

FSM und Resolvente

06.02.2019, Institutsseminar

Notationen

X ... Banachraum

$A : X \rightarrow X$... (beschr.) lin. Op.

$X_1 := \{x \in X : \|x\| = 1\}$

$\|A\| = \sup_{x \in X_1} \|Ax\|$... Norm

$\nu(A) = \inf_{x \in X_1} \|Ax\|$... "untere Norm"

$\nu(A) > 0 \iff A$ injektiv & $A(X)$ abgeschlossen

A invertierbar $\iff \nu(A) > 0$ & $\nu(A^*) > 0$

$\|A^{-1}\| = 1/\min(\nu(A), \nu(A^*))$

Sei $\varepsilon > 0$.

$x \in X_1$ heißt *Pseudo-Eigenvektor* von A bzgl. $\lambda \in \mathbb{C}$, falls $\|(A - \lambda I)x\| < \varepsilon$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Pseudo-Eigenwert* von A , falls $\nu(A - \lambda I) < \varepsilon$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Pseudo-Spektralwert* von A , falls $1/\|(A - \lambda I)^{-1}\| < \varepsilon$ mit $1/\infty := 0$.

$\text{spec}_\varepsilon(A)$... ε -Pseudospektrum von A (Menge der ε -Pseudo-Spektralwerte)

Unendliche Matrizen (beispielsweise)

$X = \ell^p(\mathbb{Z})$

$A \in L(X)$ wird identifiziert mit Matrix $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$

$n \in \mathbb{N}$.

$P_n \in L(X)$ mit $P_n x = \chi_{\{-n, \dots, n\}} x$

$A_n := P_n A P_n|_{P_n(X)}$... n -te *finite section* von A

Lemma 1 (ε -Pseudo-EV von $A \Rightarrow \varepsilon$ -Pseudo-EV von A_n)

Sei A Bandoperator (Bandbreite w) und $1 < p < \infty$.

a) $\limsup \nu(A_n) \leq \nu(A)$

b) $\liminf \|A_n^{-1}\| \geq \|A^{-1}\|$

Beweis: a) Sei $p < \infty$ und $\varepsilon > \nu(A)$.

Dann $\exists x \in X_1 : \|Ax\| < \varepsilon$.

Für $k = 1, 2, \dots$ setze $x_k := \frac{1}{\|P_k x\|} P_k x \in X_1$.

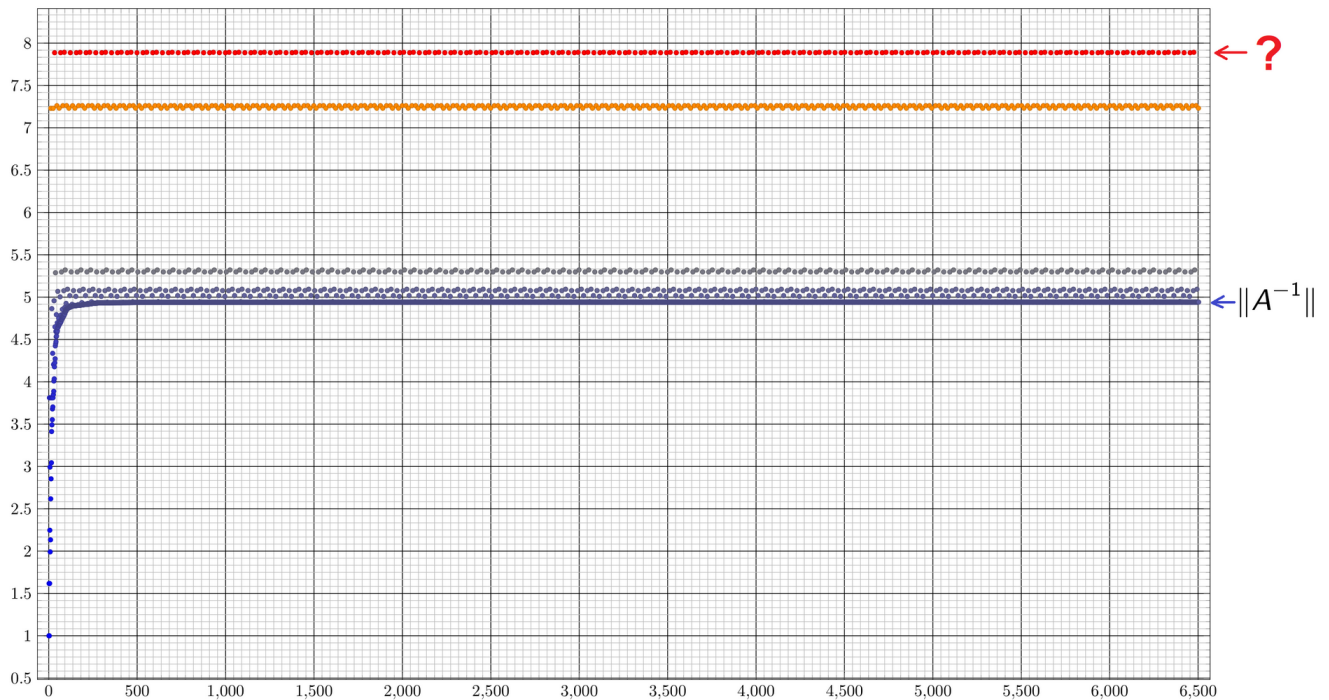
Wegen $P_k x \rightarrow x$ gilt $x_k \rightarrow x$ und somit $\|Ax_k\| \rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$, d.h. $\|Ax_k\| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Für $n \geq k_0 + w$ gilt dann sogar $A_n x_{k_0} = P_n A P_n x_{k_0} = A x_{k_0}$ und somit $\nu(A_n) < \varepsilon$.

b) Für $1 < p < \infty$ bekommt man mittels a) $\nu(A_n) \leq \nu(A)$ und $\nu(A_n^*) \leq \nu(A^*)$. Der Rest folgt aus $\|A^{-1}\| = 1/\min(\nu(A), \nu(A^*))$. ■

Ab hier verzweigt sich der Vortrag in vier verschiedene Richtungen:

1. Zweig: $\limsup \|A_n^{-1}\| = \max(\|A^{-1}\|, \dots)$

- Fibonacci Hamiltonian Kurven von Jonas Sattler



- $\limsup(\text{spec}_\varepsilon(A_n)) = \text{spec}_\varepsilon(A) \cup \dots$
- "..." = spectral pollution

2. Zweig: Lemma 1 für $p \in \{1, \infty\}$

$$X_{00} := \{x \in X : \text{supp}(x) \text{ beschränkt}\} = \text{span}\{e_k : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$X_0 := \text{clos}(X_{00})$$

Betrachte nun alle $A \in L(X)$ mit $A(X_0) \subset X_0$

$$\iff A(X_{00}) \subset X_0$$

$$\iff Ae_k \in X_0, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \text{alle Spalten von } (a_{ij}) \text{ sind in } X_0$$

Später: analog für A^* , d.h. auch alle Zeilen von (a_{ij}) sind in X_0

Für $A_0 := A|_{X_0} : X_0 \rightarrow X_0$ kann man zeigen:

- $\|A_0\| = \|A\|$ ($\sup_{x \in X_1} \|Ax\|$ kann mit x in X_0 approx. werden)
- $\nu(A_0) = \nu(A)$ ($\inf_{x \in X_1} \|Ax\|$ kann mit x in X_0 approx. werden)
- A_0 inv. $\iff A$ inv.
- $(A_0)^{-1} = (A^{-1})_0$
- $\|A_0^{-1}\| = \|(A^{-1})_0\| = \|A^{-1}\|$

Dann wie im Beweis von Lemma 1 argumentieren aber mit A_0 statt A .

3. Zweig: Umkehrung (endl. Pseudo-EV \Rightarrow unendl. Pseudo-EV)?

Antwort: Ja, z.B. wenn A diagonalenweise zufällige Einträge hat.

x sei endlicher Vektor.

Bei Fortsetzung durch Nullen auf unendl. Vektor \hat{x} und Anwendung von A darauf entstehen Schnitteffekte (Fehler) an den Rändern von x .

($\Rightarrow \|A\hat{x}\|$ ist zu verschieden von $\|A_n x\|$)

Idee: x erst mehrmals wiederholen und dann durch Nullen fortsetzen.

\Rightarrow besseres Verhältnis Inhalt / Rand

3. Zweig endl. Pseudo-EV $\xrightarrow{?}$ unendl. Pseudo-EV
 Antwort: Für zufällige Operatoren, ja!
 Sei x endlicher Vektor mit $\|x\|=1$.

1. Versuch: $\hat{x} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \boxed{x} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\hat{x} = \begin{pmatrix} L_n \\ \vdots \\ \boxed{A_n x} \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \boxed{x} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left. \begin{matrix} L_n \\ \vdots \\ U_n \end{matrix} \right\} \leq \|L_n\|$
 $\left. \begin{matrix} \boxed{A_n x} \\ \vdots \\ \boxed{x} \end{matrix} \right\} \leq \|A_n\|$
 $\left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \leq \|U_n\|$

$\Rightarrow \|A\hat{x}\|$ wahrsh. viel größer als ϵ
 Abschneideeffekte an den Rändern von x

$\|A_n^{PE}\|^{-1} \leq \|A^{-1}\|$
 $\|A_n^{PE} - \lambda I_n\|^{-1} \leq \|A - \lambda I\|^{-1}$
 $\text{Spec}_\epsilon(A_n^{PE}) \subset \text{Spec}_\epsilon(A)$

Idee: x erst mehrmals ($N \in \mathbb{N}$ mal) wiederholen und dann durch Nullen fortsetzen \Rightarrow besseres Verhältnis Inhalt / Rand

$N \in \mathbb{N}$. Hilfskonstruktion: $x^N := \begin{pmatrix} \boxed{x} \\ \boxed{x} \\ \vdots \\ \boxed{x} \end{pmatrix}$ $\leftarrow N$ mal

entsprechend $A^N := \begin{pmatrix} A_n & L_n & & \\ U_n & A_n & & \\ & & \ddots & L_n \\ & & & U_n & A_n \end{pmatrix}$ (immer noch endlich)

$\Rightarrow A^N x^N = \begin{pmatrix} (A_n + L_n)x \\ (U_n + A_n + L_n)x \\ \vdots \\ (L_n + A_n + U_n)x \\ (U_n + A_n)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - U_n x \\ y \\ \vdots \\ y \\ y - L_n x \end{pmatrix}$ mit $y := A_n^{PE} x$ und $A_n^{PE} := U_n + A_n + L_n$

Falls $\|y\| < \epsilon$, d.h. x ist ϵ -Pseudo-EV für A_n^{PE} (zu $\lambda=0$), dann ist $\|x^N\| = \sqrt{1^2 + \dots + 1^2} = \sqrt{N}$ und $\|A^N x^N\| < \sqrt{N} \cdot \epsilon + \|U_n\| + \|L_n\|$
 \Rightarrow Für N hinw. groß ist $\frac{\|A^N x^N\|}{\|x^N\|} < \epsilon$, d.h. x^N ist ϵ -Pseudo-EV für A^N (zu $\lambda=0$).

A zufällig $\Rightarrow A^N$ taucht irgendwo (beliebig genau) in A auf
 $\Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \boxed{x^N} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ϵ -Pseudo-EV von A $\#$

$\rho(A_n^{PE}) \geq \rho(A)$
 $\rho(A_n^{PE} - \lambda I_n) \geq \rho(A - \lambda I)$

Fazit \Rightarrow

$$\nu(A_n^{per}) \geq \nu(A)$$

$$\|(A_n^{per})^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|, \text{ analog mit } -\lambda I$$

$$\text{spec}_\varepsilon(A_n^{per}) \subset \text{spec}_\varepsilon(A)$$

Lemma 1 funktioniert auch mit A_n^{per} statt A_n .

Zusammen:

$$\nu(A_n^{per}) \rightarrow \nu(A)$$

$$\|(A_n^{per})^{-1}\| \rightarrow \|A^{-1}\|, \text{ analog mit } -\lambda I$$

$$\text{spec}_\varepsilon(A_n^{per}) \rightarrow \text{spec}_\varepsilon(A) \text{ (Hausdorff)}$$

4. Zweig: Quantifizierung der Approximation von $\nu(A)$ durch finite sections

nächstes Mal