbereich auch *Grenzyklen* genannt werden. Die naheliegende Vermutung, daß es keine anderen Attraktoren gebe, trifft allerdings im allgemeinen nur auf ebene Systeme zu (vgl. Abschnitt 5). In Aufgabe 5 werden Sie einen Attraktor kennenlernen, der weder Gleichgewichtspunkt noch periodischer Orbit ist.

Beispiel 4.6 *Der E bezeichnete Orbit in Abbildung 1 ist ein asymptotisch stabiler periodischer Orbit, also ein Attraktor. Der Einzugsbereich dieses Orbits ist die Fläche zwischen der x_1 -Achse und der F markierten Kurve. A ist auch ein Attraktor, nämlich ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. Der Einzugsbereich von A ist die Fläche oberhalb von F . Läßt man außer acht, daß sich der Definitionsbereich des Modells auf den ersten Quadranten beschränken müßte (siehe die Deutung in Beispiel 2.8), so verbleibt noch die Fläche unterhalb der x_1 -Achse und rechts der Kurve F . Die dort verlaufenden Bahnen nähern sich aber keinem Attraktor, sie sind für $t \rightarrow \infty$ nicht beschränkt.*

5 Ebene Systeme, Vermischtes

Wir sprechen von einem *ebenen* System, wenn der Phasenraum unseres dynamischen Systems eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist. Ebene Systeme nehmen innerhalb der dynamischen Systeme eine Sonderstellung ein. Das liegt zum einen daran, daß dies die einzigen Systeme sind, deren Phasenraum eine gewisse Reichhaltigkeit aufweist, ohne unübersichtlich zu werden; im \mathbb{R} ist der Phasenraum nur ein Intervall, im \mathbb{R}^n mit $n > 2$ dagegen muß man bei der Visualisierung schon auf Projektionen zurückgreifen, der gesamte Raum läßt sich nicht befriedigend darstellen. Zum anderen ist diese Sonderstellung aber auch darin begründet, daß ebene Systeme gewisse "schöne" Eigenschaften zeigen, die man für Systeme höherer Dimension nicht allgemein nachweisen kann. Zum Beispiel trennen periodische Orbits den Phasenraum in zwei invariante Mengen, was für die Bedeutung dieses Lösungstyps wichtige Konsequenzen hat. Negativ ist freilich zu verbuchen, daß man bei der Analyse ebener Systeme manche Phänomene übersehen kann, die dann vielleicht bei einem "größeren" Modell plötzlich auftauchen. Man sollte sich der besonderen Einschränkung stets bewußt bleiben, die man vornimmt, wenn man ein System auf zwei (oder gar eine) Dimension reduziert.

Wir starten zunächst mit den prototypischen Phasenporträts für isolierte Gleichgewichtspunkte in ebenen linearen Systemen: Diese Bilder bieten einen guten Grundstock auch für das Verständnis höherdimensionaler Systeme und im hyperbolischen Fall sogar nichtlinearer Systeme.

Satz 5.1 *Im linearen ebenen System*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}\tag{16}$$

ist bei regulärer Systemmatrix \mathbf{A} der Nullpunkt der einzige Gleichgewichtspunkt. Seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von \mathbf{A} . Dann ist der Gleichgewichtspunkt

1) *ein stabiler Knoten, wenn beide λ_i negativ sind. Man kann noch die folgenden Fälle unterscheiden:*

1.a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *Abbildung 3*

- 1.b) $\lambda_1 = \lambda_2$, und der Eigenraum ist zweidimensional, Abbildung 4
 1.c) $\lambda_1 = \lambda_2$, und der Eigenraum ist eindimensional, Abbildung 5
- 2) ein stabiler Strudelpunkt, wenn $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ mit $\alpha < 0$ und $\beta \neq 0$, Abbildung 6
- 3) ein Wirbelpunkt, wenn $\lambda_1 = i\beta$ mit $\beta \neq 0$, Abbildung 7 (Achtung, nicht-hyperbolischer Fall!)
- 4) ein Sattelpunkt, wenn eines der λ_i negativ ist und eines positiv, Abbildung 8
- 5) ein instabiler Knoten, wenn beide λ_i positiv sind. Man kann dieselben Fälle wie bei 1) unterscheiden und erhält bis auf die Orientierung der Bahnen dieselben Phasenporträts.
- 6) ein instabiler Strudelpunkt, wenn die Voraussetzungen von 3) mit $\alpha > 0$ gelten; die Orientierung der Bahnen im Phasenporträt kehrt sich wieder um.

Die Abbildungen sind für die jeweiligen Fälle repräsentativ, wenn man sich alle Porträts zusammengefaßt denkt, die topologisch äquivalent sind und noch gewisse stärkere geometrische Gemeinsamkeiten aufweisen. (Beim Knoten vom Typ a) zum Beispiel schneiden sich zwei invariante Geraden im Gleichgewichtspunkt, alle übrigen Phasenkurven biegen sich zu einer der Geraden hin.) Dieser Begriff der Äquivalenz wird intuitiv gebraucht, seine Präzisierung ist problematisch (s.u.).

Im Sinne der topologischen Äquivalenz lassen sich nicht mehr alle aufgeführten Fälle unterscheiden, und es bleibt nur die gröbere Einteilung in stabile Knoten (entspricht 1) oder 2)), instabile Knoten (entspricht 5) oder 6)), Sattelpunkte (entspricht 4)) und Wirbelpunkte (entspricht 3)).

Der Wirbel ist dabei als nicht-hyperbolischer Punkt strukturell nicht stabil (vgl. Satz 3.6), man beachte aber die Bemerkungen zur strukturellen Stabilität weiter unten.

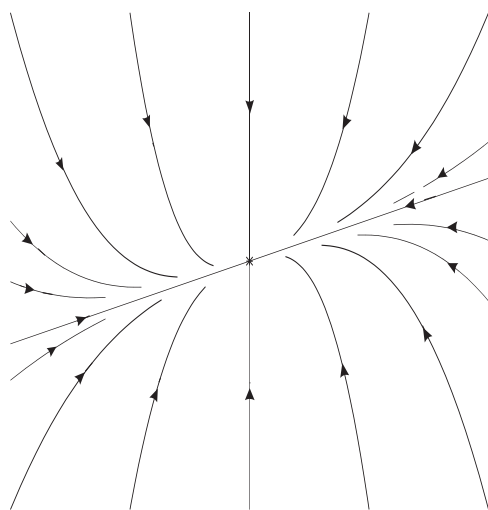


Abbildung 3: Knoten, Typ a)

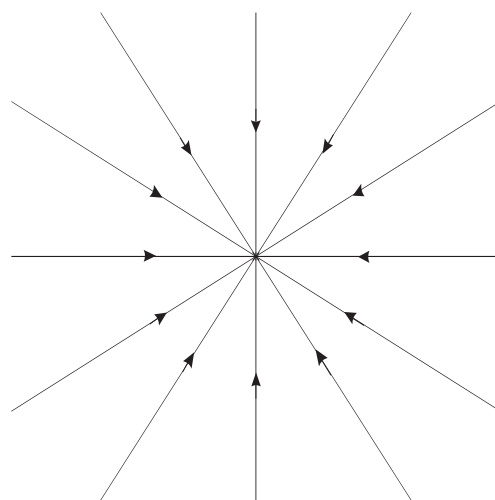


Abbildung 4: Knoten, Typ b)

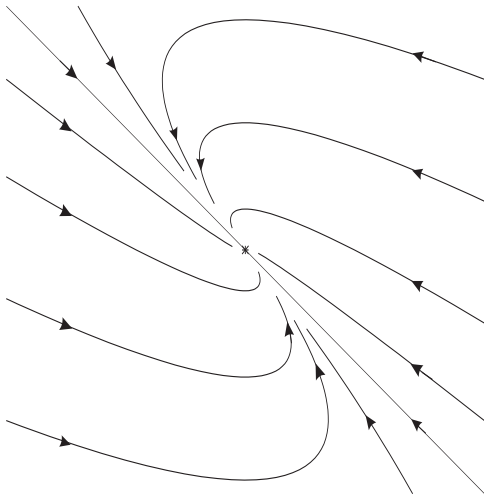


Abbildung 5: Knoten, Typ c)

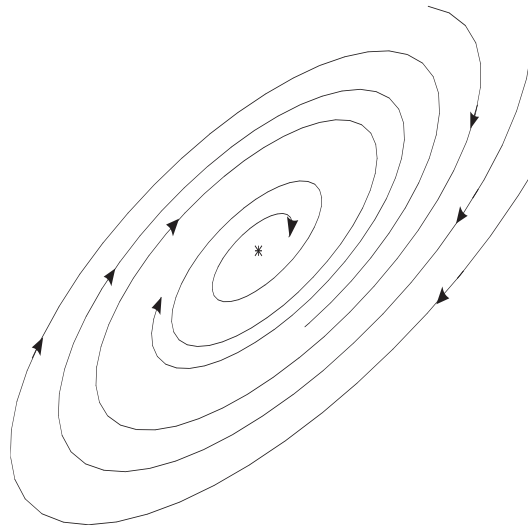


Abbildung 6: Strudelpunkt

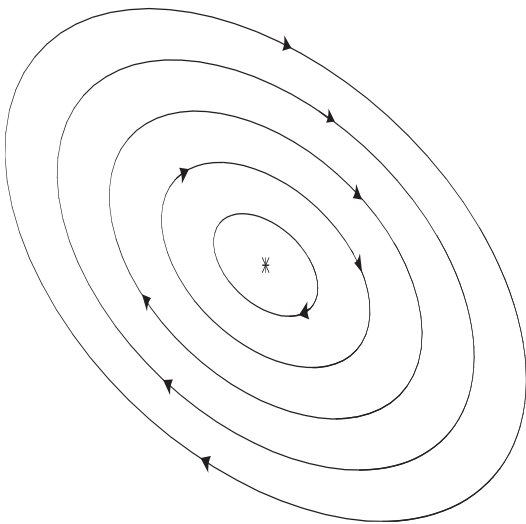


Abbildung 7: Wirbelpunkt

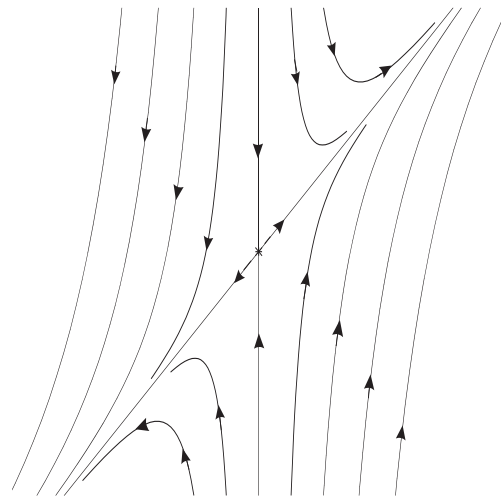


Abbildung 8: Sattelpunkt

Tatsächlich hat man damit auch schon die hyperbolischen Gleichgewichtspunkte *nichtlinearer* Systeme verstanden, denn es gilt weiterhin:

Satz 5.2 Sei \hat{x} Gleichgewichtspunkt des von f induzierten dynamischen Systems und sei die Jacobimatrix $Df(\hat{x})$ regulär. Dann ist auch hier der Gleichgewichtspunkt isoliert.

Wenn der Punkt darüberhinaus hyperbolisch ist, also $Df(\hat{x})$ kein Paar rein-imaginärer Eigenwerte besitzt, ist das Phasenporträt nahe \hat{x} lokal topologisch äquivalent zu dem Porträt des linearisierten Systems

$$\dot{x} = Df(\hat{x})(x - \hat{x}) \quad (17)$$

nahe \hat{x} . (Die erste Klammer rechterhand stellt das Argument von f dar, die zweite klammert einen Faktor.)

Läßt man in Satz 5.1 ein nichtlineares System zu und interpretiert λ_i als die Eigenwerte der Jacobimatrix $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$, so bleibt mit Ausnahme des Wirbels die Einstufung der Gleichgewichtspunkte richtig. Über die topologische Äquivalenz hinaus sind also die Phasenporträts nahe $\hat{\mathbf{x}}$ im Sinne von Satz 5.1 äquivalent zu den abgebildeten, wenn man allerdings gewisse nichtlineare Verbiegungen in Kauf nimmt.

Einen Gleichgewichtspunkt, dessen Phasenporträt lokal topologisch äquivalent zu dem des (linearen) Wirbels ist, bezeichnet man auch im nichtlinearen Fall als Wirbelpunkt. In so einem Punkt sind zwar die Eigenwerte der Jacobimatrix rein-imaginär, man kann jedoch umgekehrt aus diesem Umstand nicht auf das Vorliegen eines Wirbels schließen.

Es ist in der Praxis sehr üblich, mit der feineren Gliederung der Gleichgewichtspunkte zu arbeiten; man wünscht vor allem zwischen Knoten und Strudeln zu unterscheiden. In einem konkreten Modell würde man zum Beispiel bei einem Strudel Schwingungen beobachten, während im Falle eines Knotens keine Schwingungen auftreten. Auch in einer Verzweigungsanalyse (Definition folgt) kann es wichtig werden, zwischen Knoten und Strudeln zu unterscheiden, da die ersteren mit der sogenannten stationären Verzweigung assoziiert sind, die letzteren aber mit der sogenannten Hopf-Verzweigung. (Beides wird in Abschnitt 6 definiert, ohne aber den angedeuteten Zusammenhang zu vertiefen.) Allgemein geben wir zu, daß der Begriff der topologischen Äquivalenz für die Praxis manchmal nicht streng genug ist.

Eine Präzisierung des intuitiv eingeführten Äquivalenzbegriffs ist allerdings nicht unproblematisch, denn eigentlich gehen die Fälle teilweise ineinander über, weshalb man fast zwangsläufig wieder auf den Begriff der topologischen Äquivalenz stößt. Tatsächlich kann die idealisierte Vorstellung, die man von den verschiedenen Phasenporträts hat, auch irreführend sein: Betrachten Sie zur Illustration die Abbildungen 9, 10 und 11. Alle drei stellen Phasenporträts von Knoten des Typs a) dar. (Im Gegensatz zu Abbildung 3 haben wir hier die Bahnen bis in den Gleichgewichtspunkt fortgesetzt, aber das sollte Sie nicht verwirren.) Nur das mittlere Bild entspricht eigentlich der idealisierten Vorstellung, die man sich von diesem Typ des Knotens macht. Das rechte Bild ähnelt weitaus eher dem Bild des Knotens vom Typ c), während das linke Bild völlig fremdartig wirkt. (Die Bahnen treffen übrigens *nicht* außerhalb der $\mathbf{0}$ auf die x_1 -Achse, wie es den Anschein hat.) Die groben Unterschiede der Phasenporträts werden verursacht durch die unterschiedlichen Größenverhältnisse der beiden Eigenwerte: Bei Abbildung 9 verhalten Sie sich wie 10:400, bei Abbildung 10 wie 10:40, bei Abbildung 11 wie 10:11.

Eine gute Illustration für Satz 5.2 bietet uns das Phasenporträt aus Abschnitt 1:

Beispiel 5.3 Die Gleichgewichtspunkte aus Abbildung 1 sind wie folgt einzustufen: Punkt A ist ein stabiler Knoten vom Typ a), die Punkte B und C sind Sattelpunkte, und D ist ein instabiler Strudel. Man erkennt recht gut die Ähnlichkeit mit den Abbildungen dieses Abschnitts. Gleichzeitig wird auch sehr deutlich, daß man nur eine lokale Äquivalenz mit Porträts linearer Systeme erwarten kann: In linearen Systemen könnten ja nicht einmal mehrere isolierte Gleichgewichtspunkte auftreten! (Warum ist das so?)

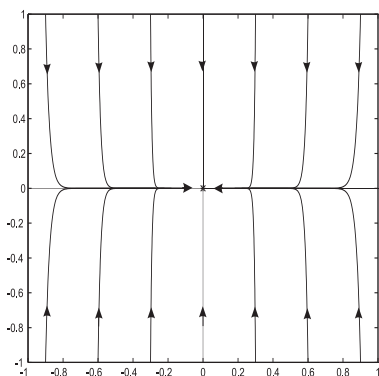


Abbildung 9:

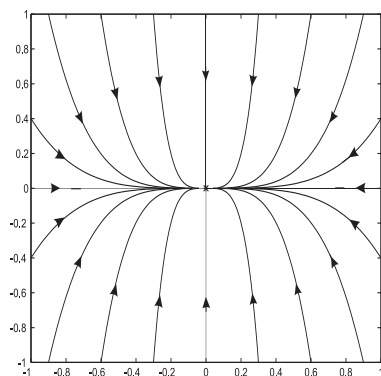


Abbildung 10:

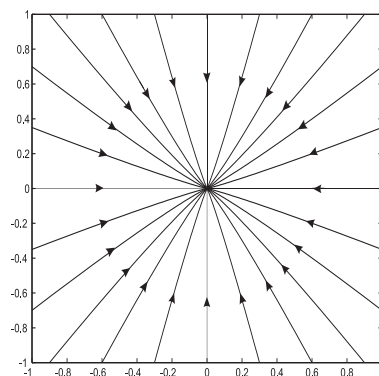


Abbildung 11:

Vom Lösungsverhalten in höherdimensionalen Systemen kann man sich noch eine gewisse Vorstellung machen, wenn man sich den zugrundeliegenden \mathbb{R}^n in invariante Unterräume zerlegt denkt und in Gedanken Phasenporträts der obigen Typen entsprechend kombiniert. Ein Beispiel für das Phasenporträt eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes im \mathbb{R}^3 gibt Abbildung 12. Die Systemmatrix des zugrundeliegenden linearen Systems hat die Eigenwerte -0.2 und $-0.1 \pm i$. Beachtet man nur die x_3 -Komponente der Lösungsbahnen, so bewegen sie sich gleichmäßig auf die 0 zu (die der x_1, x_2 -Ebene entspricht). Dies ist das Verhalten, das zu dem Eigenwert -0.2 gehört. Schaut man dagegen in Richtung der x_3 Achse auf das Diagramm, projiziert also die Bahnen auf die x_1, x_2 -Ebene, so erkennt man das Verhalten eines Strudels, was den beiden anderen Eigenwerten entspricht, vgl. Abbildung 13.

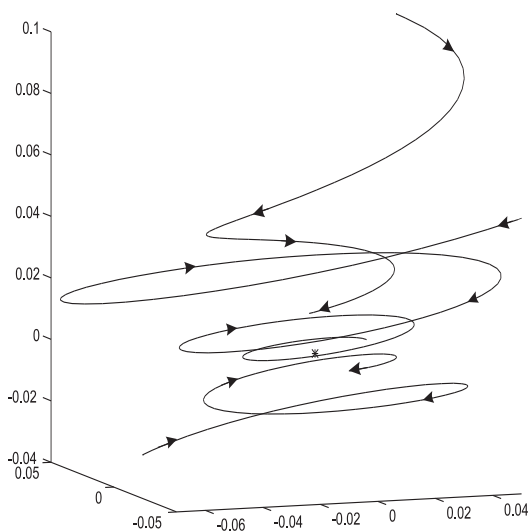


Abbildung 12: 3-dim. Beispiel

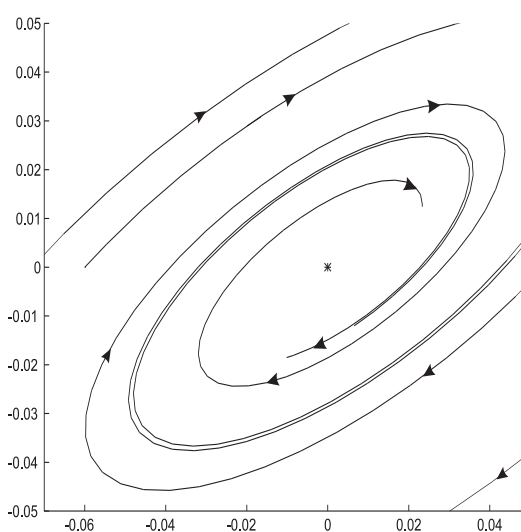


Abbildung 13: Blick entlang x_3 -Achse

Aus Anlaß des Wirbelpunktes wollen wir hier noch einräumen, daß man eigentlich mit dem Begriff der strukturellen Stabilität etwas differenzierter umgehen sollte; es kann nämlich durchaus vorkommen, daß bestimmte Strukturen des Modells strukturell instabile Systeme geradezu erzwingen. In einem *Hamiltonschen System* beispielsweise,

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2), \quad (18)$$

sind alle isolierten Gleichgewichtspunkte Wirbel. (Prüfen Sie das für den linearen Fall nach, indem Sie die Eigenwerte der Jacobimatrix berechnen!) Es ist typisch für solche speziellen Strukturen, daß sie, lax ausgedrückt, den wahrscheinlichen Fall (hier: Knoten, Sattel) unmöglich machen und den unwahrscheinlichen Fall (hier: Wirbel) damit wahrscheinlich. Es wäre durchaus sinnvoll, den Begriff der strukturellen Stabilität dahingehend zu modifizieren, daß nur solche Störungen des Vektorfeldes zugelassen sind, die die spezielle Struktur der jeweiligen Problemklasse nicht zerstören. Innerhalb der Problemklasse der Hamiltonschen Systeme kann ein Wirbelpunkt dann sehr wohl in einem strukturell stabilen System auftauchen.

Wir bleiben hier allerdings der Einfachheit halber bei der allgemeinen Fassung des Begriffs aus Abschnitt 1. Bedenken Sie auch, daß die numerischen Lösungsverfahren, die Sie verwenden, häufig Vielzweckmethoden sein werden, die also auf die speziellen Eigenschaften Ihrer Problemklasse gar nicht eingehen. Daher müssen Sie bei der numerischen Simulation des Systems doch wieder mit Störungen rechnen, die die spezielle Struktur des Problems zerstören.

Um auf ebene Systeme zurückzukommen: Wie Guckenheimer und Holmes in [9, sections 1.8 and 1.9] anmerken, lassen sich zu diesem Thema tatsächlich Tausende von Seiten füllen. Wer an den speziellen Eigenschaften dieser Systeme (auch aus theoretischer Sicht) interessiert ist, der halte sich bitte an die im angegebenen Buch genannten Quellen. (Guckenheimer und Holmes präsentieren auch selbst schon einiges.) Stellvertretend für viele (meist nicht so leicht nachvollziehbare) Resultate zitieren wir abschließend den berühmten

Satz 5.4 (Poincaré–Bendixson) *In einem ebenen System ist jede nichtleere Limesmenge, die keine Fixpunkte enthält, ein geschlossener Orbit.*

6 Parameterabhängige Systeme, Verzweigung

Wir führen nun sichtbar Parameter in unser dynamisches System ein, ersetzen also (1) durch

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^m \quad (19)$$

wobei \boldsymbol{s} einen Satz von m Parametern repräsentiert. Natürlich können sich auch schon in (1) Parameter verbergen. Was uns dazu veranlaßt, sie hier explizit aufzuführen, ist der Wunsch, sie zu variieren und das System gezielt für verschiedene benachbarte Parameterkonstellationen zu untersuchen. Wir setzen dabei voraus, daß \boldsymbol{f} in “vernünftiger” Weise, nämlich wiederum stetig differenzierbar, von den Parametern abhängt. Bei der analytischen Behandlung von Verzweigungen wird man üblicherweise noch strengere Regularitätsvoraussetzungen

an \mathbf{f} stellen, etwa zweimalige oder dreimalige stetige Differenzierbarkeit bezüglich aller Argumente (je nach Verzweigungstyp), um gewisse Verzweigungen nachzuweisen. Das sind aber Annahmen, die den Praktiker für gewöhnlich nicht aus der Ruhe bringen können.

In den meisten Fällen ist ein einzelner Parameter von Interesse. Stellen wir uns vor, wir haben nur einen freien Parameter s und bei $s = s_0$ einen hyperbolischen Gleichgewichtspunkt \mathbf{x}^0 von (19). Nach Definition und Satz 3.6 bzw. nach dem Satz über implizite Funktionen erwarten wir nun, daß wir für benachbarte s ebenfalls einen hyperbolischen Gleichgewichtspunkt $\mathbf{x}(s)$ in der Nähe von \mathbf{x}^0 finden. Faßt man alle diese benachbarten Gleichgewichtspunkte zusammen, so erhält man eine Kurve im Raum aller $(\mathbf{x}, s) \in \mathbb{R}^{(n+1)}$. (Bei mehrdimensionalen Parametersätzen erhielte man Flächen.) Solche Kurven von Gleichgewichtspunkten werden auch *Pfade* genannt. Im Zusammenhang mit Verzweigung nennt man sie *Lösungsäste*. Der Begriff des Lösungsastes wird auch allgemeiner verwendet, etwa für periodische Orbits.

Bei der Visualisierung der Pfade trägt man für gewöhnlich einen eindimensionalen Vertreter von \mathbf{x} , etwa eine geeignete Komponente des Vektors oder seine 2-Norm, gegen einen frei variierenden Parameter ab. Diese Darstellungsweise wird uns wieder im Verzweigungsdiagramm begegnen.

Startet man auf einem Punkt eines Lösungspfades und berechnet davon ausgehend weitere Punkte für andere Parameterwerte, so spricht man von *Pfadverfolgung*. Es gibt gute Gründe, um Pfade zu verfolgen, und es gibt dafür spezialisierte Software. Ein möglicher Grund ist zum Beispiel der, daß die Lösungen eines Pfades sich nur für bestimmte Parameterwerte leicht finden lassen, für andere dagegen nur schwer, ein anderer Grund ist der, daß die Lösungen eines bestimmten Astes für das vorliegende Modell eine besondere Bedeutung haben und daß ihre Lage und Stabilität bei Parametervariation überprüft werden soll.

Der Begriff der Verzweigung nun ist nicht vereinheitlicht, es gibt jedoch gewisse Phänomene, die er in allen seinen Fassungen beinhaltet. Wir definieren hier in Übereinstimmung mit unserer Definition der strukturellen Stabilität:

Definition 6.1 *Verzweigung findet in dem durch (19) definierten System bei dem Parametervektor $\hat{\mathbf{s}}$ statt, wenn das System dort strukturell instabil ist und diese Instabilität sich durch Parametervariation bemerkbar macht. Etwas formaler geschrieben bedeutet das, daß es ein $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ gibt, so daß für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ der gestörte Parametersatz $\mathbf{s}(\varepsilon) = \hat{\mathbf{s}} + \varepsilon \mathbf{h}$ im zulässigen Parameterbereich bleibt, während das von $\mathbf{f}(*, \mathbf{s}(\varepsilon))$ induzierte dynamische System nicht topologisch äquivalent ist zu dem von $\mathbf{f}(*, \hat{\mathbf{s}})$ induzierten. Parameter, deren Variation Verzweigung hervorruft, werden auch Verzweigungsparameter genannt. Wenn das jeweilige Verzweigungsphänomen hauptsächlich einen Gleichgewichtspunkt $\hat{\mathbf{x}}$ und gewisse benachbarte Orbits betrifft, so nennt man den Punkt $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$, der gewissermaßen das Zentrum der Verzweigung darstellt, den Verzweigungspunkt.*

Verzweigung kann von sehr praktischem Interesse sein: In vielen Fällen ergibt sich ein Verzweigungsparameter ganz natürlich aus dem Modell. Beachten Sie zur Illustration das von Mises–Stabwerk aus Beispiel 2.5: Offensichtlich stellt die Last einen Verzweigungsparameter

dar, denn bei einem bestimmten Wert wird die obere Gleichgewichtslage instabil werden, und das Stabwerk wird nach unten knicken. Dieses Beispiel ist sehr typisch für die Praxis, denn Verzweigung macht sich häufig dadurch bemerkbar, daß bei Parametervariation eine stabile Gleichgewichtslösung instabil wird und im Wechsel eine andere Lösung stabil. Meistens ist das ein unerwünschter Effekt, aber man kann ihn auch ausnutzen, um komplizierte Lösungen zu finden, indem man bei einfacheren Lösungen startet, den Lösungsast verfolgt und in einem geeigneten Verzweigungspunkt auf den neuen Ast komplizierterer Lösungen wechselt. Auch dafür gibt es spezielle Software (z.B. das in Abschnitt 2 erwähnte Paket AUTO).

Zur Visualisierung von Verzweigung greift man wieder die obige Idee des Diagramms für Lösungspfade auf:

Definition 6.2 *In einem Verzweigungsdiagramm trägt man einen eindimensionalen Vertreter von \mathbf{x} , etwa eine geeignete Komponente des Vektors oder seine 2-Norm, gegen den (bzw. einen geeigneten) Verzweigungsparameter ab. Diese beiden Koordinaten werden so ausgewählt, daß sich die an der interessierenden Verzweigung beteiligten verschiedenen Lösungsäste unterscheiden lassen und daß getrennte Lösungsäste sich möglichst nicht scheinbar schneiden. Oft dient das Verzweigungsdiagramm der Darstellung einer einzigen Verzweigung, manchmal kann es aber der Darstellung mehrerer (zusammenhängender) Verzweigungen dienen. Ein Verzweigungsdiagramm erhebt in der Regel keinen Anspruch auf die vollständige Zergliederung des Phasenraums oder auch nur die Aufführung aller Äste spezieller Lösungen. Es wird allerdings versucht, alle an der Verzweigung (bzw. den Verzweigungen) beteiligten Äste in der Nähe der Verzweigung(en) darzustellen.*

Es sollte klar sein, daß ein Verzweigungsdiagramm in praxi keine Phasenporträts ersetzen kann, denn für jeden Parameterwert bleibt zur Darstellung des Phasenraumes schließlich nur eine Komponente übrig. Es ist aber auch nicht üblich, den Begriff wie etwa beim Phasenporträt in einer idealisierten Weise zu verwenden. Ein Verzweigungsdiagramm soll Aufschluß über die Art einer Verzweigung, über kritische Parameterwerte und in begrenztem Umfang über die Lage von Lösungsästen geben; mehr wird nicht erwartet.

Beispiel 6.3 *Abbildung 14 ist ein mit AUTO erzeugtes Verzweigungsdiagramm des Räuber-Beute-Modells aus Beispiel 2.8. Die horizontale Achse entspricht dem Parameter λ . Durchgezogene Linien repräsentieren asymptotisch stabile Gleichgewichtspunkte, gestrichelte Linien repräsentieren instabile Gleichgewichtspunkte. Die Kurve mit den fetten Punkten repräsentiert stabile periodische Orbits. An der vertikalen Achse ist im Falle der Gleichgewichtspunkte x_1 abzulesen, im Falle der periodischen Orbits $\max(x_1)$.*

Nehmen wir dieses Beispiel zunächst zum Anlaß, um den Zusammenhang zwischen Verzweigungsdiagrammen und Phasenporträts zu verdeutlichen: Jeder senkrechte Schnitt in Abbildung 14 entspricht einem vollen Phasenporträt des Systems zu dem jeweiligen Parameterwert. Das Phasenporträt zu $\lambda = 0.7$ haben wir schon in Abbildung 1 kennengelernt. Verfolgen wir den zugehörigen Schnitt durch das Verzweigungsdiagramm, so treffen wir fünf Lösungsäste: Auf dem untersten Ast liegt Gleichgewichtspunkt A (Bezeichnung aus Abbildung 1), auf dem zweiten Ast liegt Punkt B , auf dem dritten Punkt D , der vierte (fett

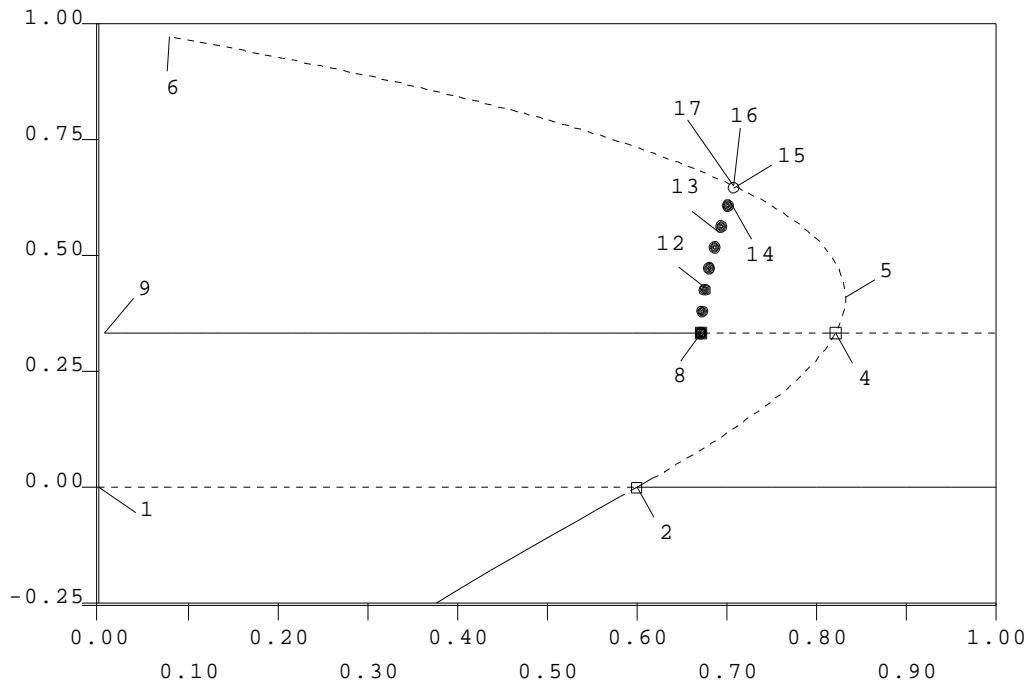


Abbildung 14: Verzweigungsdiagramm zu Beispiel 2.8

gepunktete) Ast repräsentiert den Grenzzyklus E , und auf dem obersten Ast liegt C . (Man kann sich streiten, ob der letzte Ast nicht mit dem zweiten identisch ist.)

Das Verzweigungsverhalten des Räuber–Beute–Modells kann man nun wie folgt beschreiben:

Startet man mit $\lambda = 0$, so wird man nach einer Einschwingphase den mit 9 markierten Gleichgewichtspunkt beobachten. Bei Vergrößerung des Parameters wird man sich zunächst immer wieder auf den anschließenden Ast asymptotisch stabiler Gleichgewichtslösungen einpendeln. Es gibt zwar gleichzeitig zwei weitere Äste von Gleichgewichtspunkten, aber die darauf liegenden Lösungen sind instabil.

Bei dem zu 2 gehörenden Parameterwert kommt ein weiterer Lösungsast ins Spiel. (Rechnerisch war dieser Ast schon vorher vorhanden, die Lösungen waren aber wegen $x_1 < 0$ im Rahmen des Modells nicht sinnvoll.) Der neue Ast schneidet den Ast der “trivialen Lösung” $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ im Verzweigungspunkt 2. Dabei wird die triviale Lösung stabil. Erhöht man den Parameter λ weiterhin behutsam, so wird man dennoch weiter auf dem von 9 ausgehenden Lösungsast bleiben, da er nach wie vor asymptotisch stabile Lösungen enthält.

Das ändert sich allerdings im Verzweigungspunkt 8. Hier wird der ursprüngliche Ast von Gleichgewichtspunkten instabil, während in unmittelbarer Nähe ein Ast anziehender periodischer Orbits entsteht. Man wird beobachten, daß nun bei wachsendem λ das System zunehmend zu schwingen beginnt. Präziser: Die Bahnen werden nicht mehr auf einen Gleichgewichtspunkt zulaufen, sondern auf einen zunächst sehr kleinen Grenzzyklus. Die periodischen Orbits gewinnen mit weiter wachsendem λ an Umfang: Während $\max(x_1)$ sich dem von

6 ausgehenden Ast von Gleichgewichtspunkten nähert (was man im Verzweigungsdiagramm sieht), nähert sich $\min(x_1)$ der trivialen Lösung — was man im Diagramm nicht sieht; solche Details bleiben Phasenporträts vorbehalten. In Abbildung 1 erkennt man, daß der Grenzzyklus E für $\lambda = 0.7$ den Punkten B und C schon recht nahe ist. Der Einzugsbereich bildet oberhalb und links dieses Orbits nur noch eine schmale Schicht. (Das bedeutet, daß eine kräftigere Störung der periodischen Bewegung das System schon zur trivialen Lösung wechseln lassen kann.)

Im 15/16/17 markierten Punkt des Verzweigungsdiagramms wird aus den periodischen Orbits ein heteroklinischer Orbit, der die beiden eben genannten Lösungsäste verbindet. Man stelle sich dazu vor, daß sich in Abbildung 1 die von B und C nach oben führenden gestrichelten Kurven treffen und zu einer Kurve werden, die B und C verbindet, während gleichzeitig E mit dieser Kurve und dem Achsenabschnitt zwischen B und C verschmilzt. (Das ist dem Verzweigungsdiagramm nicht zu entnehmen; man erkennt nur, daß die periodischen Orbits sich mit einem Ast von Gleichgewichtspunkten treffen.)

Bei weiterer Erhöhung von λ verschwinden die periodischen Orbits endgültig, und der einzig übrige Attraktor ist die triviale Lösung. Alle Bahnen werden also dann gegen diesen Gleichgewichtspunkt konvergieren. Was man dem Verzweigungsdiagramm wieder nicht ansieht ist, daß die in Abbildung 1 von B und C nach oben zeigenden gestrichelten Kurven nach der vorübergehenden Verschmelzung übereinander hinweg gewandert sind. Die von B nach oben zeigende Kurve führt jetzt in den instabilen Strudel, während die von C nach oben zeigende Kurve über den Strudel hinweg in die triviale Lösung führt. Bei weiterer Erhöhung von λ werden die Punkte B und C aufeinander zuwandern, bis sie sich schließlich treffen und beide verschwinden. (Das sieht man wieder an dem Verzweigungsdiagramm.)

Die wesentlichen Beobachtungen lassen für das Modell folgende Deutung zu: Bei niedriger Fischfangquote stellt sich ein Gleichgewicht zwischen Haien und Beutefischen ein, das bei Erhöhung der Fischfangquote an einem kritischen Wert durch eine periodische Oszillation abgelöst wird. Die zunächst kleinen Oszillationen nehmen bei weiterer Erhöhung der Quote zu, bis bei einem weiteren kritischen Wert der Quote Haie und Beutefische ganz aussterben. Der übermäßige Fischfang ist ihnen schließlich zum Verhängnis geworden.

(Unsere Argumentation setzt voraus, daß das Verzweigungsdiagramm alle möglichen Limesmengen des Phasenraums enthält. In diesem Falle trifft das auch zu. Im allgemeinen wird man aufgrund von Verzweigungsdiagrammen das Verhalten eines Systems nur bedingt vorhersagen können.)

Zum Abschluß führen wir anhand des Diagramms aus Abbildung 14 noch kurz die gängigsten Verzweigungstypen ein: Die folgenden Begriffe setzen voraus, daß man wie hier mit einem einzelnen Verzweigungsparameter arbeitet.

- Punkte wie 5, in denen ein Lösungsast mit einer senkrechten Tangente “umschlägt”, werden *Umkehrpunkte* genannt. Umkehrpunkte werden nicht überall als Verzweigungspunkte angesehen, nach unserer Definition sind sie es aber.

- Verzweigungspunkte wie 2 oder 4, in denen sich zwei Äste von Gleichgewichtspunkten transversal (also mit nicht-parallelen Tangenten) schneiden, heißen *stationäre Verzweigungspunkte*. Man unterscheidet zwischen *Pitchfork-Verzweigung* (einer der Äste schlägt im Verzweigungspunkt mit senkrechter Tangente um) und *transkritischer Verzweigung* (keiner der Äste hat im Verzweigungspunkt eine senkrechte Tangente). Im transkritischen Fall geht die Stabilität im Verzweigungspunkt vom einen auf den anderen Ast über, im Pitchfork-Fall muß man zur Analyse die Lage des umschlagenden Astes berücksichtigen.
- Bei Verzweigungspunkten wie 8, in denen ein Ast von periodischen Orbits auf einen Ast von Gleichgewichtspunkten trifft, spricht man von *Hopf-Verzweigung*. Ob die abzweigenden periodischen Orbits selbst stabil sind oder nicht, hängt jeweils von der Lage ihres Astes ab.

Mit diesen Andeutungen beenden wir unseren Einstieg in die Welt der dynamischen Systeme. In den letzten zwei Abschnitten stellen wir die Aufgaben, die Sie bearbeiten sollen, und geben eine kurze Einführung in die Software MATLAB und SIMULINK, die Sie dabei benutzen sollen. Wir wünschen Erbauung und Erfolg!

7 MATLAB und SIMULINK

MATLAB, kurz für *Matrix Laboratory*, ist eine interaktive Software für numerisches Rechnen und die Visualisierung von Ergebnissen. Die Befehlssyntax ist eigens auf die bequeme Manipulation von Vektoren und Matrizen zugeschnitten. Ursprünglich als Oberfläche für numerische lineare Algebra erdacht, ist MATLAB inzwischen weit über diese Disziplin hinausgewachsen und bietet eine Fülle numerischer Algorithmen teils als eingebaute Funktionen, teils in sogenannten *Toolboxen* an.

MATLAB wird durch den Befehl `matlab` auf Betriebssystemebene gestartet. Es macht sich durch den Prompt `>>` bemerkbar. Zum Beenden des Programms geben Sie `quit` ein. MATLAB puffert Bildschirmeingaben und erlaubt, sie mit Hilfe der Pfeiltasten “zurückzuholen”. Wenn Sie die Bearbeitung von MATLAB-Befehlen abbrechen wollen, so können Sie das mit der Tastenkombination Ctrl-C.

In MATLAB wird per Gleichheitszeichen zugewiesen. Die häufigsten Datentypen sind ganze Zahlen und Fließkommazahlen, die in der üblicher Weise eingegeben werden; mögliche Darstellungen von $1/1000$ sind beispielsweise `.001` oder `1e-3`. Matrizen werden zeilenweise eingegeben und durch eckige Klammern begrenzt. Einzelne Elemente in einer Zeile werden durch Leerzeichen oder Komma getrennt, die Zeilen selbst durch Semikolon. Bsp:

```
A = [3. .001; 1e-3 3.14e5];
```


weist der Variablen **A** die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 10^{-3} \\ 10^{-3} & 3.14 \cdot 10^5 \end{pmatrix}$$

zu. Die Eingabe von Zeilenvektoren und Spaltenvektoren ergibt sich hieraus als Spezialfall.

SIMULINK ist eine ganz in **MATLAB** integrierte GUI-orientierte Software zur Modellierung und Simulation dynamischer Systeme. Man startet sie vom **MATLAB**-Prompt aus durch Eingabe des Befehls `simulink`. **SIMULINK** schafft sich ein eigenes Arbeitsfenster; das **MATLAB**-Fenster ist nach kurzer Wartezeit wieder unabhängig nutzbar.

SIMULINK wird im Prinzip mit Hilfe von Menüfunktionen und Mausoperationen bedient. Hat man jedoch numerische Werte in eine Maske einzutragen, so tut man das in **MATLAB**-Syntax. Um ein bestehendes **SIMULINK**-Modell zu bearbeiten, wählt man es im Menü `File/Open...` aus. Es öffnet sich darauf ein neues Modellfenster, das zum Schließen seinerseits einen Menüpunkt `File/Close` enthält. **SIMULINK**-Modelle werden als Blockschaltbilder aus vorgefertigten Elementen zusammengesetzt. (Eigene Ergänzungen sind allerdings möglich.) Mit den Bauelementen eines Schaltbildes sind häufig Daten oder Parameter verknüpft. Man kann in diesem Falle durch Doppelklick auf das Symbol des Bauelements eine Eingabe- und Anzeigemaske für die jeweiligen Werte aktivieren. Für unsere Aufgaben sind zwei Typen von Bauelementen besonders interessant:

- Die Parameter unserer dynamischen Systeme verbergen sich hinter *Verstärkungsgliedern* (im Bild Dreiecke). Wir haben diese Glieder entsprechend beschriftet.
- Die Anfangsbedingungen für die Anfangswertaufgabe verbergen sich hinter *Integrationsgliedern* (im Bild Quadrate mit der Aufschrift $1/s$).

Die Simulation (also die numerische Berechnung der Lösung) wird gestartet mit dem Menüpunkt `Simulation/Start` und abgebrochen mit `Simulation/Stop`, wenn sie nicht schon beendet ist. Verfahrensparameter lassen sich im Menü `Simulation/Parameters...` ansehen und verändern. Hier ist nur bei einer der Aufgaben von Ihnen Aktivität gefordert. Sie können allerdings, wenn Ihnen das angenehm erscheint, in diesem Menü die `Stop Time` auf einen niedrigeren Wert setzen; anfangs enthalten unsere Modelle dort einen hohen Wert, so daß man die Simulation stets per Hand beenden muß. Wenn Sie beim ersten Simulationslauf für ein Modell eine Grafik vermissen, ziehen Sie das sichtbare Grafikfenster zur Seite; **SIMULINK** positioniert unter Umständen alle Grafiken übereinander.

Wenn man mehrere Simulationsläufe nacheinander startet, empfiehlt es sich, zur bequemerer Arbeit die Grafikenfenster und das Modellfenster so zu positionieren, daß sie sich nicht überlappen. Verkleinern Sie gegebenenfalls das Modellfenster; wenn dadurch wichtige Bauelemente unsichtbar werden, korrigieren Sie den Effekt mit Hilfe der Scrollbar. Widerstehen Sie der Versuchung, die Grafikenfenster nach der Simulation zu schließen (oder gar zur Beendigung der Simulation zu verwenden): Bei einem neuen Simulationslauf löscht **SIMULINK** die alten Grafiken selbständig und behält die Größe und Position der Fenster bei!

8 Aufgaben

Zur Bearbeitung der Aufgaben besorgen Sie sich zuallererst einen Rechnerplatz und informieren Sie sich über den Anmeldevorgang und Ihr Arbeitsverzeichnis für dieses Praktikum. Das Verzeichnis enthält vorgefertigte Funktionen und Modelle für die folgende Aufgaben. Es wird daher das einfachste sein, MATLAB und SIMULINK von dort aus zu starten. Beachten Sie bitte auch die Hinweise aus Abschnitt 7!

Aufgabe 1 Starten Sie von der MATLAB-Kommandozeile aus die Funktion `harmosc`. Diese Funktion erzeugt interaktiv Phasenkurven für den gedämpften harmonischen Oszillator (Beispiel 2.1) bei der Grundfrequenz $\omega_0 = 1$.

- Erzeugen Sie Phasenporträts für je einen Wert des Dämpfungsparameters δ im schwach gedämpften Fall $0 < \delta < 1$ und im überdämpften Fall $\delta > 1$ sowie je eines für den ungedämpften Fall $\delta = 0$ und für den aperiodischen Grenzfall $\delta = 1$.
- Klassifizieren Sie mit Hilfe der Phasenporträts jeweils den Gleichgewichtspunkt des Systems. Überprüfen Sie die Klassifizierung rechnerisch.

Aufgabe 2 Starten Sie von der MATLAB-Kommandozeile aus die Funktion `doedel`. Diese Funktion erzeugt interaktiv Phasenkurven für Doedels Räuber-Beute-Modell (vgl. Beispiele 2.8 und 6.3). Erzeugen Sie ein möglichst vollständiges Diagramm für einen oder mehrere der folgenden λ -Werte:

$$0.4, 0.6^*, 0.65, 0.68, 0.7080680^*, 0.75, 0.8219044^*, 0.8329293^*, 0.9.$$

Die mit Stern gekennzeichneten Werte entsprechen Verzweigungspunkten und sind daher vor allem abenteuerlustigeren Naturen zu empfehlen.

Versuchen Sie jeweils, die Form und Lage fehlender Bildelemente (z.B. instabile Gleichgewichtspunkte, trennende Kurven zwischen Einzugsbereichen) zu erraten. Wählen Sie die Fenstergröße so, daß alle interessanten Phänomene im Bild sind. Berücksichtigen Sie dafür ggf. auch die Fälle $x_1 < 0$ und $x_2 < 0$. (Hinweis: Ziehen Sie zum Vergleich die Abbildungen 1 und 14 heran.)

Aufgabe 3 Das SIMULINK-Modell `LotkaVolterra.m` stellt die Lotka-Volterra-Gleichungen aus Beispiel 2.4 für die feste Parameterkombination

$$\alpha = 0.25, \quad \beta = 0.01, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 0.01$$

dar. Die Integrationsglieder für x_1 und x_2 sind auf die Startwerte

$$x_1(0) = 80, \quad x_2(0) = 25$$

voreingestellt. Die Simulation erzeugt in einem Grafikfenster eine Phasenkurve.

- a) Die Gleichungen besitzen einen Gleichgewichtspunkt mit $x_1 > 0$ und $x_2 > 0$. Geben Sie diesen Punkt ohne Zuhilfenahme des Rechners an.
- b) Starten Sie die Simulation für verschiedene Startwerte von x_1 , während Sie den vorgeestellten Wert für x_2 beibehalten. (Hinweis: Entfernen Sie sich nicht zu weit von der 80, sonst sind die Bahnen im Grafikfenster nicht sichtbar!) Wählen Sie dafür im Menü `Simulation/Parameters...` das Runge–Kutta–Verfahren der Ordnung 5 bei einer Toleranz von 10^{-7} (also `1e-7`). Beschreiben Sie die Phasenkurven und charakterisieren Sie daraufhin den Gleichgewichtspunkt.
- c) Stellen Sie nun wieder den Startwert $x_1(0) = 80$ ein. Wählen Sie das Euler–Verfahren bei einer Toleranz von 10^{-3} (also `1e-3`). Welche Änderung beobachten Sie? Ist diese Änderung wesentlich und warum?
- d) Welche Eigenschaft des dynamischen Systems könnte diese Abhängigkeit von der Qualität des gewählten Verfahrens begünstigen? Ist diese Eigenschaft hier zu erwarten und wenn ja, warum?

Aufgabe 4 Das `SIMULINK`–Modell `VanderPol.m` repräsentiert die Van der Pol’sche Gleichung in ihrer Liénard’schen Darstellung (vgl. Beispiel 2.6) für $\gamma = 5$. Suchen Sie das Verstärkungsglied, das den Parameter `lambda` enthält. Starten Sie die Simulation für verschiedene Parameterwerte mit

$$-0.1 \leq \lambda \leq 0.1.$$

Das Modell erzeugt bei der Simulation zwei Grafiken, einen Plot der Koordinaten über der Zeit und eine Phasenkurve.

- a) Wieviele Arten von wesentlich verschiedenen (also nicht topologisch äquivalenten) Phasenporträts beobachten Sie? Beschreiben Sie die verschiedenen Bilder. Versuchen Sie, für die Limesmengen die passenden Bezeichnungen zu finden.
- b) Grenzen Sie ungefähr die Parameterbereiche ein, die zu den verschiedenen Porträts gehören.
- c) Welche Art von Verzweigung ist vermutlich am Werk? Wählen Sie einen Namen aus Abschnitt 6 und begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 5 Eine typische Parameterkombination für die Lorenz–Gleichungen aus Beispiel 2.7, die der ursprünglich von Lorenz gewählten sehr nahe kommt, ist durch

$$\sigma = 10, \quad \beta = \frac{8}{3}, \quad \rho = 28$$

gegeben. Das `SIMULINK`–Modell `Lorenz.m` stellt die Gleichungen dar. Die Parameter `beta` und `rho` sind mit den genannten Werten vorbelegt. Öffnen Sie das Modell und suchen Sie das Verstärkungsglied mit dem Parameter `sigma`. Probieren Sie die folgenden Werte für `sigma` aus, ohne die übrigen Parameter zu verändern:

0.05, 0.1, 0.25, 1, 3, 3.42, 3.43, 4.5, 5.7, 5.8, 10, 17, 19, 50, 70, 150.

(Ändern Sie vorsichtshalber auch keine weiteren Voreinstellungen des Modells, damit sich die gewünschten Effekte nicht verschieben.) Starten Sie für die angegebenen Werte jeweils die Simulation und beenden Sie sie erst, wenn Sie sicher sind, das Verhalten der Lösung richtig erkannt zu haben. Das Modell erzeugt zwei Grafiken, einen Plot der Koordinaten über der Zeit und zur Darstellung der Phasenkurve einen Plot von x_3 gegen x_2 .

- a) Erklären Sie zuerst, wieso sich im x_2, x_3 -Plot die Phasenkurve selber schneidet. Sollte das nicht gemäß Satz 1.4 ausgeschlossen sein?
- b) Versuchen Sie, das Lösungsverhalten für die einzelnen Parameterwerte zu beschreiben. In welcher Weise ändert es sich? Wo vermuten Sie Verzweigung?
- c) Der für den Parameterwert 10 und Nachbarwerte auftretende Attraktor wird in der Literatur als seltsamer Attraktor bezeichnet. Würden Sie sich dieser Bezeichnung anschließen wollen und wenn ja, warum?
- d) Halten Sie einen solchen Attraktor auch in einem ebenen System für möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

Literatur

- [1] Arnold, V.I.: *Geometrical Methods in the Theory of ODE's*. Springer: New York (1982).
- [2] Amann, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Walter de Gruyter: Berlin (1983).
- [3] Arrowsmith, D.K., and Place, C.M.: *Ordinary Differential Equations*, Chapman and Hall: London (1982).
- [4] Arrowsmith, D.K., and Place, C.M.: *Dynamische Systeme*, Spektrum: Heidelberg (1994).
- [5] Chow, S.N., and Hale, J.: *Methods of Bifurcation Theory*, Springer: New York (1982).
- [6] Doedel, E.J., et al.: *AUTO 97; Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*, Software-Manual, samt Software frei erhältlich auf <ftp.cs.concordia.ca/pub/doedel/auto> (1997).
- [7] Gilmore, R.: *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*, Wiley: New York (1981).
- [8] Golub, G.H., and Ortega, J.H.: *Wissenschaftliches Rechnen und Differentialgleichungen*, Heldermann-Verlag: Berlin (1995).
- [9] Guckenheimer, J., and Holmes, P.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer: New York (2nd printing, 1986).
- [10] Hale, J.K.: *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience: New York (1969).
- [11] Hartman, P.: *Ordinary Differential Equations*, Wiley and Sons: New York (1964).

- [12] Hirsch, M.W., and Smale, S.: *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press: New York (1974).
- [13] Marsden, J., and McCracken, M.: *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Springer-Verlag: New York (1976).
- [14] Troger, H.: Ein Beitrag zum Durchschlagen einfacher Strukturen, *Acta mech.* **23** (1975), 179–191.
- [15] Voß, H.: *Mathematik für Studierende der Ingenieurwissenschaften III*, Vorlesungsskript, TUHH (1996).

Index

- Äquivalenz
 - lokale topologische, 4
 - topologische, 4
- anziehende Menge, 13
- Ast, 20
- Attraktor, 12, 13
 - seltsamer, 28
- Bahn, 3
 - geschlossene, 12
- Beobachtbarkeit, 9
- dicht liegen, 13
- Differentialgleichung
 - autonome, 2
 - explizite, 2
 - gewöhnliche, 2
- dynamisches System, 2
 - autonomes, 2
 - diskretes, 2
 - kontinuierliches, 2
 - linearisiertes, 16
- Einzugsbereich, 13
- Fluß, 2
 - Flußinvarianz, 3
- Gleichgewichtspunkt, 9
 - asymptotisch stabiler, 10
 - attraktiver, 10
 - dynamisch stabiler, 10
 - hyperbolischer, 11
 - instabiler, 10
 - stabiler, 10
 - strukturell stabiler, 11
- Grenzyklus, 13
- Hamiltonsches System, 18
- Knoten, 14, 15
- Konvergenz gegen Mengen, 13
- Lösung
 - Lösungsast, 20
 - stationäre, 9
- Liapunov-Funktion, 11
- Limesmenge, 12
- Linearisierung, 7, 16
- Orbit, 3
 - heteroklinischer, 12
 - homoklinischer, 12
 - periodischer, 12
 - quasiperiodischer, 12
- Orientierung, 4
- Pfad, 20
 - Pfadverfolgung, 20
- Phase
 - Phasenkurve, 3
 - Phasenporträt, 4
 - Phasenraum, 3
- Sattelpunkt, 15
- Schlauch, 13
- Stabilität
 - asymptotische, 10
 - dynamische, 10
 - eines Gleichgew.p., 10
 - lokale strukturelle, 11
 - strukturelle, 5, 11, 18
- Strudelpunkt, 15
- System
 - ebenes, 14
 - lokal struk. stab., 11
 - strukturell stabiles, 5
- Translationsinvarianz, 3
- Umgebung einer Menge, 13
- Umkehrpunkt, 23
- Verzweigung, 20
 - Hopf-V., 24
 - Pitchfork-V., 24
 - stationäre, 24
 - transkritische, 24
 - V.s-diagramm, 21
 - V.s-parameter, 20
 - V.s-punkt, 20
- Wirbelpunkt, 15