2019-05 Institutsseminar: Spektraltheorie für Heimwerker

Spektraltheorie für Heimwerker - Schneiden, Kleben, Glattbügeln

Institutsseminar, Freitag, 24.5.19

Letztes mal:

$A : X \to X$ mit X... Banachraum,
$\lambda \in \mathbb{C}$,
$A - \lambda I =: B$
$\varepsilon > 0$

> Woran erkenne ich, dass $\|B^{-1}\| > 1/\varepsilon$?

> Daran, dass $\exists x \in X : \|Bx\| < \varepsilon\|x\|$ oder entsprechendes für B^* gilt.

x heißt dann auch *ε-Pseudoeigenvektor* (zu A und λ) oder manchmal auch *ε-Zeuge* (zu B).
λ heißt entsprechend *ε-Pseudoeigenwert* von $A \implies$ *ε-Pseudospektrum* von A (aufschlussreiche Umgebung des Spektrums von A)

entsprechende Notationen:

$X_1 := \{x \in X : \|x\| = 1\}$
$\nu(B) := \inf_{x \in X_1} \|Bx\|$ ... *untere Norm* (by abuse of notation)
$\|B^{-1}\| = \min(\nu(B), \nu(B^*))$
$\|B^{-1}\| > 1/\varepsilon \iff \nu(B) < \varepsilon$ oder $\nu(B^*) < \varepsilon$

$\mathrm{spec}_\varepsilon(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \|(A - \lambda I)^{-1}\| > 1/\varepsilon\}$

endlichdim. Approximation:

Sei $P_1, P_2, \ldots : X \to X$ eine Folge von Projektoren mit $P_n \to I$, d.h. $P_n x \to x$ für alle $x \in X$. (beides kann man abschwächen)

$A_n := P_n A P_n$ (*finite sections*, Galerkin-Verfahren, e.g. FEM, PCE)

Arbeits-Beispiel:

$X = \ell^p(\mathbb{Z})$ mit $P_n = \chi_{[-n,n]}\cdot$
oder $X = \ell^p(\mathbb{N})$ mit $P_n = \chi_{[1,n]}\cdot$
A ... Bandoperator auf X

prinzipielle Technik:

- **a)** ε-Pseudo-EV von A abschneiden $\Rightarrow$ ε-Pseudo-EV von A_n (zum selben ε, n hinr. groß) [elementar für $1 < p < \infty$, mit $\mathcal{P}$-Theorie für $p = 1, \infty$]

    - $\limsup \nu(A_n) \le \nu(A)$ bzw. $\liminf \|A_n^{-1}\| \ge \|A^{-1}\|$
    - $\limsup \|A_n^{-1}\| = \max(\|A^{-1}\|, \ldots)$ (limit operators)
    - $\limsup \operatorname{spec}_\varepsilon(A_n) = \operatorname{spec}_\varepsilon(A) \cup \ldots$ (*spectral pollution*)
- **b)** mehrfaches Hintereinanderkleben eines ε-Pseudo-EV von $A_n^{per} \Rightarrow \varepsilon$-Pseudo-EV von A, falls A zufällige Dagonalen hat
    - in dem Fall also keine spectral pollution; außerdem $\limsup = \lim$

Heute: Approximation von $\nu(A)$ durch $\nu(A_n)$ möglichst gut quantifizieren

Setting: $X = \ell^p(\mathbb{Z})$, $P_n = \chi_{[-n,n]} \cdot$, A beschr. Bandoperator mit $\nu(A) < \varepsilon$

geg: ε-Pseudo-EV x von A zu λ (o.B.d.A. $\lambda = 0$), d.h. $\|Ax\| < \varepsilon \|x\|$

Wir wissen aus a):

$$\exists n_0 : \forall n \ge n_0 : \|P_n A P_n x\| < \varepsilon \|P_n x\|, \quad \text{also auch} \quad \nu(P_n A P_n) < \varepsilon.$$

Problem: n_0 könnte riesig sein (s. Diag-Bsp.) $\Rightarrow \nu(P_n A P_n)$ numerisch teuer

Idee:

Fenstergröße n lieber *moderat groß*, dafür Fenster verschiebbar

$$P_{n,k} := \chi_{k+[-n,n]} \cdot \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } k \in \mathbb{Z}$$

Hoffnung: $\exists n \in \mathbb{N}$ (moderat groß) und $k \in \mathbb{Z}$ (gut gewählt):

$$\|P_{n,k} A P_{n,k} x\| \approx \varepsilon \|P_{n,k} x\|$$

Mit $[A, B] := AB - BA$ gilt

$$A P_{n,k} = P_{n,k} A + [A, P_{n,k}]$$

$$P_{n,k} A P_{n,k} = P_{n,k} A + P_{n,k} [A, P_{n,k}]$$

$$\|P_{n,k} A P_{n,k} x\| \le \|P_{n,k} A x\| + \|P_{n,k} [A, P_{n,k}] x\|$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_{n,k} A P_{n,k} x\|^p \le \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Big(\|P_{n,k} A x\| + \|P_{n,k} [A, P_{n,k}] x\| \Big)^p$$

$$\sqrt[p]{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_{n,k} A P_{n,k} x\|^p} \le \sqrt[p]{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Big(\|P_{n,k} A x\| + \|P_{n,k} [A, P_{n,k}] x\| \Big)^p}$$

$$\le \sqrt[p]{\underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_{n,k} A x\|^p}_{=: a}} + \sqrt[p]{\underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_{n,k} [A, P_{n,k}] x\|^p}_{=: b}}$$

Trick 1:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\chi_{k+F} \cdot y\|^p = |F| \, \|y\|^p$$

Somit ist $a = (2n+1)\|Ax\|^p < (2n+1)\varepsilon^p\|x\|^p$.

Zum Kommutator:

Leicht zu sehen:

$$[A, P_{n,k}] = [A, P_{n,k}]\Delta_{n,k} \quad \text{mit} \quad \Delta_{n,k} := P_{n+w,k} - P_{n-w,k},$$

wobei w die Bandbreite (Dispersion, Reichweite,...) von A bezeichnet.
Deshalb ist

$$\|P_{n,k}[A, P_{n,k}]x\| = \|P_{n,k}[A, P_{n,k}]\Delta_{n,k}x\| \leq \underbrace{\|P_{n,k}[A, P_{n,k}]\|}_{\leq 2\|A\|} \|\Delta_{n,k}x\|$$

und somit

$$b \leq 2^p\|A\|^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\Delta_{n,k}x\|^p \overset{\text{Trick 1}}{=} 2^p\|A\|^p 4w\|x\|^p$$

Oben wieder eingesetzt:

$$\begin{aligned}\sqrt[p]{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|P_{n,k}AP_{n,k}x\|^p} &\leq \sqrt[p]{\underbrace{(2n+1)\varepsilon^p\|x\|^p}_{a}} + \sqrt[p]{\underbrace{2^p\|A\|^p 4w\|x\|^p}_{b\leq\cdots}} \\ &= \sqrt[p]{2n+1}\varepsilon\|x\| + 2\|A\|\sqrt[p]{4w}\|x\| \\ &= \Big(\varepsilon + \underbrace{\frac{2\|A\|\sqrt[p]{4w}}{\sqrt[p]{2n+1}}}_{=:\,\delta}\Big)\sqrt[p]{2n+1}\|x\|\end{aligned}$$

Alles hoch p:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|P_{n,k}AP_{n,k}x\|^p \leq (\varepsilon+\delta)^p(2n+1)\|x\|^p \overset{\text{Trick 1}}{=} (\varepsilon+\delta)^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|P_{n,k}x\|^p$$

Folglich muss es mindestens ein $k \in \mathbb{Z}$ geben (wir wissen leider nicht, welches) mit

$$\|P_{n,k}AP_{n,k}x\|^p \leq (\varepsilon+\delta)^p\|P_{n,k}x\|^p$$

also

$$\|P_{n,k}AP_{n,k}x\| \leq (\varepsilon+\delta)\|P_{n,k}x\| \quad \text{mit} \quad \delta \sim 1/\sqrt[p]{n}.$$

1. Bemerkung:

Mit einem glatteren Abschneider (sinusförmig) im Beweis kommt man sogar auf $\delta \sim 1/n$.

2. Bemerkung:

Wenn man das linksseitige Abschneiden weglässt, bekommt man nicht nur

$$\nu(P_{n,k}AP_{n,k}) \leq \nu(A) + \delta$$

sondern sogar

$$\nu(A) \leq \nu(AP_{n,k}) \leq \nu(A) + \delta \quad \text{bzw.} \quad \nu(AP_{n,k}) - \delta \leq \nu(A) \leq \nu(AP_{n,k}).$$

3. Bemerkung:

Der Beweis überträgt sich praktisch 1:1 auf $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ oder sogar schlimmeres.